Aula 23 – Regra da Cadeia

Uma das fórmulas mais úteis de Cálculo de uma variável é a regra da cadeia, utilizada para calcular a derivada da composta de uma função com outra:

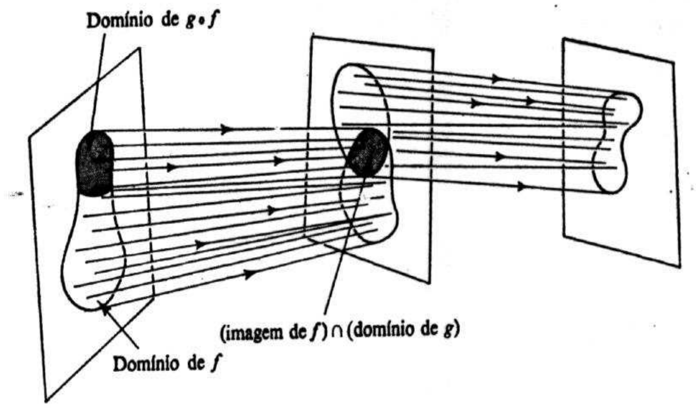
$$\big[g(f(x))\big]' = g'(f(x))f'(x)\,.$$

A generalização para várias variáveis é igualmente valiosa e, devidamente formulada, é igualmente fácil de enunciar.

Se duas funções f e g estão relacionadas de tal modo que o espaço imagem de f é o mesmo que o espaço domínio de g, podemos formar a **função composta** $g \circ f$ aplicando primeiro f e depois g. Assim,

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

para todo vetor x tal que x esteja no domínio de f e $f(x)$ esteja no domínio de g. O domínio de $g \circ f$ consiste dos vetores x que são levados por f no domínio de g. Uma configuração abstrata da composta de duas funções está ilustrada na figura a seguir.



Exemplo 10

Suponhamos que seja dada uma região bidimensional na qual o pontos se movem subordinados a uma lei especificada. Suponhamos que, para uma dada posição inicial com coordenadas (u, v), depois de um determinado tempo, o ponto esteja numa posição (x, y). Então (x, y) e (u, v) podem ser relacionados por equações da forma

$$\begin{aligned} x &= g_1(u, v) \\ y &= g_2(u, v)\,. \end{aligned}$$

Na notação vetorial estas equações podem ser escritas

$$\mathbf{x} = g(\mathbf{u})\,,$$

em que $\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{u} = (u, v)$ e g têm funções coordenadas g_1, g_2. Suponhamos agora que a posição inicial $\mathbf{u} = (u, v)$ de um ponto é determinada por uma função de outras variáveis (s, t) pelas equações

$$\begin{aligned} u &= f_1(s, t) \\ v &= f_2(s, t)\,. \end{aligned}$$

Estas podem ser escritas na forma vetorial assim

$$\mathbf{u} = f(\mathbf{s})\,,$$

em que $\mathbf{s} = (s, t)$ e f têm funções coordenadas f_1, f_2. Então (x, y) e (s, t) estão relacionadas por

$$\begin{aligned} x &= g_1(f_1(s, t), f_2(s, t)) \\ y &= g_2(f_1(s, t), f_2(s, t))\,, \end{aligned}$$

ou

$$\mathbf{x} = g(f(\mathbf{s}))\,.$$

Usando a notação $g \circ f$ para a composta de g e f, podemos também escrever

$$\mathbf{x} = g \circ f(\mathbf{s})\,.$$

Para determinar a derivada $g \circ f$ em termos das derivadas de g e f, suponhamos que $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ é diferenciável em x_0 e que $\mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p$ é diferenciável em $y_0 = f(x_0)$. Então $g'(y_0)$ é uma matriz $p \times m$ e $f'(x_0)$ é uma matriz $m \times n$. Segue-se que, o produto $g'(y_0)f'(x_0)$ está definido e é uma matriz $p \times n$. A regra da cadeia diz que esta matriz produto é a derivada de $g \circ f$ em x_0. Como a multiplicação matricial corresponde a composição de funções lineares, o resultado pode ser enunciado em termos de diferenciais: *a diferencial de uma composta é uma composta de diferenciais.*

Exemplo 11

Consideremos o caso particular em que f é uma função de uma única variável real ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$) e g é real ($g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$). Então $g \circ f$ é uma função real de uma variável real. Já sabemos que se f e g são continuamente diferenciáveis então

$$(g \circ f)'(t) = \nabla g(f(t)) \cdot f'(t) \tag{9}$$

isto é, em termos de funções coordenadas,

$$(g \circ f)'(t) = \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(f(t)), \cdots, \frac{\partial g}{\partial y_m}(f(t))\right) \cdot \left(f_1'(t), \cdots, f_m'(t)\right).$$

O segundo membro desta última equação pode ser escrito como um produto matricial em termos das matrizes derivadas

$$g'(f(t)) = \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(f(t)), \cdots, \frac{\partial g}{\partial y_m}(f(t))\right),$$

e

$$\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ \vdots \\ f_m'(t) \end{bmatrix}$$

como $(g \circ f)'(t) = g'(f(t))f'(t)$. O rpoduto de $g'(f(t))$ e $f'(t)$ é definido pela multiplicação matricial, neste caso $1 \times m$ vezes $m \times 1$, e é equivalente ao produto escalar das duas matrizes encaradas como vetores de $\mathbb{R}^m$. Assim, para o caso em que o domínio de f e a imagem de g são ambos unidimensionais, as fórmulas

$$\nabla g(f(t)) \cdot f'(t) \quad \text{e} \quad g'(f(t))f'(t)$$

são praticamente as mesmas.

O teorema seguinte dá uma extensão para qualquer dimensão do domínio e da imagem de g e f.

Teorema 7 (A Regra da Cadeia)
Seja $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ continuamente diferenciáveis em x, e seja $\mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p$ continuamente diferenciáveis em $f(x)$. Se $g \circ f$ está definida num conjunto aberto que contém x, então $g \circ f$ é continuamente diferenciável em x e

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Demonstração: Precisamos mostrar apenas que a matriz derivada de $g \circ f$ em x_0 tem elementos contínuos dados pelos elementos do produto de $g'(f(x))$ por $f'(x)$. Estas matrizes têm a forma

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(x)) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(f(x)) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial y_1}(f(x)) & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial y_m}(f(x)) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(f(x)) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(f(x)) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(f(x)) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m}(f(x)) \end{bmatrix}$$

O produto das matrizes tem para seu elemento de ordem i a soma dos produtos

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) \tag{10}$$

Mas esta expressão é justamente o produto escalar dos dois vetores $\nabla g_i(f(x))$ e $\partial f/\partial x_j(x)$. Segue-se de (9) que

$$\nabla g_i(f(x)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial g_i \circ f}{\partial x_j}(x)\,, \tag{11}$$

porque estamos derivando em relação a única variável x_j. Mas isto estabelece a relação matricial, porque os elementos $(g \circ f)'(x)$ são por definição dados pelo segundo membro da equação (11). Como g e f são continuamente diferenciáveis a equação (10) representa uma função contínua de x para cada i e j. Portanto, $g \circ f$ é continuamente diferenciável.

■

Exemplo 12

Seja $f(x,y) = \left(x^2+y^2, x^2-y^2\right)$ e seja $g(u,v) = (uv, u+v)$. Encontramos

$$g'(u,v) = \begin{pmatrix} v & u \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$$

Para calcular $(g \circ f)'(2,1)$, notamos que $f(2,1) = (5,3)$ e calculamos

$$g'(5,3) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad f'(2,1) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Então o produto destas duas últimas matrizes dá

$$(g \circ f)'(2,1) = \begin{pmatrix} 32 & -4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

É muito comum no Cálculo denotar uma função pelo mesmo símbolo que o elemento típico da sua imagem. Assim, a derivada de uma função $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ é denotada com freqüência em conjunção, com a equação $y = f(x)$, por dy/dx. Analogamente, as derivadas parciais de uma função $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ são comumente escritas como

$$\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial z}$$

em conjunção com a elucidativa equação $w = f(x, y, z)$. Por exemplo, se $w = xy^2 e^{x+3z}$, então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} &= y^2 e^{x+3z} + xy^2 e^{x+3z}\,;\\
\frac{\partial w}{\partial y} &= 2xye^{x+3z}\,;\\
\frac{\partial w}{\partial z} &= 3xy^2 e^{x+3z}\,.
\end{aligned}$$

Esta notação tem a desvantagem de não conter referência específica à função que está sendo derivada. Por outro lado, ela é conveniente no que diz respeito a notação e é, além do mais, a linguagem tradicional do Cálculo. Para ilustrar a sua conveniência, suponhamos que as funções g e f são dadas por

$$w = g(x, y, z)\,,\ x = f_1(s, t)\,,\ y = f_2(s, t)\,,\ z = f_3(s, t)\,.$$

Então, pela regra da cadeia,

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial s} & \dfrac{\partial w}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix}\,.$$

A multiplicação matricial produz

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\\
\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Obtém-se uma aplicação da regra da cadeia ligeiramente diferente quando o espaço domínio de f é unidimensional, isto é, quando f é uma função de uma variável. Consideremos, por exemplo,

$$w = g(u, v)\,, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}\,.$$

A composta $g \circ f$ é, neste caso, uma função real de uma variável. A sua diferencial é definida pela matriz 1×1 cujo elemento é a derivada

$$\frac{d(g \circ f)}{dt} = \frac{dw}{dt}\,.$$

As derivadas de g e f são definidas, respectivamente, pelas matrizes jacobianas

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial u} & \dfrac{\partial w}{\partial v} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \dfrac{du}{dt} \\ \dfrac{dv}{dt} \end{bmatrix}.$$

Portanto, a regra da cadeia implica que

$$\frac{dw}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial u} & \dfrac{\partial w}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{du}{dt} \\ \dfrac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \frac{\partial w}{\partial u}\,\frac{du}{dt} + \frac{\partial w}{\partial v}\,\frac{dv}{dt}\,. \tag{13}$$

Finalmente, suponhamos que f e g são ambas funções reais de uma variável. Esta é a situação encontrada no Cálculo de uma variável. As derivadas de f em t, de g em $s = f(t)$, e de $g \circ f$ em t são representadas pelas três matrizes jacobianas 1×1, $f'(t)$, $g'(s)$ e $(g \circ f)'(t)$, respectivamente. A regra da cadeia implica que

$$(g \circ f)'(t) = g'(s)f'(t) \tag{14}$$

Se as funções são apresentadas na forma

$$z = g(s) \quad s = f(t)\,,$$

a fórmula (14) mais explícita pode ser escrita como a famosa equação

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\,\frac{ds}{dt} \tag{15}$$

Exemplo 13

Sendo dados

$$\begin{cases} x = u^2 + v^2 \\ y = e^{uv} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} u = t+1 \\ v = e^t \end{cases}\,,$$

calcular dx/dt em $t = 0$.

Solução:

Sejam $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2$ as funções definidas por

$$f(t) = \begin{pmatrix} t+1 \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \qquad -\infty < t < +\infty$$

$$g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 + v^2 \\ e^{uv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} -\infty < u < +\infty \\ -\infty < v < +\infty \end{cases}$$

A diferencial de f em t é definida pela matriz jacobiana 2×1

$$\begin{bmatrix} \dfrac{du}{dt} \\ \dfrac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \end{pmatrix} .$$

A matriz da diferencial de g em $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ é

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ ve^{uv} & ue^{uv} \end{pmatrix} .$$

A dependência de x e y em relação a t é dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (g \circ f)(t) , \quad -\infty < t < +\infty .$$

Portanto, as duas derivadas dx/dt e dy/dt são os elementos da matriz jacobiana que define a diferencial da função composta $g \circ f$. A regra da cadeia implica então que

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{du}{dt} \\ \dfrac{dv}{dt} \end{bmatrix} ,$$

isto é,

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{dv}{dt} = 2u + 2ve^t \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial y}{\partial u}\,\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\,\frac{dv}{dt} = ve^{uv} + ue^{uv+t} \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Se $t = 0$, então

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e obtemos $u = v = 1$. Segue-se que

$$\frac{dx}{dt}(0) = 2 + 3 = 5$$

$$\frac{dy}{dt}(0) = e + e = 2e$$

A definição de multiplicação matricial dá as fórmulas das derivadas que resultam das aplicações da regra da cadeia, um modelo formal que é fácil de memorizar. O modelo está particularmente em evidência, quando as funções coordenadas são denotadas por variáveis reais como nas equaçoes (12), (13), (14) e (15). Todas as fórmulas da forma geral

$$\cdots + \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial t} + \cdots$$

têm a desvantagem, entretanto, de não conterem referências explícitas aos pontos nos quais as várias derivadas são calculadas. É essencial, evidentemente, conhecer esta informação. Ela pode ser encontrada pela fórmula

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)\,.$$

Segue-se que as derivadas que aparecem na matriz $f'(x)$ são calculadas em x e as da matriz $g'(f(x))$ são calculadas em $f(x)$. Esta é a razão para fazer $t = 0$ e $u = v = 1$ na equação (16) para obter aa respostas no exemplo 4.

Exemplo 14

Sejam

$$z = xy \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \end{cases} \,.$$

Suponhamos que, quando $u = 1$ e $v = 2$, temos

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 3, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 5, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 0\,.$$

Suponhamos também que $f(1,2) = 2$ e $g(1,2) = -2$. Qual é o valor de $\partial z/\partial u(1,2)$? A regra da cadeia implica que

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial u} \tag{17}$$

Quando $u = 1$ e $v = 2$, temos $x = f(1,2) = 2$ e $y = g(1,2) = -2$. Portanto,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2,-2) = y\Big|_{x=2,\ y=-2} = -2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(2,-2) = x\Big|_{x=2,\ y=-2} = 2\,.$$

Para obter $\partial z/\partial u$ em $(u,v) = (1,2)$, é necessário saber em que pontos calcular as derivadas parciais que aparecem na equação (17). Com maiores detalhes, a regra da cadeia implica que

$$\frac{\partial z}{\partial u}(1,2) = \frac{\partial z}{\partial x}(2,-2)\,\frac{\partial x}{\partial u}(1,2) + \frac{\partial z}{\partial y}(2,-2)\,\frac{\partial y}{\partial u}(1,2)\,.$$

Portanto,
$$\frac{\partial z}{\partial u}(1,2) = (-2)(-1) + (2)(5) = 12\,.$$

Exemplo 15

Se $w = f\big(ax^2 + bxy + y^2\big)$ e $y = x^2 + x + 1$, calcular $dw/dx(-1)$.

Solução:

A solução se baseia nas fórmulas que resultam da regra da cadeia (tais como (12), (13), (14), (16)). Façamos
$$z = ax^2 + bxy + cy^2\,.$$
Então, $w = f(z)$ e
$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{dy}{dx}\,.$$
Portanto,
$$\frac{dw}{dx} = \frac{df}{dz}\,\frac{dz}{dx} = \frac{df}{dz}\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{dy}{dx}\right) = f'(z)(2ax + by + (bx + 2cy)(2x+1))\,.$$
Se $x = -1$, então $y = 1$, e assim $z = a - b + c$. Portanto,
$$\frac{dw}{dx}(-1) = f'(a-b+c)(-2a + 2b - 2c)\,.$$

A matriz jacobiana ou derivada de uma função f de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ é uma matriz quadrada e, assim, tem determinante. Este determinante, $\det f'(x)$, é uma função real de x denominado determinante jacobiano de f; ele desempenha um papel particularmente importante no teorema da mudança de variável para integrais (estudaremos isso na disciplina Cálculo IV). Nesse ponto observemos um simples corolário da regra da cadeia e da regra do produto de determinantes:

Teorema 8

Se $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$ é diferenciável em x_0 e $\mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $y_0 = f(x_0)$, então o determinante de $g \circ f$ em x_0 é o produto do determinante jacobiano de f em x_0 pelo determinante jacobiano de g em y_0.

Se f é definida por
$$f\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ f_1(x_n,\cdots,x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

então o determinante jacobiano $\det f'$ é denotado com freqüência por

$$\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)},$$

ou equivalentemente

$$\frac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}.$$

Exemplo 16

Seja

$$f\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2-y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$$

Então,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r\big(\underbrace{\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\,\theta}_{=\,1}\big) = r\,.$$

O determinante jacobiano da função composta $g\circ f$ é denotado, neste caso, por $\partial(w,z)/\partial(r,\theta)$.

Se

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0\cos\theta_0 \\ r_0\,\mathrm{sen}\,\theta_0 \end{pmatrix},$$

o teorema (8) implica que

$$\frac{\partial(w,z)}{\partial(r,\theta)}(r_0,\theta_0) = \frac{\partial(w,z)}{\partial(x,y)}(x_0,y_0)\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}(r_0,\theta_0) = 4\big(x_0^2,y_0^2\big)r_0 = 4r_0^2\,.$$

Exercícios Propostos

1. Sendo dadas

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+xy+1 \\ y^2+2 \end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u+v \\ 2u \\ v^2 \end{bmatrix},$$

calcule a matriz diferencial da função composta $g\circ f$ em $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Seja

$$f(t) = \begin{bmatrix} t \\ t+1 \\ t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

e

$$g \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + z^2 \\ x^2 - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

a) Calcule a matriz jacobiana de $g \circ f$ em $t = a$.

b) Calcule du/dt em termos das derivadas de x, y, z, e as derivadas parciais de u.

3. Consideremos a curva definida parametricamente por

$$f(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 - 4 \\ e^{t-2} \end{bmatrix}, \quad -\infty < t < +\infty .$$

Seja g uma função real diferenciável com domínio $\mathbb{R}^3$. Se

$$x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0) = 4\,, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x_0) = 2\,, \quad \frac{\partial g}{\partial z}(x_0) = 2\,,$$

calcule $d(g \circ f)/dt$ em $t = 2$.

4. Consideremos as funções

$$f \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u + v \\ v - v \\ u^2 - v^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

e

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = w\,.$$

a) Calcule a matriz que define a diferencial de $F \circ f$ em $x_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

b) Calcule $\partial w/\partial u$ e $\partial w/\partial v$.

5. Seja $u = f(x, y)$. Faça a mudança de variáveis $z = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$. Sendo dados

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2 + 2xy - y^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = z^2 - 2xy + 2\,,$$

calcule $\partial f/\partial\theta$, quando $r = 2$ e $\theta = \pi/2$.

6. Se $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\operatorname{sen}\theta \\ r \end{bmatrix},$$

calcule $\partial w/\partial r$ e $\partial w/\partial\theta$ usando a regra da cadeia. Confirme o resultado pela substituição direta.

7. A convenção que consiste em denotar as funções coordenadas por variáveis reais tem suas ciladas. Resolva o seguinte paradoxo: Sejam $w = f(x, y, z)$ e $z = g(x, y)$. Pela regra da cadeia

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\,.$$

As quantidades x e y não estão relacionadas, de modo que $\partial y/\partial x = 0$. Evidentemente, $\partial x/\partial x = 1$. Portanto,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

e assim

$$0 = \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\,.$$

Em particular, tomemos $w = 2x + y + 3z$ e $z = 5x + 18$. Então

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 3 \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 5\,.$$

Segue-se que $0 = 15$ o que é evidentemente falso.

8. Se $y = f(x - at) + g(x + at)$ em que a é constante, f e g são duas vezes diferenciáveis, mostre que

$$a^2\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,. \qquad \text{(Equação da onda)}$$

9. Se $z = f(x,y)$ é diferenciável e

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{pmatrix},$$

mostre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 .$$

10. Se $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$ para algum inteiro n, e para todos os x, y e t, mostre que

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x,y)\,.$$

11. Consideremos uma função real $f(x,y)$ tal que

$f_x(2,1) = 3\,,\ f_y(2,1) = -2\,,\ f_{xx}(2,1) = 0\,,\ f_{xy}(2,1) = f_{yx}(2,1) = 1\,,\ f_{yy}(2,1) = 2\,.$

Seja $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2$ definida por

$$g(u,v) = (u+v, uv)\,.$$

Calcule $\partial^2(f\circ g)/\partial v\partial u$ em $(1,1)$.

12. Calcule os determinantes jacobianos das seguintes funções nos pontos indicados:

a) $f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2+2uv+3v \\ u-v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, em $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) $g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2-y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ w \end{pmatrix}$, em $x_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$.

c) $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, em um $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ arbitrário.

d) Uma transformação $\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^n$, $A(x) = L(x) + y_0$, em um x_0 arbitrário.

e) $T\begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \\ r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \\ r\cos\phi \end{pmatrix}$ em $\begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix}$.

13. Usando as funções f e g dos exercícios 12(a) 12(b), calcule o determinante jacobiano da função composta $g\circ f$ em $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.