Conteúdo

Aula 25 – Teorema da Função Inversa

Introdução

Nesta aula estudaremos um dos teoremas mais importantes do Cálculo: o Teorema da Função Inversa. Já vimos uma versão deste teorema para funções de uma variável na disciplina de Cálculo I. Estudaremos agora o caso geral deste teorema, quer dizer, estudaremos (com certas adaptações) este resultado para funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Função Inversa

Se imaginarmos que uma função associa vetores x a vetores y da imagem de f, então é natural começar com y e perguntar que vetor ou vetores x são levados por f em y. Mais precisamente, podemos perguntar se existe uma função que inverte a ação de f. Se existir uma função f^{-1} com a propriedade

$$f^{-1}(y) = \mathrm{x} \ \text{ se, e somente se, } \ f(\mathrm{x}) = \mathrm{y}\,,$$

então f^{-1} é denominada **função inversa** de f. Segue-se que o domínio de f^{-1} é a imagem de f e que a imagem de f^{-1} é o domínio de f. Alguns exemplos conhecidos de funções e suas inversas são:

$$\begin{cases} f(x) = x^2\,, & x \geq 0 \\ f^{-1}(y) = \sqrt{y}\,, & y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = e^x\,, & -\infty < x < +\infty \\ f^{-1}(y) = \ln y\,, & y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \operatorname{sen} x\,, & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ f^{-1}(y) = \operatorname{arcsen} y\,, & -1 < y < 1 \end{cases}$$

A função inversa f^{-1} não deve ser confundida com a recíproca $1/f$. Por exemplo, se $f(x) = x^2$, então $f^{-1}(2) = \sqrt{2}$, enquanto que $\big(f(2)\big)^{-1} = 1/f(2) = 1/4$.

Antes de prosseguirmos, recordemos alguns pontos importantes. Uma função é injetiva se cada elemento da imagem é a imagem de precisamente um elemento do domínio. Como conseqüência imediata temos que uma função f tem uma inversa se, e somente se, f é injetiva. Outro fato bem conhecido da Álgebra Linear é que a função inversa L^{-1} de toda função linear invertível $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é linear.

Com efeito, usando a linearidade de f, é fácil ver que

$$\begin{aligned} L^{-1}(ay_1 + by_2) &= L^{-1}(aL(x_1) + bL(x_2)) \\ &= L^{-1}(L(ax_1 + bx_2)) \\ &= I(ax_1 + bx_2) \\ &= ax_1 + bx_2 \\ &= aL^{-1}(y_1) + bL^{-1}(y_2) \end{aligned}$$

quando $y_1 = L(x_1)$ e $y_2 = L(x_2)$ estão na imagem de L. Se a dimensão de $\mathbb{R}^n$ é menor do que a de $\mathbb{R}^m$, a imagem de L é um subspaço próprio de $\mathbb{R}^m$. Neste caso, L^{-1} não é definida em todo o $\mathbb{R}^m$. Por outro lado, se $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ têm a mesma dimensão, o domínio de L^{-1} é todo o $\mathbb{R}^m$. Assim, a função inversa de toda função linear injetiva $\mathbb{R}^n \xrightarrow{L} \mathbb{R}^n$ é uma função linear $\mathbb{R}^n \xrightarrow{L^{-1}} \mathbb{R}^n$.

Exemplo 1

Consideremos a função afim $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{A} \mathbb{R}^3$ definida por

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-1 \\ y-0 \\ z-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

É óbvio que qualquer função afim $A(x) = L(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) + \mathrm{y}_0$ é injetiva se, e somente se, a função linear L também é injetiva. Neste exemplo

$$\mathrm{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$L(\mathrm{x}) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

A matriz inversa de

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

é a matriz

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Segue-se que L, e portanto A, tem uma inversa. De fato, Se $A(\mathrm{x}) = \mathrm{y}$, então

$$A(\mathrm{x}) = L(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) + \mathrm{y}_0$$

e

$$A^{-1}(\mathrm{y}) = L^{-1}(\mathrm{y} - \mathrm{y}_0) + \mathrm{x}_0\,. \tag{1}$$

Que esta é a expressão correta para A^{-1} pode ser verificada substituindo-se y por $A(\mathrm{x})$. Com efeito, observe que

$$A^{-1}(A(\mathrm{x})) = L^{-1}(L(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0)) + \mathrm{x}_0 = \mathrm{x}$$

como queríamos mostrar.

Assim, temos que a inversa A^{-1} fica determinada pela expressão a seguir:

$$A^{-1}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u-1 \\ v-5 \\ w-2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Obviamente este método permitirá calcular a inversa de qualquer transformação afim $\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^n$ se existir.

Temos o seguinte critério para verificar se uma função linear $\mathbb{R}^n \xrightarrow{L} \mathbb{R}^m$ tem uma inversa. Se M é a matriz de L, então pelo Teorema 9, as colunas de M são vetores $L(e_j)$ e assim geram a imagem de L. Portanto, L é injetiva, e tem uma inversa se, e somente se, as colunas de M são linearmente independentes. De outra maneira, se M é uma matriz quadrada, então L tem uma inversa se, e somente se, a matriz inversa M^{-1} existe. Recordemos que M^{-1} existe se, e somente se, $\det M \neq 0$.

O principal propósito desta seção é o estudo das inversas de funções vetoriais não lineares. Dada uma função $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$ podemos perguntar: (1) Ela tem uma inversa? e (2) Se tiver, quais são as suas propriedades? Em geral não é fácil responder a estas perguntas examinando apenas a função. Por outro lado, sabemos como dizer se uma transformação afim tem uma inversa ou não e ainda como calculá-la explicitamente quando ela existe. Além do mais, se f é diferenciável num ponto x_0 ela pode ser aproximada numa vizinhança deste ponto por uma trnsformação afim A. Por esta razão, poder-se-ia conjecturar que, se o domínio de f for restrito aos pontos próximos de x_0, então f terá uma inversa, se A tiver. Além disso, poder-se-ia pensar que A^{-1} é a transformação afim que aproxima f^{-1} numa vizinhança de $f(\mathrm{x}_0)$. Exceto pelos detalhes, estas afirmações estão corretas e constituem o teorema da função inversa.

Teorema 1 (Teorema da Função Inversa)
Seja $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$ uma função continuamente diferenciável tal que $f'(\mathrm{x}_0)$ tem uma inversa. Então existe um conjunto aberto N, contendo x_0 tal que f quando restrita a N tem uma inversa continuamente diferenciável f^{-1}. O conjunto imagem $f(N)$ é aberto. Além disso,

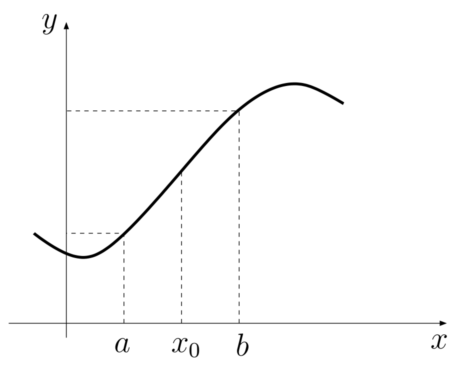
$$[f^{-1}](\mathrm{y}_0) = [f'(\mathrm{x}_0)]^{-1}$$

em que $\mathrm{y}_0 = f(\mathrm{x}_0)$, isto é, a diferencial da função inversa em y_0 é a inversa da diferencial de f em x_0.

A demonstração da existência de f^{-1} pode ser encontrada no texto de Williamson & Trotter (esta leitura é opcional). Uma vez estabelecida a existência, podemos escrever $f^{-1} \circ f = I$, em que $\mathbb{R}^n \xrightarrow{I} \mathbb{R}^n$ é a transformação identidade na vizinhança N. Como a diferencial da transformação identidade é ela própria, temos, pela regra da cadeia, que:

$$[f^{-1}]'(\mathrm{y}_0)f'(\mathrm{x}_0) = I \quad \text{ou} \quad [f^{-1}]'(\mathrm{y}_0) = [f'(\mathrm{x}_0)]^{-1}\,.$$

Para funções reais de uma variável, a existência de uma função inversa não é difícil de demonstrar. Suponhamos que $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ satisfaça a condição de diferenciabilidade do teorema e suponhamos que $f'(x_0)$ tem uma matriz inversa. Como a matriz inversa existe quando $f'(x_0) \neq 0$, o significado geométrico da condição de que $f'(x_0)$ tem uma inversa é o de que o gráfico de f não deve ter uma tangente horizontal. Para ser específico, suponhamos que $f'(x_0) > 0$. Como f' é contínua, temos $f'(x) > 0$ para todo x em algum intervalo $a < x < b$ que contám x_0, como ilustra a figura a seguir.



Afirmamos que f restrita a este intervalo é injetiva. Pois suponhamos que x_1 e x_2 são dois pontos quaisquer do intervalo tais que $x_1 < x_2$. Pelo teorema do valor médio segue-se que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)\,,$$

para algum c do intervalo $x_1 < x < x_2$. Como $f'(c) > 0$ e $x_2 - x_1 > 0$, obtemos

$$f(x_2) - f(x_1) > 0\,.$$

Portanto, f é estritamente crescente no intervalo $a < x < b$, e a nossa afirmação está demostrada. Segue-se que f restrito a este intervalo tem uma inversa. As outras conclusões do teorema da função inversa podem também ser obtidas de modo imediato para este caso especial.

Exemplo 2

Consideremos a função f definida por

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 - 2xy^2 \\ x + y \end{pmatrix}\,, \quad \begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ -\infty < y < +\infty \end{cases}\,.$$

No ponto

$$\mathrm{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a diferencial $d_{\mathrm{x}_0} f$ é definida pela matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} 3x^2 - 2y^2 & -4xy \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{x=1\,,\; y=-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

A inversa desta matriz é

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 4/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}\,.$$

Como f é obviamente diferenciável, concluímos pelo teorema da função inversa que em um conjunto aberto contendo x_0 a função f tem uma inversa f^{-1}. Além disso, se

$$\mathrm{y}_0 = f(\mathrm{x}_0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\,,$$

a matriz da diferencial $d_{\mathrm{y}_0} f^{-1}$ é

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 4/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}\,.$$

Embora possa ser difícil calcular f^{-1} explicitamente, é fácil escrever a transformação afim que aproxima f^{-1} na vizinhança do ponto y_0. É a inversa A^{-1} da transformação afim A que aproxima f numa vizinhança de x_0. Temos, ou pelo teorema da função inversa ou pela fórmula (1) do exemplo 24,

$$\begin{aligned} A(\mathrm{x}) &= f(\mathrm{x}_0) + f'(\mathrm{x}_0)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) \\ &= \mathrm{y}_0 + f'(\mathrm{x}_0)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) \\ A^{-1}(\mathrm{y}) &= f^{-1}(\mathrm{y}_0) + [f^{-1}]'(\mathrm{y}_0)(\mathrm{y} - \mathrm{y}_0) \\ &= \mathrm{x}_0 + [f'(\mathrm{x}_0)]^{-1}(\mathrm{y} - \mathrm{y}_0)\,. \end{aligned}$$

Donde, se fizermos $y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, teremos

$$A^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/3 & 4/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u+1 \\ v-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3

As equações

$$u = x^4 y + x \quad \text{e} \quad v = x + y^3$$

definem uma transformação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$. A matriz diferencial da transformação em $(x, y) = (1, 1)$ é

$$\begin{pmatrix} 4x^3y + 1 & x^4 \\ 1 & 3y^2 \end{pmatrix}_{(x,y)=(1,1)} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Como as colunas desta matriz são independentes, a diferencial tem uma inversa, e conforme o teorema da função inversa a transformação também tem uma inversa numa vizinhança aberta de $(x, y) = (1, 1)$. A transformação inversa deve ser dada por equações da forma

$$x = F(u, v) \quad \text{e} \quad y = G(u, v)\,.$$

O cálculo efetivo de F e G é difícil, mas podemos facilmente calcular as derivadas parciais de F e de G em relação a u e v no ponto $(u, v) = (2, 2)$ que corresponde a $(x, y) = (1, 1)$. Estas derivadas parciais ocorrem na matriz jacobiana de F e de G ou, equivalentemente, na matriz inversa da diferencial das funções dadas. Temos então:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u}(2,2) & \dfrac{\partial F}{\partial v}(2,2) \\ \dfrac{\partial G}{\partial u}(2,2) & \dfrac{\partial G}{\partial v}(2,2) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3/14 & -1/14 \\ -1/14 & 5/14 \end{bmatrix}.$$

Suponhamos que $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$ seja uma função para a qual as hipóteses do teorema da função inversa são satisfeitas num ponto x_0. É importante compreender que o teorema não resolve a questão da existência de uma inversa para toda a função f, mas apenas para f restrita a um conjunto aberto contendo x_0. Por exemplo, a transformação

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u \operatorname{sen} v \end{pmatrix}, \quad u > 0\,,$$

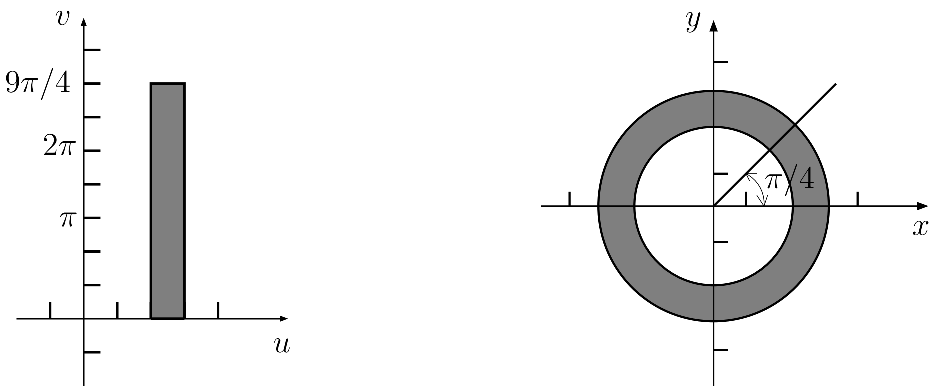
tem matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} \cos v & -u \operatorname{sen} v \\ \operatorname{sen} v & u\cos v \end{pmatrix}$$

com matriz inversa

$$\begin{bmatrix} \cos v & \operatorname{sen} v \\ -\dfrac{1}{u}\operatorname{sen} v & \dfrac{1}{u}\cos v \end{bmatrix}.$$

A matriz inversa existe para todo (u, v) satisfazendo $u > 0$. Entretanto, se não tomamos uma restrição conveniente, a transformação pode não ter inversa, pois obtém-se o mesmo ponto imagem, quando v aumenta de 2π. Veja as duas regiões na figura a seguir. Se a transformação for restringida de modo que, por exemplo, $0 < v < 2\pi$, então ela torna-se injetiva e tem uma inversa.



Exercícios Propostos

1. Calcule A^{-1} para as seguintes funções afins:

a) $A(x) = 7x + 2$

b) $A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u-1 \\ v-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2. Seja
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

a) Mostre que, para todo ponto x_0, exceto $\mathrm{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a restrição de f a algum conjunto aberto contendo x_0 tem uma inversa.

b) Mostre que, se não restringirmos o domínio, f não tem inversa.

c) Se f^{-1} é a inversa de f numa vizinhança do ponto $\mathrm{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, calcule a transformação afim que aproxima f^{-1} numa vizinhança de
$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

3. Determine a função afim que melhor aproxima a inversa da função
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 2xy + y^2 \\ x^2 + y \end{pmatrix}$$
numa vizinhança do ponto $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Observe que deve ser difícil calcular a inversa.

4. a) Seja T definida por
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} r > 0 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}.$$
Calcule $T'(\mathrm{u})$ e a sua inversa para os pontos
$$\mathrm{u} = \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}$$
para os quais elas existem.

b) Seja S definida por
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta \\ r\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ r\cos\phi \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} r > 0 \\ 0 < \phi < \pi/2 0 < \theta < 2\pi \end{cases}.$$
Calcule $S'(\mathrm{u})$ e a sua inversa para os pontos
$$\mathrm{u} = \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix}$$
para os quais elas existem.

c) Calcule uma representação explícita para S^{-1}.

5. Suponhamos que a função T definida por

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

tem uma função inversa diferenciável S definida por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(u,v) \\ k(u,v) \end{pmatrix}.$$

Se $f(1,2) = 3$, $g(1,2) = 1$ e $T'(1,2)$ é igual a $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, calcule $\dfrac{\partial h}{\partial v}(3,4)$.

6. Se

$$\begin{cases} x = u + v + w \\ y = u^2 + v^2 + w^2 \\ z = u^3 + v^3 + w^3 \end{cases}$$

calcule $\partial v/\partial y$ na imagem de $(u, r, w) = (1, 2, -1)$ a saber, $(x, y, z) = (2, 6, 8)$.

7. Seja

$$f \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 + u^2 v + 10w \\ u + v^3 \end{pmatrix}.$$

a) Mostre que f tem uma inversa f^{-1} na vizinhança do ponto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Calcule um valor aproximado de

$$f^{-1} \begin{pmatrix} 11,8 \\ 2,2 \end{pmatrix}.$$

8. A função

$$f(t) = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix}$$

tem uma inversa?