Aula 22 – Derivadas Parciais - Diferencial - Matriz Jacobiana

Introdução

Uma das técnicas do cálculo tem como base a idéia de aproximação de uma função por uma função linear ou por uma função afim na vizinhança de um ponto do seu domínio. Foi assim para função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Cálculo I), $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ (Cálculo II) e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (início do Cálculo III). E para funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a hisória, como veremos, irá se repetir.

Definição 3

Dizemos que uma função $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é afim se existe uma função (ou transformação) linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e um vetor y_0 em $\mathbb{R}^m$ tal que

$$A(x) = L(x) + y_0$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Conforme já observamos, veremos que as funções afins constituem a base do Cálculo Diferencial das funções vetoriais.

Exemplo 5

$$\begin{aligned} A(x, y, z) &= (2x + y - 1, x - 2z + 1, x + y + z) \\ &= (2x + y, x - 2z, x + y + z) + (-1, 1, 0) \end{aligned}$$

é uma função afim de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, em que $y_0 = (-1, 1, 0)$ e L é a transformação linear representada na forma matricial como segue:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = L(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Obs 3

Note que poderíamos ter apresentado a função afim do exemplo anterior usando também a representação matricial

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = A(x,y,z) = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{L(x,y,z)} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{y_0}$$

Exemplo 6

Em dimensão 1, uma função afim tem a forma $f(x) = ax+b$, em que a parte linear é $L(x) = ax$, sendo $[a]_{1\times 1}$ a matriz que representa a função linear.

Em Busca do Conceito de Diferenciabilidade

Recordamos inicialmente o caso das funções reais f de uma variável real x. Ora, sabemos que se f é diferenciável em x_0, então f pode ser aproximada numa vizinhança de x_0 por uma função afim $A(x) = ax + b$. Como $f(x_0) = A(x_0) = ax_0 + b$, obtemos:

$$A(x) = ax + b = a(x - x_0) + f(x_0)\,.$$

A parte linear de $A(x)$ (representada anteriormente por L) é, neste caso, a expressão $a \cdot x$. A norma euclideana de um número real é o seu valor absoluto, assim a condição de diferenciabilidade torna-se

$$0 = \lim_{x\to x_0} \frac{E(x)}{|x - x_0|} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - A(x)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{|x - x_0|} \qquad (3)$$

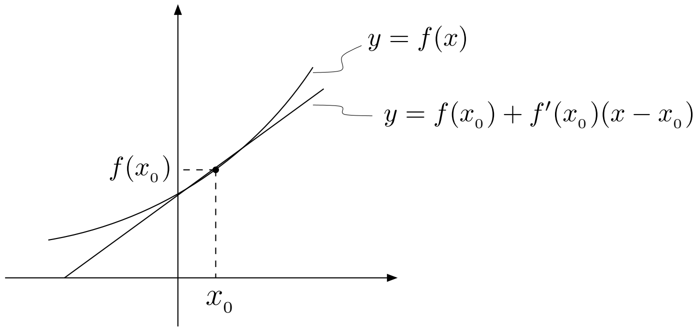
onde $E(x)$ é o erro que se comete quando aproximamos $f(x)$ por $A(x)$ numa vizinhança de x_0. Como sabemos, a expressão (3) é equivalente a

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a\,.$$

O número real a é usualmente denotado por $f'(x_0)$ e é denominado **derivada de f em x_0**. A função afim A é portanto dada por

$$A(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

e o seu gráfico é a **reta tangente** ao gráfico de f em x_0 (veja figura a seguir).



Agora estudaremos a possibilidade de aproximar uma função vetorial real arbitrária $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ numa vizinhança de um ponto x_0 do seu domínio por uma função afim $A(x)$.

Ora, para início de conversa, devemos ter $A(x_0) = f(x_0)$, isto é, para $x = x_0$, $A(x)$ deve fornecer o valor exato de f (acompanhe a discussão atual comparando com o exemplo das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Como $A(x) = L(x)+y_0$ e $f(x_0) = A(x_0) = L(x_0) + y_0$, temos que

$$A(x) = L(x) + y_0 = L(x) + f(x_0) - L(x_0)\,.$$

Ora, $L(x)$ é linear, logo

$$L(x) - L(x_0) = L(x - x_0)$$

e, portanto, concluimos que

$$A(x) = L(x - x_0) + f(x_0) \tag{4}$$

É natural impormos também a condição de que

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x) - A(x)\big) = 0 \tag{5}$$

afinal queremos que $A(x)$ seja uma aproximação para a função f numa vizinhança de x_0.

Entretanto, para que isso aconteça, precisamos que f seja contína em $x = x_0$. Com efeito, observe inicialmente que como $L(x)$ é contínua, temos que

$$\lim_{x\to x_0} L(x - x_0) = L(0) = 0$$

logo,

$$0 = \lim_{x\to x_0} \big(f(x) - A(x)\big) = \lim_{x\to x_0} \big(f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)\big) = \lim_{x\to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big)\,,$$

isto é,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

Ora, isto é significativo, mas nada diz a respeito de L. Portanto, a fim de que o nosso conceito de aproximação possa distinguir uma função afim de outra ou medir de algum modo até que ponto A é uma boa aproximação para f, algum requisito é necesário. No caso de dimensão 1 (função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$), exigimos que $[f(x) - A(x)]$ tendesse a zero mais rápido do que x tendesse a x_0, isto é, exigimos que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

(denotamos, neste caso, a por $f'(x_0)$ - veja equação (3) da página anterior).

É natural que façamos o mesmo (é claro, com algumas adaptações) para funções de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Assim, exigiremos que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0\,.$$

Equivalentemente, podemos exigir que f seja representável na forma

$$f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + \|x - x_0\| E(x - x_0)\,,$$

em que $E(x - x_0)$ é uma função que tende a zero quando $x \to x_0$.

Isto posto, podemos fazer a seguinte definição

Definição 4

Uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ será denominada *diferenciável em* x_0 se:

(i) x_0 é um ponto interior de U

(ii) Existe uma função afim que aproxima f numa vizinhança de x_0, isto é, existe uma função linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0\,.$$

A função linear L é denominada *diferencial de* f *em* x_0. Dizemos simplesmente que a função f é *diferenciável* se ela for diferenciável em todo ponto de seu domínio.

Conforme a definição, o domínio de uma função diferenciável é um conjunto aberto. Entretanto, é conveniente estender a definição de modo tal que se possa falar de uma função diferenciável f definida num subconjunto arbitrário S do espaço do domínio. Diremos, neste caso, que f é diferenciável em S se existir $\widetilde{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciável num conjunto aberto U que contém S de modo que $\widetilde{f}\Big|_S = f$.

Como Determinar a Diferencial de uma Dada Função

Da Álgebra Linear sabemos que uma transformação linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ pode ser representada por uma matriz $m \times n$. Assim, o que precisamos fazer é determinar os coeficientes (a_{ij}) dessa matriz. Veremos a seguir que estes coeficientes podem ser determinados em termos das derivadas parciais de f.

Ora, como L é univocamente determinada por f em cada ponto interior do domínio de f, podemos falar de a *diferencial* de f em x_0 e a denotamos por $d_{x_0}f$. Assim, para encontrar a matriz $\left[d_{x_0}f\right]$ de f uma função diferenciável $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, consideramos a base canônica $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ do espaço domínio $\mathbb{R}^n$. Se x_0 é um ponto interior do domínio de f, os vetores

$$x_j = x_0 + te_j, \quad j = 1, \cdots, n$$

estão todos no domínio de f para t suficientemente pequeno. Temos ainda pela condição (ii) da definição de diferencial que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_j) - f(x_0) - d_{x_0}f(x_j - x_0)}{t} = 0 \tag{6}$$

para $j = 1, \cdots, n$.

Como $d_{x_0}f$ é linear, temos que

$$d_{x_0}f(x_j - x_0) = d_{x_0}f(te_j) = td_{x_0}f(e_j)\,.$$

Logo, o limite (6) é equivalente a dizer que

$$\lim_{t \to 0}\left(\frac{f(x_j) - f(x_0)}{t} - d_{x_0}f(e_j)\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \to 0} \frac{f(x_j) - f(x_0)}{t} = d_{x_0}f(e_j)\,, \tag{7}$$

para $j = 1, \cdots, n$.

Ora, $d_{x_0}f(e_j)$ é a j-ésima coluna da matriz de $d_{x_0}f$.

$$\underset{d_{x_0}f}{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \mathbf{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \mathbf{a_{2j}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \mathbf{a_{mj}} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}} \underset{e_j}{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \mathbf{a_{1j}} \\ \mathbf{a_{2j}} \\ \vdots \\ \mathbf{a_{nj}} \end{bmatrix}$$

Por outro lado, o vetor x_j difere de x_0 apenas na j-ésima coordenada, e nesta coordenada a diferença é justamente o número t. Portanto, o primeiro membro da equação (7) é precisamente a derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\,.$$

De fato, se $f_1, f_2, \cdots, f_m$ são as funções coordenadas de f, então

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\left(\frac{f(x_j)-f(x_0)}{t}\right) &= \left(\lim_{t\to 0}\frac{f_1(x_0+te_j)-f_1(x_0)}{t}, \cdots, \lim_{t\to 0}\frac{f_m(x_0+te_j)-f_m(x_0)}{t}\right)\\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x_0), \cdots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x_0)\right)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\,.\end{aligned}$$

Isto posto, temos que:

$$\begin{aligned} a_{1j} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x_0)\\ a_{2j} &= \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(x_0)\\ &\vdots\\ a_{mj} &= \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x_0)\end{aligned}$$

com $j = 1, \cdots, n$.

Assim, temos que a matriz de $d_{x_0}f$ tem a forma

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0)\end{bmatrix}$$

Esta matriz é denominada *matriz jacobiana* ou *derivada* de f em x_0 e é denotada por $f'(x_0)$. Podemos resumir o resultado que acabamos de provar no seguinte teorema:

Teorema 5

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável e x_0 um ponto interior de f. Então a diferencial $d_{x_0}f$ é univocamente determinada e a sua matriz é a matriz jacobiana de f, isto é, para todos os vetores $y \in \mathbb{R}^n$, temos

$$d_{x_0}f(y) = f'(x_0)\cdot y \tag{8}$$

Apesar da transformação linear $d_{x_0}f$ e a sua matriz $f'(x_0)$ serem logicamente distintas, a equação (8) mostra que elas podem ser identificadas na prática contanto que seja entendido que a matriz de $d_{x_0}f$ seja tomada em relação as bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

Exemplo 7

Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y,z) = \big(x^2 + e^y, x + y \operatorname{sen} z\big)$. Ora, as funções coordenadas de f são $f_1(x,y,z) = x^2 + e^y$, $f_2(x,y,z) = x + y \operatorname{sen} z$ e a matriz jacobiana em (x,y,z) é dada então por:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & e^y & 0 \\ 1 & \operatorname{sen} z & y\cos z \end{bmatrix}$$

Portanto, o diferencial de f em $(1,0,\pi/2)$ é a função linear cuja matriz é

$$f'(1,0,\pi/2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 8

A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = \Big((x+y)^2, xy^2 + x^2y\Big)$ tem diferencial $d_{x_0}f$ em (x,y) representada pela matriz jacobiana

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix} 2x+2y & 2x+2y \\ y^2+2xy & x^2+2xy \end{bmatrix}$$

Condição Suficiente para a Diferenciabilidade

Dada uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciável, U um aberto do $\mathbb{R}^n$, vimos que $d_{x_0}f$, $x_0 \in U$ fica univocamente determinada a partir dos cálculos das derivadas parciais

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\,,$$

com $i = 1, \cdots, m$ e $j = 1, \cdots, n$, se utilizarmos as bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, isto é, se f é diferenciável em $x_0 \in U$, então $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$, com $i = 1, \cdots, m$ e $j = 1, \cdots, n$, existem e

$$\big[d_{x_0}f\big] = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right]_{m\times n}.$$

Diante disto, surge uma questão natural: será que se todas as derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$ existem? podemos afirmar que f é diferenciável em x_0? Sabemos (por aulas anteriores) que tal fato não se verifica para funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. No entanto, podemos adicionar alguma condição sobre as derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ de modo a garantir a diferenciabilidade de f. Acreditamos que você já deva saber do que se trata (veja o próximo teorema).

Teorema 6

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, U um aberto do $\mathbb{R}^n$. Se todas as derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ das funções coordenadas são contínuas em U, então f é diferenciável em U.

Não faremos aqui a demonstração deste teorema. O leitor curioso pode encontrar uma demonstração deste resultado em [*Williamson etall*, 1976, pp 261-263]. O que realmente interessa para nós é se você sabe usar este resultado para argumentar sobre a diferenciabilidade de funções vetoriais. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 9

Considere $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ definida no disco aberto

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\right\}.$$

Note que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

são contínuas no disco aberto. Logo, f é diferenciável em D.

Exercícios Propostos

1. Se f é função vetorial definida por

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

Determine a derivada de f nos seguintes casos:

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

2. Determine a derivada de cada uma das seguintes funções nos pontos indicados:

a) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2$ em $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $g(x, y, z) = xyz$ em $(x, y, z) = (1, 0, 0)$

c) $f(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}$ em $t = \pi/4$

d) $f(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ t \\ t^2 \end{bmatrix}$ em $t = 1$

e) $g(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$ em $(x, y) = (1, 2)$

f) $A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u + v \\ u - v \\ 1 \end{bmatrix}$ em $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

g) $T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u \cos v \\ u \operatorname{sen} v \\ v \end{bmatrix}$ em $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pi \end{pmatrix}$

h) $f(x, y, z) = (x + y + z, xy + yz + xz, xyz)$ em (x, y, z)

3. Seja P uma função do espaço euclideano tridimensional no bidimenional definida por $P(x, y, z) = (x, y)$.

a) Qual é a interpretação geométrica desta transformação?

b) Mostre que P é diferenciável em todos os pontos e determine a matriz da diferencial de P em $(1, 1, 1)$.

4. a) Desenhe a curva em $\mathbb{R}^2$ definida parametricamente pela função

$$g(t) = \big(t - 1, t^2 - 3t + 2\big), \quad -\infty < t < +\infty\,.$$

b) Determine a função afim que aproxima g

(1) numa vizinhança de $t = 0$

(2) numa vizinhança de $t = 2$

c) Descreva a curva definida parametricamente pela função afim.

5. a) Esboce a superfície em $\mathbb{R}^3$ definida explicitamente pela função

$$z = f(x, y) = 4 - x^2 - y^2 .$$

b) Determine a função afim que aproxima f

(1) numa vizinhança de $(0, 0)$

(2) numa vizinhança de $(2, 0)$

c) Desenhe os gráficos das funções afins em (b).

6. Qual é a derivada da função afim

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} ?$$

7. Prove que toda função linear é a sua própria diferencial.

8. Prove que toda translação é diferenciável. Qual é a diferencial?

9. A função $\mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2}$ é diferenciável em todo ponto de seu domínio?

10. Verifique que a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 - y^2} & \text{se} \quad x \neq \pm y \\ 0 & \text{se} \quad x = \pm y \end{cases}$$

tem a matriz jacobiana em $(0, 0)$, mas que não é diferenciável aí.