uff - Departamento de Matemática Aplicada (GMA)

Matemática Básica I
Notas de aula - versão 3
2011-1

Marlene Dieguez Fernandez

Observações preliminares

- A disciplina Matemática Básica I é oferecida no mesmo período da disciplina Cálculo I-A. e o conteúdo de Matemática Básica I é pré-requisito Cálculo I-A.
- As listas de exercícios para os alunos praticarem o conteúdo de cada tópico serão distribuídas separadamente.

Sumário

Parte I
Noções de lógica

1 Introdução

Porque estudar noções de lógica?

Se um problema foi resolvido, é claro que a lógica foi usada para resolvê-lo, mas sem o conhecimento de várias informações sobre o problema, de nada adiantaria simplesmente usar a lógica, não poderíamos ter encontrado a solução. Na verdade, a lógica funciona fazendo a ligação ou conexão entre várias informações para poder concluir novas informações.

O que pretendemos nesse início de curso é formalizar alguns procedimentos lógicos ou itens da lógica, de forma que se criarmos o hábito de aplicar esses procedimentos lógicos, com certeza não chegaremos a conclusões erradas, tão comuns. Além disso, tendo o claro conhecimento de quais são esses procedimentos lógicos, sempre poderemos recorrer a eles para encontrar a solução ou as possíveis soluções ou concluir que um problema não tem solução, bem como compreender ou demonstrar teoremas.

A principal aplicação da lógica que vamos ver nesse curso será na resolução de equações e inequações.

Conjuntos numéricos

Faremos referência aos seguintes conjuntos numéricos:

- Conjunto dos números naturais, denotado por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$

  Provavelmente você está surpreso com o fato do número zero não fazer parte desse conjunto. Aqui cabe uma observação de carater geral: uma das mais importantes características da Matemática é ser uma linguagem universal, por isso, usamos tantos símbolos e conceitos. Se, na internet você usar um buscador para encontrar $<$ números naturais $>$ ficará surpreso com a quantidade de sites de discussão se o zero é ou não um número natural. Na verdade, estamos diante de um conceito matemático não universal, considerar ou não o zero um número natural tem consequências, precisamos fazer uma escolha ou convenção. É claro que o número 0 é importante, por isso está incluído nos inteiros. Quando 0 é convencionado natural, sempre que uma afirmação não for verdadeira para $n = 0$ será preciso dizer que n é natural, $n > 0$. Quando um texto (livro, notas de aula, artigo, etc) fizer referência aos números naturais, procure em algum lugar no texto qual a convenção usada para os naturais, em geral fica no início, como estamos fazendo aqui.
- Conjunto dos números inteiros, denotado por $\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$.
- Conjunto dos números racionais, denotado por $\mathbb{Q}$
- Conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$
- Conjunto dos números complexos, denotado por $\mathbb{C}$

Por enquanto, vamos admitir que se apresentamos um número, sabemos dizer se esse número pertence ou não pertence a cada um desses conjuntos. Exemplos,

1. $10 \in \mathbb{N}$; $10 \in \mathbb{Z}$; $10 \in \mathbb{Q}$; $10 \in \mathbb{R}$; $10 \in \mathbb{C}$
2. $-10 \notin \mathbb{N}$; $-10 \in \mathbb{Z}$; $-10 \in \mathbb{Q}$; $-10 \in \mathbb{R}$; $-10 \in \mathbb{C}$
3. $\frac{2}{5} \notin \mathbb{N}$; $\frac{2}{5} \notin \mathbb{Z}$; $\frac{2}{5} \in \mathbb{Q}$; $\frac{2}{5} \in \mathbb{R}$; $\frac{2}{5} \in \mathbb{C}$
4. $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$; $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$; $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$; $\sqrt{2} \in \mathbb{C}$
5. $\sqrt{-2} \notin \mathbb{N}$; $\sqrt{-2} \notin \mathbb{Z}$; $\sqrt{-2} \notin \mathbb{Q}$; $\sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$; $\sqrt{-2} \in \mathbb{C}$

2 Afirmação ou sentença lógica

Uma afirmação pode ser considerada uma afirmação ou sentença lógica quando for possível atribuir um e só um dos dois valores a essa afirmação: verdadeiro ou falso.

Observações

- Algumas afirmações não são consideradas afirmações lógicas. Por exemplo, "maçã é uma fruta sem graça" tem muita subjetividade, uns vão responder que é verdadeira, outros vão responder que é falsa por causa do "sem graça". Logo essa não é uma afirmação lógica.

  Se a afirmação fosse apenas "maçã é uma fruta", todos iriam responder que é verdadeira. Logo essa é uma afirmação lógica.

  Se a afirmação fosse "maçã é um legume", todos iriam responder que é falso. Logo essa é uma afirmação lógica.

- Uma afirmação lógica pode ter um termo variável ou indeterminado, por exemplo ″x é um número real″ . Dependendo do valor que se atribua à letra x podemos responder se a sentença é verdadeira ou falsa. Neste caso, diz-se que é ***uma afirmação aberta ou sentença lógica aberta***.

- Caso não exista termo variável ou indeterminado na afirmação, dizemos que é uma ***afirmação fechada ou sentença lógica fechada***. Por exemplo, ″o número 10.000 é uma potência de 10″ é uma afirmação lógica fechada e é verdadeira. ″o número 300 é divisível por 10.000″ é uma afirmação lógica fechada e é falsa.

- É bastante comum usar a palavra ***proposição*** em vez de *afirmação*. Assim, podemos substituir a palavra afirmação pela palavra proposição em tudo que foi dito acima. Ora vamos usar uma, ora outra.

- Quando é pedido "***verificar que*** uma afirmação ou proposição é verdadeira", já está dito que é verdadeira, é só para provar que é verdadeira. Por exemplo, ″Verifique que 2437 é um número primo″, já está dizendo que é verdadeiro que o número 2437 é primo, está sendo pedido para provar que é um número primo.

  Quando é pedido "***verificar se*** uma afirmação ou proposição é verdadeira", não está dito que é verdadeira, a resposta pode ser uma das duas, verdadeira ou falsa. ″Verifique se 4693 é um número primo″, não está afirmando que é verdaderio, nem que é falso, é preciso descobrir, a resposta poderá ser verdadeira ou falsa.

- Muitas afirmações são da forma: "suponha que x possui a propriedade $\mathcal{P}$". Neste caso a única possibilidade é x possuir a propriedade $\mathcal{P}$ ser verdadeiro, isto é, no lugar de x, só podemos atribuir um valor que possui a propriedade P. Por exemplo, ″suponha x um número inteiro maior que 10″.

- Por simplicidade, podemos atribuir letras a uma afirmação, por exemplo ″p: suponha x um número inteiro maior que 10″.

- Uma afirmação pode ser uma a***firmação ou sentença simples***, isto é, com uma única sentença, bem como pode ser uma ***afirmação ou sentença composta***, isto é, formada por várias afirmações, todas ligadas entre si por termos com significado lógico bem definido, chamados conectivos lógicos. Veremos alguns desses conectivos com detalhes nas próximas seções.

3 O operador lógico ″não″ e os conectivos lógicos ″e″ ″ou″

3.1 O operador ″não″

A toda afirmação ″p″ corresponde uma afirmação ″não p″ e denotamos ″$\sim p$″.

Observação:

- Quando p é verdadeira, $\sim p$ é falsa.

- Quando p é falsa, $\sim p$ é verdadeira.

Exemplos

1. $p: -2$ é um número inteiro (p é verdadeira) não $p: -2$ não é um número inteiro (não p é falsa)
2. $q: 10$ é múltiplo de 3 (q é falsa) não $q: 10$ não é múltiplo de 3 (não q é verdadeira)
3. $r: -\frac{38}{10}$ está entre -4 e -3 (r é verdadeira) $\sim r: -\frac{38}{10}$ não está entre -4 e -3 ($\sim r$ é falsa)
4. $p: x$ é um número maior do que zero $\sim p: x$ não é um número maior do que zero
5. $p: x$ é solução da equação $2x-1=4$ não $p: x$ não é solução da equação $2x-1=4$
6. $p: \{x \in \mathbb{R};\ 2x-1=4\} = \left\{\frac{5}{2}\right\}$ (a igualdade entre os conjuntos é verdadeira)

   não $p: \{x \in \mathbb{R};\ 2x-1=4\} \neq \left\{\frac{5}{2}\right\}$ (a desigualdade entre os conjuntos é falsa)

3.2 O conectivo ″e″

Dadas duas afirmações ″p″ e ″q″, podemos formar uma afirmação composta ″p e q″ tal que

″p e q″ tem como única possibilidade de ser verdadeira quando ″p″ é verdadeira e ″q″ é verdadeira.

Uma outra notação usual é ″$p \wedge q$″. Usaremos indistintamente uma das duas: ″p e q″ ou ″$p \wedge q$″.

Exemplos

1. p : 20 é par (V) q : 20 é maior do que 10 (V) p e q: 20 é par e maior do que 10 (V)
2. p : 20 é par (V) q : 20 é menor do que 10 (F) p e q: 20 é par e menor do que 10 (F)
3. p : 20 é ímpar (F) q : 20 é maior do que 10 (V) p e q: 20 é ímpar e maior do que 10 (F)
4. p : 20 é ímpar (F) q : 20 é menor do que 10 (F) $p \wedge q$: 20 é par e menor do que 10 (F)
5. p : se x é par é V q : se x é maior do que 10 é V p e q: x é par e maior do que 10 é V
6. p : $x \in A$ (V) q : $x \in B$ (V) $p \wedge q$: $x \in A$ e $x \in B$ (V)
7. p : $x \in A$ (V) q : $x \in B$ (V) $\sim q$: $x \notin B$ (F) $p \wedge \sim q$: $x \in A$ e $x \notin B$ (F)
8. p : $x \in A$ (V) $\sim p$: $x \notin A$ (F) q : $x \in B$ (V) $\sim p \wedge q$: $x \notin A$ e $x \in B$ (F)
9. p : $x \in A$ (V) $\sim p$: $x \notin A$ (F) q : $x \in B$ (V) $\sim q$: $x \in B$ (F) $\sim p \wedge \sim q$: $x \notin A$ e $x \notin B$ (F)

Obs. As afirmações dos exemplos 1 a 4 são fechadas e as dos exemplos 5 a 9 são abertas.

3.3 O conectivo ″ou″

Dadas duas afirmações ″p″ e ″q″, podemos formar uma afirmação composta ″p ou q″ tal que

″p ou q″ é verdadeira quando pelo menos uma das afirmações ″p″ ou ″q″ é verdadeira.

Uma outra notação usual é ″$p \vee q$″. Usaremos indistintamente uma das duas: ″p ou q″ ou ″$p \vee q$″.

Observação:
O ″ou″ lógico tem o mesmo significado do ″e/ou″ da nossa linguagem corrente.
Na linguagem corrente, apenas ″ou″ muitas vezes significa um ou outro, não os dois simultâneamente. Por exemplo, ″o documento deverá ser assinado pelo diretor ou pelo sub-diretor″. Em lógica e em matemática, este ″ou″ é dito ″ou exclusivo″ e sempre que for usado, será explicitado que é o ″ou″ exclusivo.

Se não estiver explicitado, subentende-se que é o ″ou″ não exclusivo definido acima.

Exemplos

1. p : 20 é par (V) q : 20 é negativo (F) ″$p \vee q$″: 20 é par ou negativo (V)
2. p : 20 é ímpar (F) q : 20 é positivo (V) ″$p \vee q$″: 20 é ímpar ou positivo (V)
3. p : 20 é par (V) q : 20 é positivo (V) ″$p \vee q$″: 20 é par ou positivo (V)
4. p : 20 é ímpar (F) q : 20 é negativo (F) ″$p \vee q$″: 20 é ímpar ou negativo (F)
5. p : o carro avançou sinal (V) q : o carro derrapou (V) ″$p \vee q$″: o carro avançou sinal ou derrapou (V)
6. p : o carro avançou sinal (V) q : o carro derrapou (F) ″$p \vee q$″: o carro avançou sinal ou derrapou (V)
7. p : o carro avançou sinal (F) q : o carro derrapou (V) ″$p \vee q$″: o carro avançou sinal ou derrapou (V)
8. p : o carro avançou sinal (F) q : o carro derrapou (F) ″$p \vee q$″: o carro avançou sinal ou derrapou (F)

3.4 Negações de ″e″ e de ″ou″: Leis de De Morgan

Dadas as afirmações p e q, são válidas as seguintes leis:

(I) $\sim (p \ \texttt{e} \ q)$ tem o mesmo significado de $(\sim p \ \ \texttt{ou} \ \ \sim q)$

(II) $\sim (p \ \texttt{ou} \ q)$ tem o mesmo significado de $(\sim p \ \ \texttt{e} \ \ \sim q)$

Para verificar (I), basta construir as quatro possiblidades para p e q e verificar que em qualquer dos casos os resultados que aparecem na 6a. e 7a. coluna abaixo são iguais.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(p \ \texttt{e} \ q)$	$\sim (p \ \texttt{e} \ q)$	$(\sim p \ \texttt{ou} \ \sim q)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

Para verificar (II), basta construir as quatro possiblidades para p e q e verificar que em qualquer dos casos os resultados que aparecem na 6a. e 7a. coluna abaixo são iguais.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(p \ \texttt{ou} \ q)$	$\sim (p \ \texttt{ou} \ q)$	$(\sim p \ \texttt{e} \ \sim q)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

Exemplos

1. $(p \ \texttt{e} \ q)$: x é par e positivo $\quad\sim (p \ \texttt{e} \ q)$: x não é par ou x não é positivo
2. $(p \ \texttt{ou} \ q)$: n é múltiplo de 2 ou de 5 $\quad\sim (p \ \texttt{ou} \ q)$: n não é múltiplo de 2 e não é múltiplo de 5
3. $(p \ \texttt{e} \ q)$: 36 é múltiplo de 3 e de 2 (V) $\quad\sim (p \ \texttt{e} \ q)$: 36 não é múltiplo de 3 ou não é múltiplo de 2 (F)
4. $(p \ \texttt{e} \ q)$: 32 é múltiplo de 2 e de 5 (F) $\quad\sim (p \ \texttt{e} \ q)$: 32 não é múltiplo de 2 ou não é múltiplo de 5 (V)
5. $(p \ \texttt{e} \ q)$: $3 \in A \ \texttt{e} \ 4 \in A$ $\quad\sim (p \ \texttt{e} \ q)$: $3 \notin A \ \texttt{ou} \ 4 \notin A$
6. $(p \ \texttt{ou} \ q)$: $8 \in B \ \texttt{ou} \ 10 \in B$ $\quad\sim (p \ \texttt{ou} \ q)$: $8 \notin B \ \texttt{e} \ 10 \notin B$

3.5 Propriedades distributivas com ″e″ ″ou″

Dadas as afirmações p, q e r, são válidas as seguintes propriedades:

(I) p e $(q$ ou $r) = (p$ e $q)$ ou $(p$ e $r)$ (Nesse caso, pense em ″e″ como $\times$ e em ″ou″ como $+$)

(II) p ou $(q$ e $r) = (p$ ou $q)$ e $(p$ ou $r)$ (Nesse caso, pense em ″ou″ como $\times$ e em ″e″ como $+$)

Para verificar que a propriedade **(I)** é verdadeira, basta construir a tabela com todas as possibilidades de p, q e r e verificar que o resultado dos dois lados da igualdade é o mesmo em qualquer caso, como descrito a seguir.

(p)	(q)	(r)	$(q$ ou $r)$	$(p \ \texttt{e} \ q)$	$(p \ \texttt{e} \ r)$	$(p \ \texttt{e} \ (q$ ou $r))$	$((p \ \texttt{e} \ q)$ ou $(p \ \texttt{e} \ r))$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Exercício: verifique que a propriedade **(II)** é válida.

4 Quantificadores

4.1 O quantificador universal: $'' \forall ''$

Quando queremos nos referir a todos os elementos de um conjunto A, dizemos:

para todo $x \in A$, usamos o símbolo $\forall x \in A$.

Outras formas de escrever, com mesmo significado: para qualquer $x \in A$, para qualquer que seja $x \in A$.

Exemplos

1. $\sqrt{x} \geq 0 \quad \forall x; \quad x \in \mathbb{R}$ e $x \geq 0$
2. Considere $A =$ conjunto dos múltiplos de 10. Podemos verificar que: $\forall x \in A$, x é par.

4.2 O quantificador existencial: $'' \exists ''$

Quando queremos nos referir a alguns dos elementos de um conjunto A, dizemos:

para algum $x \in A$, ou existe $x \in A$, usamos o símbolo $\exists x \in A$.

Obs. $''$existe$''$ quer dizer $''$existe pelo menos um$''$.

Exemplos de afirmações verdadeiras:

1. $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $\sqrt{x} > 3$. Neste caso existe uma infinidade de valores de $x \in \mathbb{R}$, mas não são todos.
2. $\exists x \in \mathbb{Q}$ tal que $5x = 1$. Neste caso existe apenas um valor de $x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{1}{5}$.
3. $x^2 = 9$ para algum $x \in \mathbb{R}$, ou, escrevendo de outra forma, $\exists x \in \mathbb{R}; \ x^2 = 9$.
   Neste caso existem dois valores de $x \in \mathbb{R}$, são: $x = +\sqrt{9} = +3$ ou $x = -\sqrt{9} = -3$.
4. Dada uma constante $a \in \mathbb{R}; \ a \geq 0$, podemos afirmar que $\exists x \in \mathbb{R}; \ x^2 = a$.
   No caso $a = 0$ existe um valor de $x \in \mathbb{R}$ que é $x = 0$
   No caso $a > 0$, existem dois valores de $x \in \mathbb{R}$, são: $x = +\sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$.

Exemplos de afirmações falsas:

1. $\exists\ n \in \mathbb{N}$ tal que $2n < 1$. Lembre que estamos consideramos $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
2. $\exists\ x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 < 0$.

Observação: a seguir temos várias formas alternativas de escrever afirmações, todas com mesmo significado.

- A propriedade $\mathcal{P}$ é válida para algum $x \in A$.
- A propriedade $\mathcal{P}$ é válida para pelo menos um $x \in A$.
- Para algum $x \in A$, x possui a propriedade $\mathcal{P}$.
- Para pelo menos um $x \in A$, x possui a propriedade $\mathcal{P}$.
- Existe $x \in A$ tal que x possui a propriedade $\mathcal{P}$ ($''$ tal que $''$ pode ser substituído por $''$; $''$).
- Existe pelo menos um $x \in A$; x possui a propriedade $\mathcal{P}$.
- Existe algum $x \in A$; x possui a propriedade $\mathcal{P}$.
- $\exists x \in A$; x possui a propriedade $\mathcal{P}$.

Por exemplo, quando $A = \mathbb{N}$ e a proprieddade $\mathcal{P}$ é $10 < x < 15$, podemos escrever:

- $10 < x < 15$ é válida para algum $x \in \mathbb{N}$.

- $10 < x < 15$ é válida para pelo menos um $x \in \mathbb{N}$.
- Para algum $x \in \mathbb{N}$, $10 < x < 15$.
- Para pelo menos um $x \in \mathbb{N}$, $10 < x < 15$.
- Existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $10 < x < 15$ (″ tal que ″ pode ser substituído por ″ ; ″).
- Existe pelo menos um $x \in \mathbb{N}$; $10 < x < 15$.
- Existe algum $x \in \mathbb{N}$; $10 < x < 15$.
- $\exists x \in \mathbb{N}$; $10 < x < 15$.

4.3 As negações de ″$\exists$″ e de ″$\forall$″

4.3.1 A negação do quantificador universal

Dada a afirmação $p: \ \forall x;$ x possui a propriedade $\mathcal{P}$

a negação de p é $\sim p:$ nem todo x é tal que x possui a propriedade $\mathcal{P}$

Mas, outra forma de negar p é usando o quantificador existencial:

$\sim p: \ \exists x;$ x não possui a propriedade $\mathcal{P}$

Exemplos:

1. $p: \ x^2 \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ (V) $\qquad \sim p: \ \exists x \in \mathbb{R}; \ x^2 < 0$ (F)
2. $p: \ x \geq 1 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ (F) $\qquad \sim p: \ \exists x \in \mathbb{R}; \ x < 1$ (V)
3. $p: \ \forall a$ constante real, $x^2 = a^2$ admite solução real (V)
   $\sim p: \ \exists a$ constante real: $x^2 = a^2$ não admite solução real (F)

4.3.2 A negação do quantificador existencial

Dada a afirmação $q: \ \exists x \in A;$ x possui a propriedade $\mathcal{P}$

a negação de $\mathcal{P}$ é $\sim q: \ \nexists x \in A;$ x possui a propriedade $\mathcal{P}$

Mas a negação de q também pode ser feita usando-se o quantificador universal:

$\sim q: \ \forall x \in A;$ x não possui a propriedade $\mathcal{P}$

Exemplos

1. $p:$ Existe algum planeta que possui seres vivos (V). Justificativa: o planeta Terra possui seres vivos.
   $\sim p:$ Qualquer planeta não possui seres vivos (F). Justificativa: o planeta Terra possui seres vivos.
2. $p: \ \exists x \in \mathbb{R}; \ x^2 < 0$ (F) $\qquad \sim p: \ \forall x \in \mathbb{R}, \ x^2 \geq 0$ (V)
3. $p: \ \sqrt{x} \neq 10$ para algum $x \in \mathbb{Z}$ (V) $\qquad \sim p: \ \sqrt{x} = 10, \ \forall x \in \mathbb{Z}$ (F)

5 Os conectivos lógicos $\Longrightarrow$ e $\Longleftrightarrow$

5.1 O conectivo $\Longrightarrow$ (implicação)

Dadas duas afirmações (ou proposições) p e q

temos que a afirmação (ou proposição) $p \Longrightarrow q$ é verdadeira quando

sempre que p é uma afirmação verdadeira então q também é uma afirmação verdadeira

Em outras palavras, estamos supondo que são dadas duas afirmações, p e q e supomos também que p é verdadeira. Neste caso, quando p é verdadeira, o que acontece com q? é verdadeira ou falsa? Se de alguma forma conseguirmos concluir que q só pode ser verdadeira, dizemos que $p \Longrightarrow q$.

Observações

- Esse de ″alguma forma conseguimos concluir que é verdadeira″, podemos citar que alguém já conseguiu provar a conclusão ou que a conclusão foi provada em algum lugar ou temos que provar a conclusão. Existem vários métodos de prova, mais adiante veremos alguns.

- Há várias formas alternativas de escrever a afirmação ou proposição $p \Longrightarrow q$, todas com mesmo significado, algumas estão listadas a seguir. Sugestão: leia antes o exemplo 1.
  - Se p é uma afirmação verdadeira então q é uma afirmação verdadeira.
  - ***Se*** p ***então*** q.
  - p implica em q (daí vem a palavra implicação)
  - p ***implica*** q
  - p verdadeira é uma condição suficiente para q verdadeira.
  - p é ***condição suficiente*** para q.
  - Se p é verdadeira, ***garante-se*** que q é verdadeira.
  - Se $\sim q$ é verdadeira então $\sim p$ é verdadeira.

    Essa precisamos verificar que de fato tem o mesmo significado. Vejamos, primeiro estamos admitindo que $\sim q$ é verdadeira, isto é q é falsa. Mas p só tem uma das duas possibilidades, verdadeira ou falsa. Se p for verdadeira, como admitimos que $p \Longrightarrow q$, temos que q é verdadeira. Como assim? q não pode ser verdadeira e falsa, logo p não pode ser verdadeira, p só pode ser falsa, isto é, $\sim p$ é verdadeira, como queríamos verificar.
  - Se q é falsa então p é falsa. (idem anterior)
  - Se $\sim q$ é verdadeira $\Longrightarrow$ $\sim p$ é verdadeira.
  - Se q é falsa $\Longrightarrow$ p é falsa.
  - q ser verdadeira é uma condição necessária para p ser verdadeira.

    A condição q precisa ser verdadeira, porque se q fosse falsa, então p seria falsa também, como vimos em parágrafo anterior.
  - q é uma condição necessária para p.
  - Uma condição necessária para p ser verdadeira é q ser verdadeira.
  - Uma condição necessária para p é q.

- O conectivo lógico $\Longrightarrow$ é transitivo, ou seja, se $p \Longrightarrow q$ e $q \Longrightarrow r$ então $p \Longrightarrow r$.

  Ver exemplo 2.

- ATENÇÃO. Em nenhum lugar admitimos como primeira condição p é falsa, simplesmente porque a afirmação $p \Longrightarrow q$ só garante o que acontece quando p é verdadeira, é omissa quando p é falsa. Isso significa que quando p é falsa e só sabemos que $p \Longrightarrow q$, nada podemos concluir sobre q, isto é, tanto q pode ser verdadeira quanto q pode ser falsa. Ver exemplo 3.

Exemplos

1. A = conjunto das infrações de trânsito num *país ideal*.

   B = conjunto das penalidades de trânsito num país ideal.

   Obs. *país ideal* é aquele onde de fato a lei é aplicada.

   Uma das infrações é "invadir sinal" que significa desobedecer sinal vermelho.

   Uma das penalidades é ser multado.

   Uma das leis é: invadir sinal será penalizado com multa e perderá sete pontos na carteira de habilitação.

   Dessa lei, podemos concluir que

   p: invadir sinal (V) $\Longrightarrow$ q: recebe multa (V)

   - Podemos escrever também em uma das formas listadas a seguir, com mesmo significado.
     - invadir sinal $\Longrightarrow$ receber multa
     - Se p: invadir sinal (V) então q: recebe multa (V).
     - ***Se*** invadir sinal ***então*** recebe multa.
     - p: invadir sinal (V) implica em q: receber multa (V)
     - invadir sinal ***implica*** receber multa
     - p: invadir sinal (V) é uma condição suficiente para q: receber multa (V).
     - invadir sinal é ***condição suficiente*** para receber multa.
     - Se $\sim q$: não recebe multa (V) então $\sim p$: não invadiu sinal (V).
       Vejamos, primeiro estamos admitindo $\sim q$: não receber multa (V). Para p resta uma das duas possibilidades, p : invadiu sinal (V) ou $\sim p$: não invadiu sinal (V).
       Vamos escolher a primeira, p : invadiu sinal (V).
       Neste caso, p: invadiu sinal (V) $\Longrightarrow$ q: recebe multa (V).
       Como assim? $\sim q$: não recebe multa (V) e q : recebe multa (V) não podem ser verdadeiras simultaneamente. Logo só resta a outra possibilidade, $\sim p$: não invadiu sinal (V).
     - Se não recebe multa então não invadiu sinal.
     - Uma condição necessária para p: ter invadido sinal é q: ter recebido multa (V)
     - q: receber multa (V) é uma condição necessária para p: ter invadido sinal (V).
     - receber multa é uma condição necessária para ter invadido sinal.

2. p : x é múltiplo de 10 $\Longrightarrow$ q : x é par.

   Podemos afirmar que a implicação é verdadeira. Acreditamos que você saiba porquê. Se não sabe, aqui está uma prova.

   x é múltiplo 10 $\Longrightarrow$ x é múltiplo de 2 e de 5 $\Longrightarrow$ x é múltiplo de 2 $\Longrightarrow$ x é par.

   - Podemos escrever também em uma das formas listadas a seguir, com mesmo significado.
     - Se x é múltiplo 10 então x é par.
     - x ser múltiplo de 10 é condição suficiente para x ser par.
     - x não é par $\Longrightarrow$ x não é múltiplo de 10.
     - x ser número par é condição necessária para x ser múltiplo de 10.

3. No exemplo 2 anterior,

   se x for igual a 25, a afirmação p é falsa e a afirmação q é falsa.

   se x for igual a 22, a afirmação p é falsa e a afirmação q é verdadeira.

   Este exemplo serve para evidenciar que não estamos afirmando nada quando p é falsa, isto é, a afirmação $p \Longrightarrow q$ só garante que q será verdadeira sempre que p for verdadeira, não garante nada sobre q quando p for falsa.

5.2 Quando $p \Longrightarrow q$ é falso? ou seja, quando $p \not\Longrightarrow q$ é verdadeiro?

No caso p verdadeira e q falsa.

Exemplos:

1. 3 é primo $\Longrightarrow$ 7 é divisor de 37 é FALSA.
   Justificativa: 3 é primo é VERDADEIRA e 7 é divisor de 37 é FALSA.
2. Quando as afirmações p e q são sentenças abertas, a implicação será falsa se apresentarmos um caso ou exemplo em que p seja verdadeira e q seja falsa.
   $\forall a \in \mathbb{R};\ \ a < 1 \Longrightarrow a^2 < 1$ é FALSA, isto é, $\forall a \in \mathbb{R};\ \ a < 1 \not\Longrightarrow a^2 < 1$.
   Justificativa: $a = -2 < 1$ é VERDADEIRA e $a^2 = (-2)^2 = 4 < 1$ é FALSA.

5.3 A diferença entre os conectivos $p \Longrightarrow q$ e $p \longrightarrow q$

Aqui cabe um comentário sobre o conectivo $p \longrightarrow q$ também usado na lógica.
$p \longrightarrow q$ é falso no caso em que p é verdadeiro e q é falso, nos outros casos é verdadeiro.
Observe que os outros casos em que $p \longrightarrow q$ é verdadeiro são:
(i) p é verdadeiro e q é verdadeiro; ou (ii) p é falso e q é verdadeiro; ou (iii) p é falso e q é falso.

Logo a diferença entre os conectivos $p \Longrightarrow q$ e $p \longrightarrow q$ se dá apenas no caso verdadeiro, pois no conectivo $p \Longrightarrow q$ só interessa o caso em que p é verdadeiro.

Usaremos apenas o conectivo $p \Longrightarrow q$.

5.4 O conectivo $\Longleftarrow$ (a recíproca de $\Longrightarrow$)

Dadas duas afirmações (ou proposições) p e q

temos que a afirmação (ou proposição) $p \Longleftarrow q$ é verdadeira quando $q \Longrightarrow p$ é verdadeira.

Em outras palavras, estamos supondo que são dadas duas afirmações, p e q e supomos também que q é verdadeira. Neste caso, quando q é verdadeira, o que acontece com p ? é verdadeira ou falsa? Se de alguma forma conseguirmos concluir que p só pode ser verdadeira, dizemos que $p \Longleftarrow q$.

Observações

- Há várias formas alternativas de escrever a afirmação ou proposição $p \Longleftarrow q$, todas com mesmo significado, algumas estão listadas a seguir. Para a maioria basta fazer uma troca de ordem de p e q na observação análoga de $p \Longrightarrow q$.
  - Se q é uma afirmação verdadeira então p é uma afirmação verdadeira.
  - ***Se*** q ***então*** p.
  - p ***é implicado por*** q (daí vem a palavra recíproca)
  - q implica em p
  - q ***implica*** p
  - q verdadeira é uma condição suficiente para p verdadeira.
  - q é ***condição suficiente*** para p.
  - Se q é verdadeira, garante-se que p é verdadeira.
  - Se $\sim p$ é verdadeira então $\sim q$ é verdadeira.
  - Se $p:$ é falsa então q é falsa.
  - p ser verdadeira é uma condição necessária para q ser verdadeira.
    A condição p precisa ser verdadeira, porque se p fosse falsa, então q seria falsa também, como vimos em parágrafo anterior.
  - p é uma condição necessária para q.
  - Uma condição necessária para q ser verdadeira é p ser verdadeira.
  - Uma condição necessária para q é p.

- ATENÇÃO. Em nenhum lugar admitimos como primeira condição q é falsa, simplesmente porque a afirmação $p \Longleftarrow q$ só garante o que acontece quando q é verdadeira, é omissa quando q é falsa. Isso significa que quando q é falsa e só sabemos que $p \Longleftarrow q$, nada podemos concluir sobre p, isto é, tanto p pode ser verdadeira quanto p pode ser falsa.

Exemplo

$\forall x \in \mathbb{R};\ \ x^2 < 4 \Longleftarrow \forall x \in \mathbb{R};\ \ 0 \leq x < 2.$ Queremos provar que a proposição é verdadeira.

Vamos usar aqui uma propriedade de ordem dos números reais que será vista com detalhes mais adiante.

Considere a, b, c, constantes reais. Vale a seguinte propriedade : $a < b$ e $c > 0 \Longrightarrow ac < bc$. Em palavras, a desigualdade não se altera quando multiplica-se os dois lados por um número positivo.

Admitimos $x \in \mathbb{R};\ 0 \leq x < 2$ (isto é, supomos verdadeira a afirmação).

$0 \leq x < 2 \Longrightarrow x < 2$ e $(x = 0$ ou $x > 0)$.
Caso $x = 0$ temos que $x^2 = 0 < 4$ é verdadeiro.
Caso $x > 0$ e $x < 2$, podemos multiplicar os dois lados por x, obtendo: $x \cdot x < 2 \cdot x$.
Mas $x > 0$ e $x < 2$, podemos multiplicar os dois lados por 2, obtendo $2 \cdot x < 2 \cdot 2 = 4$.
Logo $x^2 = x \cdot x < 2 \cdot x$ e $2 \cdot x < 2 \cdot\ 2 = 4 \Longrightarrow x^2 < 4.$ cqd

A última implicação é justificada por uma das propriedades de ordem dos números reais (as propriedades serão estudadas mais adiante), descrita a seguir.
Propriedade transitiva de ordem dos reais : Sejam a, b, c reais. $a < b$ e $b < c \Longrightarrow a < c$.

Apenas por curiosidade, observamos que a recíproca de $\forall x \in \mathbb{R};\ \ x^2 < 4 \Longleftarrow \forall x \in \mathbb{R};\ \ 0 \leq x < 2.$ não é verdadeira, isto é,
$\forall x \in \mathbb{R};\ \ x^2 < 4 \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R};\ \ 0 \leq x < 2$ é FALSA.
Justificativa: Para $x = -1:\ \ x^2 = 1 < 4$ é VERDADEIRA. Para $x = -1:\ \ 0 < x = -1 < 2$ é FALSA.
Logo a recíproca é FALSA.

5.5 O conectivo $\Longleftrightarrow$ (equivalência)

Dadas duas afirmações (ou proposições) p e q

temos que a afirmação (ou proposição) $p \Longleftrightarrow q$ é verdadeira quando

$p \Longrightarrow q$ e $p \Longleftarrow q$ são verdadeiras, isto é, quando a implicação e a sua recíproca são verdadeiras.

Há várias formas alternativas de escrever a afirmação ou proposição $p \Longleftrightarrow q$, todas com mesmo significado, algumas estão listadas a seguir.

- p é uma afirmação verdadeira ***se e somente se*** q é uma afirmação verdadeira.
- p ***se e só se*** q.
- p ***é equivalente a*** q (daí vem a palavra equivalência)
- p ***equivale a*** q
- p verdadeira é uma condição necessária e suficiente para q verdadeira.
- q verdadeira é uma condição necessária e suficiente para p verdadeira.
- p é ***condição necessária e suficiente*** para q.
- q é ***condição necessária e suficiente*** para p.
- $\sim p$ é verdadeira se e somente se $\sim q$ é verdadeira.
- $p:$ é falsa se e somente q é falsa.
- $\sim p$ é verdadeira $\Longleftrightarrow$ $\sim q$ é verdadeira.

- p : é falsa $\iff$ q é falsa.

Exemplos:

1. $x \in \mathbb{R}$ e $x^2 = x \iff x = 0$ `ou` $x = 1$.

   Primeiro vamos provar que a implicação é verdadeira, isto é, provar ($\Longrightarrow$):

   Novamente vamos usar propriedades dos reais que serão vistas com detalhes mais adiante.

   $x^2 = x \Longrightarrow x^2 + (-x) = x + (-x) = 0 \Longrightarrow x(x-1) = 0 \Longrightarrow x = 0$ ou $x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.

   Em cada implicação foi usada uma ou mais propriedades dos reais, admitindo-se todas as variáveis ou constantes números reais. Por exemplo, na primeira foi usada: $a = b \Longrightarrow a + c = b + c$ tomando $a = x^2, b = x, c = -x$. Na mesma implicação, foi usada a propriedade de elemento simétrico $x + (-x) = 0$. Fica com exercício a citação das propriedades usadas nas demais implicações. cqd.

   Agora vamos provar que a recíproca da implicação é verdadeira, isto é, provar ($\Longleftarrow$):

   Novamente temos que usar propriedades dos reais.

   $x = 0$ e $0 \in \mathbb{R} \Longrightarrow x^2 = 0^2 = 0$ e $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow x^2 = x = 0$ e $0 = x \in \mathbb{R}$.

   $x = 1$ e $1 \in \mathbb{R} \Longrightarrow x^2 = 1^2 = 1$ e $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow x^2 = x = 1$ e $1 = x \in \mathbb{R}$. cqd.

2. Suponha $x \in \mathbb{R}$. É verdade que $x^2 > 4 \iff x < -2$ ou $x > 2$?

   A resposta é sim, porque? Para responder vamos usar algumas propriedades de ordem dos reais que serão vistas com detalhes mais adiante.

   $x^2 > 4 \iff x^2 - 4 > 0$ (usamos a propriedade: para $a,\ b,\ c$ reais é verdade que $a < b \iff a + c < b + c$).

   Podemos aplicar a propriedade de produtos notáveis $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$.

   Logo $x^2 > 4 \iff (x-2)(x+2) > 0$.

   Agora vamos usar outra propriedade:

   para $a,\ b$ reais é verdade que: $ab > 0 \iff (a > 0$ e $b > 0)$ ou $(a < 0$ e $b < 0)$, em palavras, o produto de dois números reais é positivo se e só se os dois são positivos ou os dois são negativos. Logo

$$(x-2)(x+2) > 0 \iff \left\{\begin{array}{l} x-2>0 \quad \text{e} \quad x+2>0 \\ \text{ou} \\ x-2<0 \quad \text{e} \quad x+2<0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x>2 \quad \text{e} \quad x>-2 \\ \text{ou} \\ x<2 \quad \text{e} \quad x<-2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x>2 \\ \text{ou} \\ x<-2 \end{array}\right. \qquad \text{cqd}$$

6 Definição: o que é?

Quando estamos falando ou escrevendo alguma palavra ou conceito e sabemos que possivelmente quem está nos ouvindo ou lendo não sabe o significado claro e preciso dessa palavra ou conceito, é preciso ***definir*** o que essa palavra ou conceito representa, caso contrário, ninguém vai saber do que estamos falando ou escrevendo.

Algumas formas usuais de definir palavras ou conceitos estão listadas a seguir.

Definição 1 - Um XX é aquilo que possui as propriedades $P_1,\ P_2,$ e P_3.

Definição 2 - Um ZZ é chamado de $YYYY$ quando ZZ satisfaz uma das condições: $\mathcal{C}_1$ ou $\mathcal{C}_2$.

Definição 3 - Um ZZ é chamado de $YYYY$ se ZZ satisfaz uma das condições $\mathcal{C}_1$ ou $\mathcal{C}_2$.

A real observação que queremos fazer é:
por trás de qualquer definição (isto é, implicitamente) sempre existe uma equivalência, mesmo que a definição não esteja escrita na forma de equivalência.

As definições 1, 2 e 3 anteriores devem ser entendidas como:

Definição 1 - É um $XX \iff XX$ possui as propriedades $P_1,\ P_2,$ e P_3.

Definição 2 - Um ZZ é chamado de $YYYY \iff ZZ$ satisfaz uma das condições: $\mathcal{C}_1$ ou $\mathcal{C}_2$.

Definição 3 - Um ZZ é chamado de $YYYY \iff ZZ$ satisfaz uma das condições $\mathcal{C}_1$ ou $\mathcal{C}_2$.

Exemplos

1. Definição (número par)

   Um número inteiro n é um *número par* se $\exists k \in \mathbb{Z}; n = 2k$.

   Apesar de não estar escrito "se e só se", isto significa:

   Um número inteiro n é um *número par* $\iff \exists k \in \mathbb{Z}; n = 2k$.

2. Definição (número ímpar)

   Um número inteiro n é um *número ímpar* se $\exists k \in \mathbb{Z}; n = 2k + 1$.

   Isto significa:

   Um número inteiro n é um *número ímpar* $\iff \exists k \in \mathbb{Z}; n = 2k + 1$.

7 Exemplos e contra-exemplos: quando usar?

Já vimos que quando queremos verificar que uma afirmação é verdadeira é preciso provar que é verdadeira. Agora, queremos saber: exemplos provam que uma afirmação é verdadeira?

A resposta é: depende!!!

- se for possível testar que a afirmação é verdadeira em todos os exemplos admissíveis para essa afirmação então teremos provado que é verdadeira em qualquer caso.
- se testarmos se a afirmação é verdadeira apenas em alguns dos exemplos, mas não em todos os exemplos admissíveis para essa afirmação, não estamos provando que a afirmação é verdadeira porque ela poderia ser falsa nos casos que não foram testados.

Agora, queremos saber: exemplos provam que uma afirmação é falsa?

A resposta é: sim!!!

- se testarmos a afirmação em um único exemplo, e a resposta for falsa, então podemos afirmar imediatamente que a afirmação é falsa porque para ser verdadeira teria que ser verdadeira em todos os exemplos admissíveis.

  Um exemplo em que a afirmação é falsa é chamado de ***contra-exemplo***.

Exemplos e contra-exemplos:

1. Todo múltiplo de 10 é par. (outra forma dessa afirmação: m é múltiplo de 10 $\Longrightarrow$ m é par)

   A afirmação é verdadeira para $x = 10, x = 20, x = 30$. Não provei. É impossível esgotar todos os exemplos. Então temos que provar, sem ser através de exemplos.

   Já provamos essa afirmação no exemplo 2 da seção 2.4.1. Agora vamos ver outra prova, diferente daquela. Para provar, primeiro, vamos lembrar a definição de múltiplo:

   Definição (múltiplo)

   Um número inteiro m é múltiplo de um número inteiro n quando existe um inteiro q tal que $m = qn$.

   Agora, vamos supor que m é um múltiplo de 10. Pela definição de múltiplo,

   $\exists q \in \mathbb{Z};\ \ m = q \times 10$. Mas, sabemos que $10 = 2 \times 5$ e também podemos aplicar as propriedades comutativa e associativa dos números inteiros,

   $\exists q \in \mathbb{Z};\ \ m = q \times 2 \times 5 = 2 \times (q \times 5)$. Como o produto de dois inteiros é um inteiro (propriedade de fechamento dos inteiros), temos que $q \times 5 = k$, onde k é inteiro. Logo,

   $\exists k \in \mathbb{Z};\ \ m = 2k \Longrightarrow$ m é par (aqui usamos a definição de par) cqd

2. $x \in \mathbb{R};\ (x^2 - 1)(x^2 + x) = 0 \Longrightarrow |x| = 1$ ou $|x| = 0$.

   Queremos provar que a afirmação é verdadeira. Neste caso, resolvendo a equação, é possível encontrar todos os exemplos admissíveis de $x \in \mathbb{R};\ (x^2 - 1)(x^2 + x) = 0$. Vejamos,

   $(x^2 - 1)(x^2 + x) = 0 \iff x^2 - 1 = 0$ ou $x^2 + x = 0$

   $\iff (x - 1)(x + 1) = 0$ ou $x(x + 1) = 0$.

   $\iff x - 1 = 0$ ou $x + 1 = 0$ ou $x = 0$ ou $x + 1 = 0$

$\iff \quad x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 0$ (uma das possibilidades pôde ser eliminada porque estava repetida)

Vamos testar em todos exemplos admissíveis.

Para testar, vamos ter que usar módulo ou valor absoluto de um número real, colocamos aqui a definição de módulo, em Pré-Cálculo as propriedades do módulo serão estudadas com detalhes.

<u>Definição</u> (módulo ou valor absoluto)

O módulo ou valor absoluto de um número real x é denotado por $|x|$ e definido por $|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$

para $\quad x = 1,\ |x| = |1| = 1 \Longrightarrow |x| = 1 \Longrightarrow |x| = 1 \quad \text{ou} \quad |x| = 0$ (afirmação verdadeira)

ou para $\quad x = -1,\ |x| = |-1| = -(-1) = 1 \Longrightarrow |x| = 1 \Longrightarrow |x| = 1 \quad \text{ou} \quad |x| = 0$ (afirmação verdadeira)

ou para $\quad x = 0,\ |x| = |0| = 0 \Longrightarrow |x| = 0 \Longrightarrow |x| = 1 \quad \text{ou} \quad |x| = 0$ (afirmação verdadeira)

Conclusão: a afirmação é verdadeira para todos os exemplos admissíveis, logo a afirmação é verdadeira.

3. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x^2} = x$

Testando a afirmação em alguns exempos admissíveis,

$x = 1$, temos que $\sqrt{x^2} = \sqrt{1^2} = \sqrt{1} = 1 = x$ (afirmação verdadeira)

$x = 2$, temos que $\sqrt{x^2} = \sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2 = x$ (afirmação verdadeira)

$x = \sqrt{3}$, temos que $\sqrt{x^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{3} = x$ (afirmação verdadeira)

A afirmação é verdadeira nesses exemplos, mas esses não são todos os exemplos admissíveis.

Queremos provar que essa afirmação é falsa.

Contra-exemplo:

$x = -1$, temos que $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$.

Como $1 \neq -1$, fica claro que $\sqrt{x^2} \neq x$ quando $x = -1$ ou,

de outra forma, a afirmação $\sqrt{x^2} = x$, quando $x = -1$, é falsa.

Ou seja, a afirmação $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x^2} = x$ é falsa.

Dizemos que $x = -1$ é um contra-exemplo para a afirmação $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x^2} = x$.