7. Trigonometria

Motivação:

Observe a figura 1. Em determinado ponto da construção de uma estrada retilínea, precisa-se construir um túnel, na mesma direção da estrada, para atravessar um morro.
Uma vez que a construção do túnel é demorada, seria conveniente duas equipes trabalharem nela, uma de cada lado do morro. Supõe-se que o terreno em volta do morro seja plano.

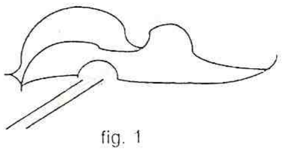


fig. 1

Descrever um processo no qual os topógrafos possam determinar o ponto, do outro lado do morro, em que se deve iniciar a construção do túnel, e a sua direção naquele lado.

Solução:

Observe a figura 2. Num ponto A da estrada construída, o topógrafo coloca o teodolito e mira uma direção que passa fora do pé do morro. O ângulo α é lido no aparelho. A linha que tem esta direção fica marcada por duas balizas, uma cravada em A e outra em B. O ponto B deve ser escolhido de modo que a perpendicular à $\overline{AB}$, passando por B, também passe fora do pé do morro. A distância $\overline{AB}$ pode ser medida com uma trena.

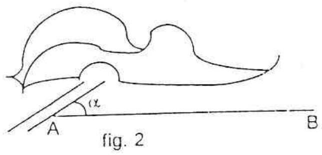


fig. 2

Observe a figura 3. Colocando o teodolito em B, o topógrafo mira o ponto A, e depois gira a luneta de 90° , isto é, mira uma direção perpendicular à $\overline{AB}$. Nesta direção perpendicular à $\overline{AB}$ existe um ponto C alinhado com a estrada.
Para determinar o ponto C, observe que se tivermos um triângulo retângulo ABC, teremos: $\tan\alpha = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$, donde, $\overline{BC} = \overline{AB}\tan\alpha$. Como α e $\overline{AB}$ foram medidos, podemos efetuar os cálculos na fórmula acima, obtendo a distância $\overline{BC}$, e, assim, determinando o ponto C.

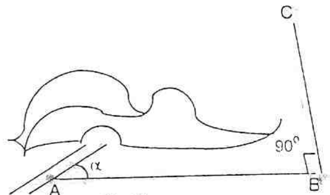


fig. 3

Observe a figura 4. Estacionando agora o teodolito em C, o topógrafo mira o ponto B e gira a luneta do aparelho de um ângulo de $90^\circ - \alpha$, obtendo uma direção que coincide com a direção de $\overline{AC}$.
Assim, fica determinada a direção que o túnel deverá seguir (é a direção de $\overline{AC}$) e também o ponto D, nesta direção, encostado no morro, onde se deve iniciar a construção do túnel.

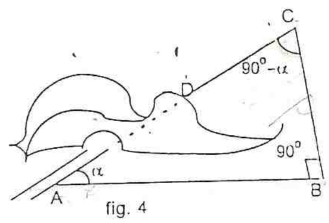


fig. 4

7.1 Seno, Cosseno e Tangente de um ângulo agudo θ

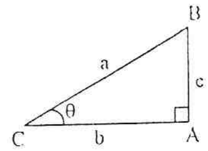
Dado um ângulo agudo θ, $0 < \theta < 90^\circ$, consideremos um triângulo retângulo qualquer de vértices A, B, C, onde um dos ângulos mede θ. As letras minúsculas a, b, c, representam os lados opostos aos vértices A, B, C, respectivamente, e indicarão também as medidas desses lados: a = hipotenusa, b = cateto, c = cateto.

Definem-se:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto oposto à } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

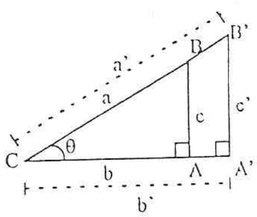
$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adjacente à } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto oposto à } \theta}{\text{cateto adjacente à } \theta} = \frac{c}{b}$$



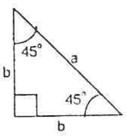
Obs.: O seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo são números que não dependem do "tamanho do triângulo". Eles dependem apenas da medida do ângulo.

De fato: os triângulos retângulos ABC e A'B'C' são semelhantes, logo:
$\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$. Assim: $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{c'}{a'}$; $\cos\theta = \dfrac{b}{a} = \dfrac{b'}{a'}$; $\tan\theta = \dfrac{c}{b} = \dfrac{c'}{b'}$.



7.2 Valores do seno, cosseno e tangente de alguns ângulos notáveis

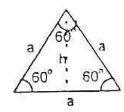
$\boxed{\theta = 45^\circ}$



Consideremos o triângulo isósceles de catetos b e hipotenusa a. Aplicando o Teorema de Pitágoras neste triângulo temos: $b^2 + b^2 = a^2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a = b\sqrt{2}$. Assim:

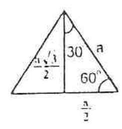
$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{b}{b\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45^\circ = \frac{b}{b\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan 45^\circ = \frac{b}{b} = 1.$$

$\boxed{\theta = 30^\circ \quad \text{e} \quad \theta = 60^\circ}$



Consideremos um triângulo equilátero de lado a. Seus ângulos internos medem 60°.

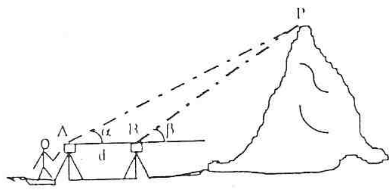
Pelo Teorema de Pitágoras mostra-se que a altura $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} \qquad \tan 60^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

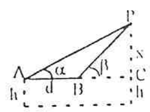
Vejamos um exemplo como aplicação.



Para obter a altura de um morro, um topógrafo estaciona seu teodolito num ponto A, a uma altura h do chão, e mede o ângulo α (ver figura). Depois aproxima-se do morro até um ponto B no mesmo nível de A, mede a distância $d = \overline{AB}$ com uma trena e o ângulo β com o teodolito.

Como a partir destas medidas o topógrafo calcula a altura do morro?

Solução: Na figura a seguir observe que: I) $\tan\beta \neq \tan\alpha$ pois $\beta > \alpha$ II) a altura do morro é $h + x$.



Do triângulo retângulo ACP segue que: $\tan\alpha = \dfrac{x}{d + \overline{BC}}$ (*)

Do triângulo retângulo BCP segue que: $\tan\beta = \dfrac{x}{\overline{BC}}$, donde $\overline{BC} = \dfrac{x}{\tan\beta}$ (**)

Substituindo (**) em (*) segue que: $\tan\alpha = \dfrac{x}{d + \frac{x}{\tan\beta}} = \dfrac{x\tan\beta}{d\tan\beta + x}$ (***)

Explicitando x em (***): $x = \dfrac{d\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha}$. Logo a altura do morro é $= h + \dfrac{d\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha}$

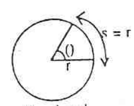
7.3 Arcos e Ângulos na Circunferência

Consideremos uma circunferência de centro C e raio r.

7.3.1 O comprimento ℓ desta circunferência é $\ell = 2\pi r$, onde $\pi \cong 3{,}1416$.

7.3.2 Um ângulo θ é dito ângulo central da circunferência quando possui o vértice no centro desta circunferência.

7.3.3 A unidade de medida 1 radiano.



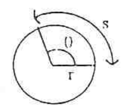
θ = 1 rad

Um ângulo central θ mede 1 radiano (1 rad) se o comprimento s do arco determinado por θ é igual ao raio r da circunferência que o contém.

Observação: Esta medida independe do "tamanho" da circunferência, ou seja, do raio da circunferência.

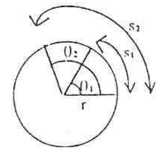
Sugestão: Desenhe duas circunferências concêntricas de raios diferentes. Desenhe uma reta a partir do centro C comum das circunferências. Marque os pontos A e A' onde esta reta corta as circunferências. Com barbante, meça, para cada circunferência, os raios CA e CA'. Com estes barbantes marque, a partir de A e A', os pontos B e B' sobre as respectivas circunferências, determinando os arcos AB e A'B' (terão comprimentos iguais aos dos raios das respectivas circunferências). Agora, ligue os pontos B e B' ao centro C e verifique que C, B, B' estão numa mesma reta, ou seja os ângulos centrais ACB e A'CB' de vértices C são iguais e medem 1 rad.

7.3.4 Medida em radianos



Definição Um ângulo central θ subtendido por um arco de comprimento s mede $\frac{s}{r}$ radianos. Radiano é nova unidade para medida de ângulos.

Obs. Considere dois ângulos centrais diferentes θ_1 e θ_2, de uma mesma circunferência de raio r, subtendidos pelos arcos de comprimentos s_1 e s_2.



- Existe proporcionalidade entre as medidas dos ângulos centrais e os respectivos comprimentos dos arcos: $\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{s_2}{s_1}$. Ou seja, se a medida de um ângulo central for multiplicada ou dividida, por um número real, o correspondente comprimento do arco ficará multiplicado, ou dividido, pelo mesmo número real.
- Considere $\theta_2 = \theta$, $s_2 = s$ e $s_1 = r$. Sendo $s_1 = r$ então $\theta_1 = 1\,\text{rad}$.. Pela fórmula acima temos: $\frac{\theta}{1} = \frac{s}{r}$, ou seja, $\theta = \frac{s}{r}$, o que está de acordo com a definição de medida em radiano.

7.3.5 Relação Radiano - Grau

Qual a medida em radianos do ângulo de 360°?

Como o arco correspondente ao ângulo de 360° mede $2\pi r$ unidades de comprimento (r é o raio da circunferência), o ângulo de 360° vale $\frac{2\pi r}{r}\,\text{rad} = 2\pi\,\text{rad}$.

Analogamente, o ângulo de 180° vale $\frac{\pi r}{r}\,\text{rad} = \pi\,\text{rad}$.

Transformação da medida de um ângulo de graus para radianos e vice-versa (Regra de três):

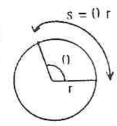
180° ———— π rad

θ° ———— x rad

Temos: $x\,\text{rad} = \frac{\theta^\circ \cdot \pi\,\text{rad}}{180^\circ} = \left[\frac{\pi}{180}\cdot\theta\right]\text{rad}$ e $\theta^\circ = \frac{x\,\text{rad}\cdot 180^\circ}{\pi\,\text{rad}} = \left[\frac{180}{\pi}\cdot x\right]^\circ$

Logo: 1° vale $\left[\frac{\pi}{180}\times 1\right]\text{rad} \cong 0{,}01745\,\text{rad}$ e $1\,\text{rad}$ vale $\left[\frac{180}{\pi}\times 1\right]^\circ \cong 57{,}3^\circ$

7.3.6 Comprimento de arco

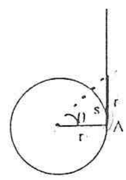


Para θ em radianos temos que $\theta = \frac{s}{r}$. Logo o comprimento s do arco subtendido pelo ângulo central θ de uma circunferência de raio r é determinado pela fórmula:

$$\boxed{s = \theta\, r}$$

Cuidado! Esta fórmula só pode ser usada para θ em radianos. Se θ for dado em graus, transforme-o antes em radianos.

Exemplo:



Considere uma pista de carro circular de raio $r = 6\,m$, com um foco de luz no centro da pista. Suponha que exista um muro tangente à pista num ponto A (ver figura, pista vista de cima). Se um carro partiu da posição A, e num dado instante, a sua sombra no muro percorreu uma distância de r metros, quantos metros sobre a pista o carro andou até este instante?

Solução:

Se a sombra percorreu uma distância de r metros então o triângulo retângulo da figura é também isósceles.

Logo o ângulo θ mede 45° que vale $\frac{\pi}{4}\,\text{rad}$.

Aplicando a fórmula: $s = \frac{\pi}{4}\times 6 = \frac{3\pi}{2} \cong 4{,}72$. O carro andou sobre a pista aproximadamente 4,72 metros.

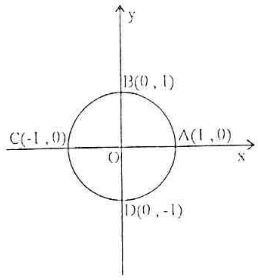
Observe que a pista mede $12\pi m$ e o carro andou $\frac{1}{8}$ desta pista.

8. Seno, Cosseno, Tangente, Cotangente, Secante e Cossecante no Círculo Trigonométrico

Introdução: A trigonometria surgiu a partir de triângulos retângulos devido à necessidade de se medir distâncias inácessíveis (trigonometria do ângulo agudo). Devido a necessidade de ampliar estas noções para um ângulo qualquer, passamos ao círculo trigonométrico.

8.1 Círculo trigonométrico.

8.1.1 Definição



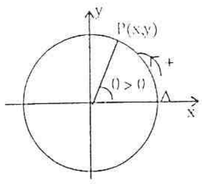
Considere num plano um sistema de coordenadas cartesianas xOy e uma circunferência de raio unitário, com centro na origem do sistema.

Como a circunferência tem raio 1 então o seu comprimento é $\ell = 2\pi r = 2\pi$.

Nesta circunferência, o comprimento de qualquer arco é numericamente igual a medida, em radianos, do ângulo central subtendido por este arco, pois $s = r \cdot \theta = 1 \cdot \theta = \theta$.

Assim um arco de medida s unidades de comprimento corresponde à um ângulo central de medida s radianos.

Arcos terão por comprimento qualquer número real positivo. Arcos de comprimento maior do que 2π ultrapassam uma volta na circunferência.



Vamos convencionar que os ângulos centrais desta circunferência serão marcados a partir do segmento OA.

Se o arco correspondente ao ângulo central for percorrido no sentido anti-horário então o ângulo cental terá medida positiva.

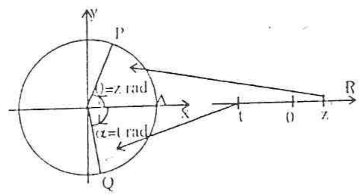
Arcos percorridos no sentido horário determinam ângulos centrais negativos.

Cada ângulo central θ determina sobre esta circunferência um e só um ponto P.

O circulo orientado definido acima é chamado Círculo Trigonométrico

8.1.2 Correspondência entre ângulos (em radianos) e pontos do circulo trigonométrico com os números reais

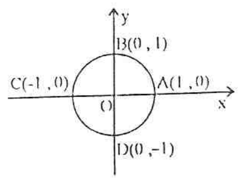
Existe uma correspondência entre ângulos (em radianos) do círculo trigonométrico com os números reais, que é feita da seguinte forma:



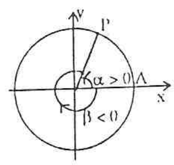
O número real z corresponde ao ângulo θ que mede z radianos.

Existe um único ponto $P(x, y)$ no círculo trigonométrico determinado por θ, e o arco AP mede $|z|$ unidades de comprimento.

Exemplos:

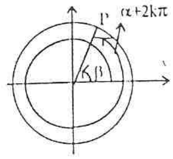


- ao número $\frac{\pi}{2}$ associamos o ângulo $\frac{\pi}{2}$ rad (90°) que determina o ponto $B(0, 1)$. O arco AB mede $\frac{\pi}{2}$ unidades de comprimento.
- ao número π associamos o ângulo π rad (180°) que determina o ponto $C(-1, 0)$. O arco AC mede π unidades de comprimento.
- ao número $-\frac{\pi}{2}$ associamos o ângulo $-\frac{\pi}{2}$ rad (-90°) que determina o ponto $D(0, -1)$. O arco AD mede $\frac{\pi}{2}$ unidades de comprimento.



Obs. Iniciando no ponto A e terminando no ponto P, dois ângulos centrais podem ser determinados, um no sentido anti-horário e outro no sentido horário, α e β, respectivamente, conforme a figura ao lado.

8.1.3 <u>Congruência de ângulos</u>



- Dois ângulos centrais, medidos em radianos, são congruentes se $\beta = \alpha + 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$.
- Dois ângulos centrais, medidos em graus, são congruentes se $\beta = \alpha + 360^\circ k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$.

<u>Obs</u>. Ângulos centrais congruentes determinam o mesmo ponto no círculo trigonométrico.

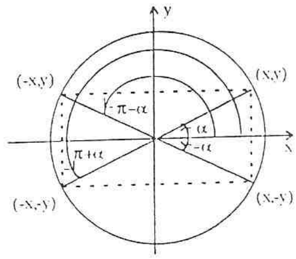
Exemplos:

1) $800^\circ = 80^\circ + 2 \times 360^\circ$ (2 voltas no sentido anti-horário e mais 80°). Assim os ângulos que medem 800° e 80° são congruentes (Determinam o mesmo ponto do círculo trigonométrico).

2) $-\frac{19\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + (-3) \times 2\pi$ (3 voltas no sentido horário e mais $-\frac{\pi}{3}$ rad). Logo, os ângulos $-\frac{19\pi}{3}$ rad e $-\frac{\pi}{3}$ rad

3) $\frac{11\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi$ (1 volta no sentido horário e mais $-\frac{\pi}{6}$ rad). Logo os ângulos $\frac{17\pi}{6}$ rad e $-\frac{\pi}{6}$ rad são congruentes (Determinam o mesmo ponto do círculo trigonométrico).

8.1.4 <u>Correspondências</u>: <u>Ângulos</u> de <u>Pontos Simétricos</u>



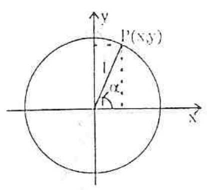
Seja $P(x,y)$ no 1º quadrante, o ponto determinado pelo ângulo α.

Da figura ao lado podemos concluir que as seguintes correspondências são válidas:

$\alpha \leftrightarrow (x,y)$ $\qquad -\alpha \leftrightarrow (x,-y)$

$\pi-\alpha \leftrightarrow (-x,y)$ $\qquad \pi+\alpha \leftrightarrow (-x,-y)$

8.2 <u>Definições</u> de <u>Seno, Cosseno, Tangente, Cotangente, Secante e Cossecante</u>



Dado um ângulo α qualquer, considere o ponto $P(x,y)$ determinado por este ângulo, no círculo trigonométrico.

Para α, qualquer real, definem-se: $\boxed{\cos\alpha = x}$

$\boxed{\operatorname{sen}\alpha = y}$

<u>Obs.</u>: $x = 0 \iff \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. $\quad y = 0 \iff \alpha = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Para $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, definem-se: $\boxed{\tan\alpha = \frac{y}{x}}$ e $\boxed{\sec\alpha = \frac{1}{x}}$.

Para $\alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, definem-se: $\boxed{\cot\alpha = \frac{x}{y}}$ e $\boxed{\csc\alpha = \frac{1}{y}}$.

<u>Obs.1</u>: Das definições acima e da congruência de ângulos, para $\forall k \in \mathbb{Z}$, temos que:

$\operatorname{sen}(\alpha + 2k\pi) = \operatorname{sen}\alpha$, $\quad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$, $\quad \tan(\alpha + 2k\pi) = \tan\alpha$,

$\cot(\alpha + 2k\pi) = \cot\alpha$, $\quad \sec(\alpha + 2k\pi) = \sec\alpha$, $\quad \csc(\alpha + 2k\pi) = \csc\alpha$.

<u>Obs.2</u> Das definições acima podemos estabelecer imediatamente as seguintes identidades:

Para $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ $\qquad \boxed{\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}} \qquad \boxed{\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}}$

Para $\alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ $\qquad \boxed{\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}} \qquad \boxed{\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}}$

<u>Obs.3</u> Para ângulos entre 0° e 90° estas definições concordam com as definições já conhecidas anteriormente de $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$ e $\tan\alpha$ feitas no triângulo retângulo.

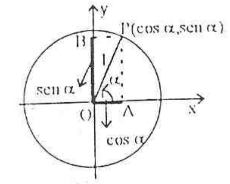
8.4 Estudo de $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$

8.4.1 Os segmentos representantes

Seja o ponto P determinado pelo ângulo α. Pelas definições:

$\cos\alpha =$ abcissa do ponto P

$\operatorname{sen}\alpha =$ ordenada do ponto P.



Obs. 1 $-1 \le \cos\alpha \le 1 \Leftrightarrow |\cos\alpha| \le 1$ $\qquad -1 \le \operatorname{sen}\alpha \le 1 \Leftrightarrow |\operatorname{sen}\alpha| \le 1$

Obs. 2 Se o ponto P correspondente ao ângulo α estiver no 1º ou no 4º quadrante, a abscissa do ponto P será positiva; se estiver no 2º ou no 3º quadrante, a abscissa do ponto P será negativa.
Se o ponto P correspondente ao ângulo α estiver no 1º ou no 2º quadrante, a ordenada do ponto P será positivo; se estiver no 3º ou no 4º quadrante, a ordenada do ponto P será negativa.

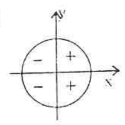
8.4.2 Valores nos eixos coordenados

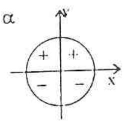
Considere o ângulo α; $0 \le \alpha < 2\pi$ $\qquad \cos 0 = 1 \qquad \cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2} = 0 \qquad \cos\pi = -1$

$\operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen}\pi = 0 \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -1$

8.4.3 Sinal nos quadrantes

Com a observação 2 da seção 8.4.1, podemos estabelecer os sinais em cada quadrante:





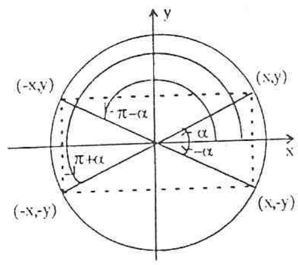
8.4.4 Análise de sinal

Considere um ângulo α qualquer e $k \in \mathbb{Z}$.

$$\cos\alpha \begin{cases} = 0 & \text{se} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ > 0 & \text{se} \quad -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ < 0 & \text{se} \quad \frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \qquad \operatorname{sen}\alpha \begin{cases} = 0 & \text{se} \quad \alpha = k\pi \\ > 0 & \text{se} \quad 2k\pi < \alpha < \pi + 2k\pi \\ < 0 & \text{se} \quad \pi + 2k\pi < \alpha < 2\pi + 2k\pi \end{cases}$$

8.4.5 Correspondências com simetrias

Das correspondências entre pontos simétricos podemos estabelecer as seguintes identidades:



$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \qquad \operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \qquad \operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$

Exemplos. Como já conhecemos $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$ para alguns ângulos notáveis, podemos determinar:

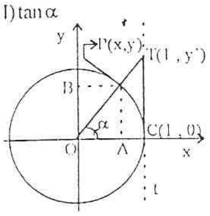
1) $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ 2) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\cos\left(\frac{13\pi}{4}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

8.5 Estudo de $\tan\alpha$ e $\cot\alpha$

8.5.1 Os segmentos representantes

I) $\tan\alpha$



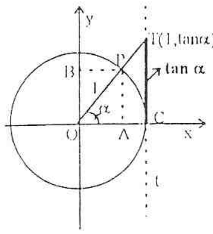
Seja t a reta tangente ao círculo trigonométrico no ponto C do semi-eixo positivo Ox.

Seja ainda o ponto $T(1, y')$, que é o ponto de interseção da reta t com a reta que contém os pontos O e P.

Os triângulos OAP e OCT são semelhantes.

Deste modo: $\dfrac{y'}{1} = \dfrac{y}{x}$. Logo, pela definição: $y' = \tan\alpha$

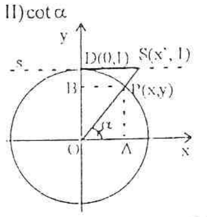
Assim: $\tan\alpha$ = ordenada ponto T.



Obs.1 $\tan\alpha$ assume qualquer valor real.

Obs.2 Se o ponto P correspondente ao ângulo α estiver no 1° ou no 3° quadrante, a ordenada do ponto T será positiva; se estiver no 2° ou no 4° quadrante, a ordenada do ponto T será negativa.

II) $\cot\alpha$



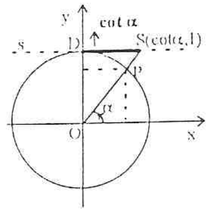
Seja s a reta tangente ao círculo trigonométrico no ponto D do semi-eixo positivo Oy.

Seja ainda o ponto $S(x', 1)$, que é o ponto de interseção da reta s com a reta que contém os pontos O e P.

Os triângulos OBP e ODS são semelhantes.

Deste modo: $\dfrac{x'}{1} = \dfrac{x}{y}$. Logo, pela definição: $x' = \cot\alpha$

Assim: $\cot\alpha$ = abscissa do ponto S.



Obs.1 $\cot\alpha$ assume qualquer valor real.

Obs.2 Se o ponto P correspondente ao ângulo α estiver no 1° ou no 3° quadrante, a abscissa do ponto S será positiva; se estiver no 2° ou no 4° quadrante, a abscissa do ponto S será negativa.

8.5.2 Valores nos eixos coordenados

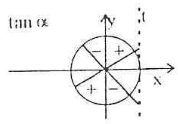
Considere o ângulo α; $0 \le \alpha < 2\pi$

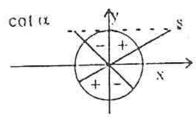
$\tan 0 = \tan\pi = 0$ $\quad \nexists \tan\dfrac{\pi}{2}$, $\nexists \tan\dfrac{3\pi}{2}$ $\quad \cot\dfrac{\pi}{2} = \cot\dfrac{3\pi}{2} = 0$ $\quad \nexists \cot 0$, $\nexists \cot\pi$

8.5.3 Sinal nos quadrantes

Com as observações 2 de I e II da seção 8.5.1, podemos estabelecer os sinais em cada quadrante.

Observe que os sinais de $\tan\alpha$ e $\cot\alpha$ coincidem em cada quadrante.





8.5.4 Análise de sinal

Considere um ângulo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$ para $\tan\alpha$: $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e para $\cot\alpha$: $\alpha \neq k\pi$.

$\tan\alpha = 0$ se $\alpha = k\pi$ $\qquad \cot\alpha = 0$ se $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$$\tan\alpha \text{ e } \cot\alpha \begin{cases} > 0 & \text{se} \quad 2k\pi < \alpha < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \pi + 2k\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \\[2ex] < 0 & \text{se} \quad \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < \pi + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < 2\pi + 2k\pi \end{cases}$$

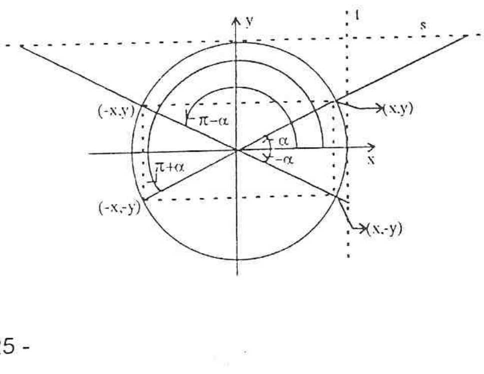
8.5.5 Correspondências com simetrias

Das correspondências entre pontos simétricos podemos estabelecer as seguintes identidades:

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ $\qquad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

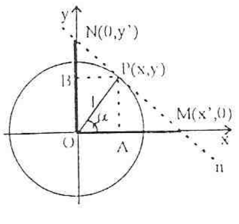
$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$ $\qquad \cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$ $\qquad \cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$



8.6 Estudo de $\sec\alpha$ e $\csc\alpha$

8.6.1 Os segmentos representantes



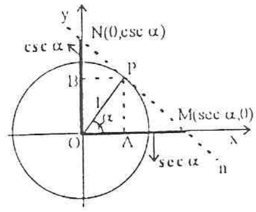
Seja n a reta tangente ao círculo trigonométrico no ponto P. Os pontos M e N são os pontos onde esta reta n intercepta os eixos coordenados.

Observe que os triângulos OAP e OPM são semelhantes. Deste modo: $\dfrac{1}{x}=\dfrac{x'}{1}$

Logo, pela definição: $\sec\alpha = x'$. Assim, $\sec\alpha$ = abscissa do ponto M.

Observe que os triângulos OBP e PBN são semelhantes. Deste modo: $\dfrac{1}{y}=\dfrac{y'}{1}$

Logo, pela definição: $\csc\alpha = y'$ Assim, $\csc\alpha$ = ordenada do ponto N.



Obs.1: $\sec\alpha \geq 1$ ou $\sec\alpha \leq -1 \iff |\sec\alpha| \geq 1$

$\csc\alpha \geq 1$ ou $\csc\alpha \leq -1 \iff |\csc\alpha| \geq 1$

Obs.2 Se o ponto P correspondente ao ângulo α estiver no 1^o ou no 4^o quadrante, a abscissa do ponto M será positiva; se estiver no 2^o ou no 3^o quadrante, a abscissa do ponto M será negativa.
Se o ponto P correspondente ao ângulo α estiver no 1^o ou no 2^o quadrante, a ordenada do ponto N será positiva; se estiver no 3^o ou no 4^o quadrante, a ordenada do ponto N será negativa.

8.6.2 Valores nos eixos coordenados

Considere o ângulo α; $0 \leq \alpha < 2\pi$

$\sec 0 = 1$; $\sec\pi = -1$; $\nexists \sec\dfrac{\pi}{2}$, $\nexists \sec\dfrac{3\pi}{2}$; $\csc\dfrac{\pi}{2} = 1$; $\csc\dfrac{3\pi}{2} = -1$; $\nexists \csc 0$; $\nexists \csc\pi$

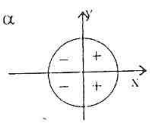
8.6.3 Sinal nos quadrantes

Com a observação 2 da seção 8.6.1, podemos estabelecer os sinais em cada quadrante.

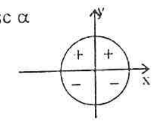
Obs.: Sinal de $\sec\alpha$ é o mesmo sinal de $\cos\alpha$.

Sinal de $\csc\alpha$ é o mesmo sinal de $\operatorname{sen}\alpha$.

sec α



csc α



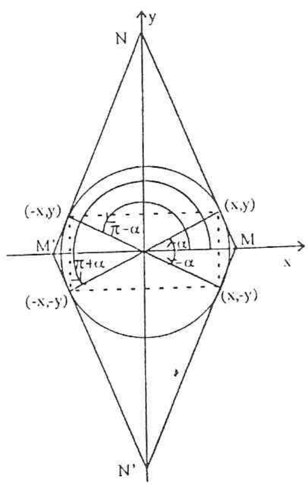
8.6.4 Análise de sinal

Considere $\alpha \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$ para $\sec\alpha$: $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, para $\csc\alpha$: $\alpha \neq k\pi$.

Note que $\sec\alpha$ e $\csc\alpha$ nunca se anulam

$$\sec\alpha \begin{cases} > 0 & \text{se} \quad -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ < 0 & \text{se} \quad \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \qquad \csc\alpha \begin{cases} > 0 & \text{se} \quad 2k\pi < \alpha < \pi + 2k\pi \\ < 0 & \text{se} \quad \pi + 2k\pi < \alpha < 2\pi + 2k\pi \end{cases}$$

8.6.5 Correspondências com simetrias



Das correspondências entre pontos simétricos podemos estabelecer as seguintes identidades:

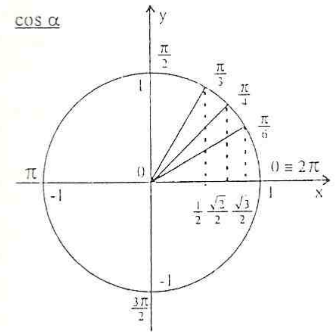
$\sec(-\alpha) = \sec\alpha$ $\qquad \csc(-\alpha) = -\csc\alpha$

$\sec(\pi - \alpha) = -\sec\alpha$ $\qquad \csc(\pi - \alpha) = \csc\alpha$

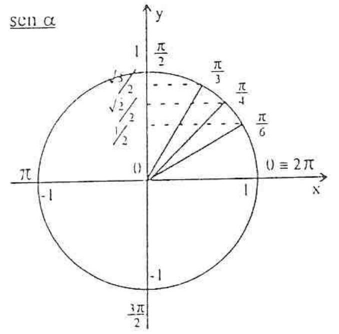
$\sec(\pi + \alpha) = -\sec\alpha$ $\qquad \csc(\pi + \alpha) = -\csc\alpha$

8.6 Valores Notáveis

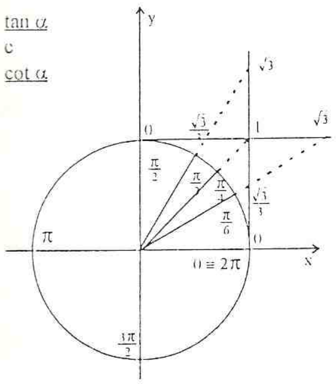
cos α



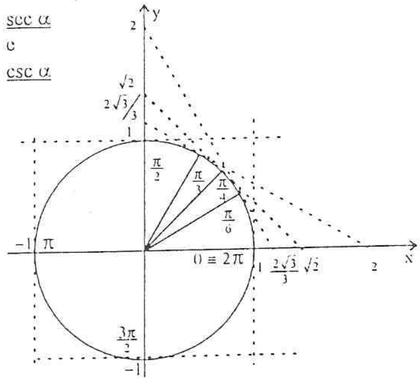
sen α



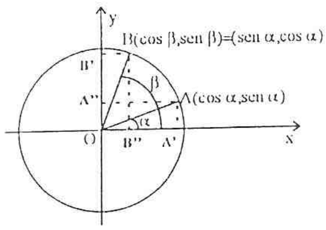
tan α
e
cot α



sec α
e
csc α



8.7 Correspondências para ângulos complementares



Ângulos complementares.

Dois ângulos α e β são complementares se $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, isto é, $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$.

Correspondências.

Considere na figura ao lado os pontos A e B no 1º quadrante, correspondentes aos ângulos α e β complementares.

Na figura podemos ver que os triângulos OAA' e OBB' são iguais. Assim:

$$OB''=OA' \quad\Rightarrow\quad \boxed{\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha}$$

$$OB'=OA'' \quad\Rightarrow\quad \boxed{\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha}$$

As outras correspondências podem ser estabelecidas aplicando-se as definições e as duas últimas fórmulas:

$$\cot\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\cot\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha}$$

$$\csc\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{1}{\cos\alpha} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\csc\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sec\alpha}$$

Obs.: Os nomes cosseno, cotangente e cossecante estão relacionados com estas fórmulas.

8.8 Identidades ou Fórmulas Trigonométricas

8.8.1 Fórmulas Básicas

Chamaremos de identidades básicas as identidades que são usadas para deduzir todas as outras. Ou seja, se alguma das outras for esquecida, poderá ser deduzida a partir destas.

As quatro seguintes já foram vistas, como definições:

- $\boxed{\tan\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \text{ e } \sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}, \text{ para } \cos\alpha \neq 0}$ $\boxed{\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \text{ e } \csc\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}, \text{ para } \operatorname{sen}\alpha \neq 0}$

- $\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$

- $\boxed{1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha}$

- $\boxed{1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha}$

De fato, o ponto P correspondente ao ângulo α é $P(x,y) = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ e está sobre o círculo trigonométrico. Como a equação deste círculo é $x^2 + y^2 = 1$ então $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$ (*).

Para chegar as duas seguintes, divida (*) por $\cos^2\alpha$ e $\operatorname{sen}^2\alpha$, respectivamente, e depois aplique as fórmulas acima.

Estas seis fórmulas a seguir já foram vistas, como correspondências entre ângulos simétricos.

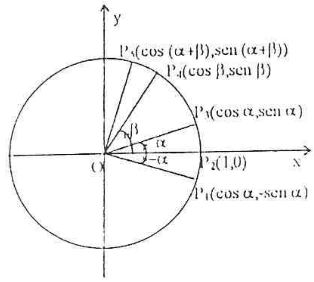
- $\boxed{\cos(-\alpha) = \cos\alpha}$ $\boxed{\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha}$ $\boxed{\tan(-\alpha) = -\tan\alpha}$
- $\boxed{\cot(-\alpha) = -\cot\alpha}$ $\boxed{\sec(-\alpha) = \sec\alpha}$ $\boxed{\csc(-\alpha) = -\csc\alpha}$

Estas quatro também já foram vistas, como correspondências entre ângulos complementares:

- $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha}$ $\boxed{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha}$ $\boxed{\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha}$ $\boxed{\csc\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sec\alpha}$

Fórmulas de Adição e Subtração de Arcos:

- $\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$



Esta é a mais trabalhosa de deduzir, mas sua dedução é bonita, veja:

Considere os cinco pontos P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, no círculo trigonométrico, como na figura.

Observe que os triângulos OP_2P_5 e OP_1P_4 são iguais.

Logo $\left(d(P_2,P_5)\right)^2 = \left(d(P_1,P_4)\right)^2$.

Aplicando a fórmula de distância entre dois pontos:

$\left(\cos(\alpha+\beta) - 1\right)^2 + \left(\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\right)^2 = \left(\cos\beta - \cos\alpha\right)^2 + \left(\operatorname{sen}\beta - (-\operatorname{sen}\alpha)\right)^2$.

Desenvolvendo os quadrados:

$\cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos(\alpha+\beta) + 1 + \operatorname{sen}^2(\alpha+\beta) = \cos^2\beta - 2\cos\beta\cos\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta + 2\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha$.

Simplificando, chegamos ao que queríamos: $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

- $\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$

Aplicando a fórmula anterior: $\cos(\alpha - \beta) = \cos\left(\alpha + (-)\beta\right) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\beta)$

Pelas fórmulas de ângulos simétricos, chegamos ao que queríamos: $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

- $\boxed{\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha}$

Pela fórmula de ângulos complementares, temos: $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right)$.

Aplicando a fórmula anterior no lado direito da igualdade: $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\operatorname{sen}\beta$

Pelas fórmulas de ângulos complementares, chegamos a: $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$.

- $\boxed{\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha}$ Dedução análoga a de $\cos(\alpha - \beta)$.

Fórmulas de Arco Duplo

- $\boxed{\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}$ $\boxed{\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$ (Imediatas, faça $2\alpha = \alpha + \alpha$ e aplique as fórmulas da adição).

8.8.2 Fórmulas Classificadas:

- Fórmulas dos quadrados

$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad 1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha \qquad 1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$

- Fórmulas de Adição e Subtração de Arcos

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad \operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \operatorname{sen}\beta\cos\alpha \qquad \tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

- Fórmulas do Arco Duplo

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \qquad \operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \qquad \tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

- Fórmulas do Arco Metade

$\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2} \qquad \operatorname{sen}^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2} \qquad \tan^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

- Fórmulas do Produto

$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right) \qquad \cos\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right)$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right) \qquad \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$

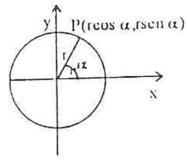
- Fórmulas de Fatoração

$$\operatorname{sen}\alpha \pm \operatorname{sen}\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha \pm \beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

8.9 Coordenadas de um ponto numa circunferência de raio qualquer



Considere um ponto $P(x,y) = P(r\cos\alpha, r\operatorname{sen}\alpha)$.

Afirmação: Este ponto está numa circunferência de raio r com centro na origem.

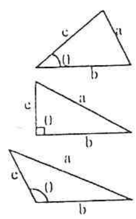
De fato:

$x^2 + y^2 = (r\cos\alpha)^2 + (r\operatorname{sen}\alpha)^2 = r^2\cos^2\alpha + r^2\operatorname{sen}^2\alpha = r^2(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) = r^2$,

isto é, as coordenadas do ponto P satisfazem a equação da circunferência $x^2 + y^2 = r^2$.

8.10 Relações trigonométricas num triângulo qualquer

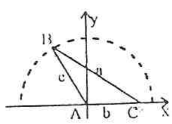
8.10.1 Lei dos Cossenos



Qualquer que seja o triângulo de lados a, b e c, e ângulo θ entre b e c, temos:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\theta}$$

De fato:



Considere um triângulo qualquer ABC de lados a, b, c,. o ponto B sobre a semi-circunferência de raio c e centro na origem, o ponto C no semi-eixo positivo Ox e o ponto A na origem, como na figura ao lado.

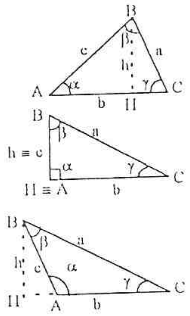
Observe que: $\quad a = d(C,B), \quad C(b,0) \quad$ e $\quad B(c\cos\theta, c\operatorname{sen}\theta)$.

Logo, pela fórmula de distância, temos:

$a^2 = (c\cos\theta - b)^2 + (c\operatorname{sen}\theta)^2 \Rightarrow a^2 = c^2\cos^2\theta - 2bc\cos\theta + b^2 + c^2\operatorname{sen}^2\theta \Rightarrow$

$a^2 = c^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) + b^2 - 2bc\cos\theta \Rightarrow \quad a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos\theta$.

6.10.2 Lei dos Senos



Qualquer que seja o triângulo de lados a, b, c, e respectivos ângulos opostos α, β, γ,

temos: $\boxed{\dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\gamma}}$

"Em todo triângulo, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos".

De fato:

Considere h a altura do triângulo relativa ao lado b, como na figura, em qualquer dos três triângulos.

Do triângulo ABH: $h = c\operatorname{sen}\alpha$; do triângulo CBH: $h = a\operatorname{sen}\gamma \Rightarrow a\operatorname{sen}\gamma = c\operatorname{sen}\alpha \Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\gamma}}$

Considere agora o triângulo com os 3 ângulos agudos. Observe que $\beta = \pi - (\alpha + \lambda) \Rightarrow \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(\alpha + \gamma)$.

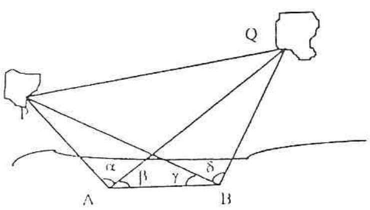
Assim: $\dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}(\alpha+\lambda)} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\alpha\cos\gamma + \operatorname{sen}\gamma\cos\alpha} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\frac{HC}{a} + \operatorname{sen}\gamma\cdot\frac{AH}{c}} = \dfrac{b}{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}\cdot HC + \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}\cdot AH}$.

Como $\dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{c} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{a}$ e $b = AH + HC$, temos: $\dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{b}{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}(HC + AH)} = \dfrac{b\cdot a}{(\operatorname{sen}\alpha)\cdot b} \Rightarrow \boxed{\dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha}}$

No caso em que um dos ângulos é obtuso, é análogo. Faça como exercício.

No caso em que um dos ângulos é reto, temos: $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = 1$, recaindo nas conhecidas relações.

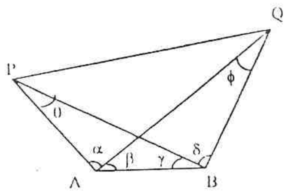
Exemplo:



Para determinar a distância entre dois pontos P e Q, um em cada ilha, um topógrafo, situado na praia, coloca duas marcas nos pontos A e B, e mede suas distâncias. Depois estaciona seu teodolito no ponto A, mede os ângulos α e β, em seguida no ponto B e mede os ângulos γ e δ, como estão representados na figura.

Como ele determina a distância entre os pontos que estão um em cada ilha?

Solução:



Queremos calcular PQ. Pela Lei dos Cossenos, no triângulo BPQ, temos:

$$PQ^2 = PB^2 + BQ^2 - 2\cdot PB\cdot BQ\cdot\cos\delta .$$

Como δ já é conhecido, podemos calcular $\cos\delta$.

Assim, falta determinar PB e BQ. Para isto será aplicada a Lei dos Senos da seguinte forma:

Do triângulo APB: $\dfrac{PB}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} = \dfrac{AB}{\operatorname{sen}\theta}$; mas $\theta = 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) \Rightarrow PB = \dfrac{AB\cdot\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)}$.

Do triângulo ABQ: $\dfrac{BQ}{\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{AB}{\operatorname{sen}\phi}$; mas $\phi = 180^\circ - (\beta + \gamma + \delta) \Rightarrow BQ = \dfrac{AB\cdot\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\beta+\gamma+\delta)}$.

Agora basta calcular estes valores e substituir na primeira fórmula.

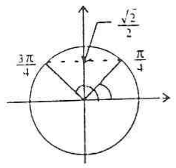
9. Equações e Inequações Trigonométricas

9.1 Equações Trigonométricas

Equações trigonométricas são equações onde aparecem termos de um dos tipos sen, cos, tan, cot, sec, csc, de expressões que envolvem uma incógnita.

Exemplos: 1) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $2\cos^2\alpha + 3\operatorname{sen}\alpha - 3 = 0$ 3) $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}2\alpha + \operatorname{sen}3\alpha + \operatorname{sen}4\alpha = 0$

Obs. Não é possível estabelecermos um método geral para resolver todas as equações trigonométricas. Vamos ver a resolução de alguns exemplos.

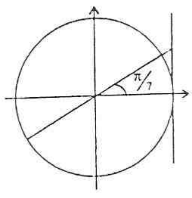


Exemplo 1 Resolva a equação: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Resolução: Observe a figura ao lado. A partir dela percebemos que as duas únicas soluções para $\alpha \in [0, 2\pi)$, são $\alpha = \frac{\pi}{4}$ e $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

Como o período de $\operatorname{sen}\alpha$ é 2π, a solução geral é:

$$S = \{\alpha \in \mathbb{R}; \alpha = \tfrac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{e} \quad \alpha = \tfrac{3\pi}{4} + 2k\pi, \ \text{com } k \in \mathbb{Z}\}$$



Exemplo 2 Resolva a equação: $\tan\alpha - \tan\frac{\pi}{7} = 0$

Resolução: $\tan\alpha - \tan\frac{\pi}{7} = 0 \Rightarrow \tan\alpha = \tan\frac{\pi}{7}$

Observando a figura ao lado notamos que $\alpha = \frac{\pi}{7}$ é a única solução entre 0 e π.

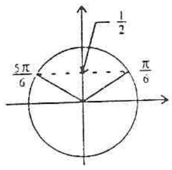
Como o período de $\tan\alpha$ é π a solução geral é:

$$S = \{\alpha \in \mathbb{R}; \alpha = \tfrac{\pi}{7} + k\pi, \ \text{com } k \in \mathbb{Z}\}$$

Exemplo 3 Resolva a equação: $2\cos^2\alpha + 3\operatorname{sen}\alpha - 3 = 0$

Resolução: Substituindo $\cos^2\alpha$ por $1 - \operatorname{sen}^2\alpha$ no 1º membro da equação, temos:

$2(1 - \operatorname{sen}^2\alpha) + 3\operatorname{sen}\alpha - 3 = 0$, ou seja, $2\operatorname{sen}^2\alpha + 3\operatorname{sen}\alpha + 1 = 0$. Resolvendo esta equação do 2º grau em $\operatorname{sen}\alpha$, teremos $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2}$. Logo $\operatorname{sen}\alpha = 1$ ou $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$.



De $\operatorname{sen}\alpha = 1$, concluímos que $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

De $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$, concluímos que $\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $\alpha = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim:

$$S = \{\alpha \in \mathbb{R}; \alpha = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \alpha = \tfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \ \alpha = \tfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, \ \text{com } k \in \mathbb{Z}\}$$

Exemplo 4 Resolva a equação: $\operatorname{sen}\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha = 1$

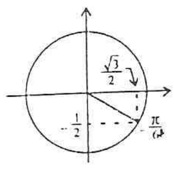
Resolução: Temos que: $\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha = 1 \\ \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$. Da primeira equação segue que $\operatorname{sen}\alpha = 1 - \sqrt{3}\cos\alpha$.

Substituindo na segunda equação, segue que: $\left(1 - \sqrt{3}\cos\alpha\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$. Desenvolvendo esta equação:

$1 - 2\sqrt{3}\cos\alpha + 3\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 4\cos^2\alpha - 2\sqrt{3}\cos\alpha = 0 \Rightarrow 2\cos\alpha\left(2\cos\alpha - \sqrt{3}\right) = 0$.

Logo: $\cos\alpha = 0$ ou $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Observe que os seguintes sistemas de equações devem ser satisfeitos:

$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha = 1 \\ \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \\ \cos\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$ ou



$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha = 1 \\ \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \\ \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$$S = \{\alpha \in \mathbb{R}; \alpha = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{e} \quad \alpha = -\tfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \ \text{com } k \in \mathbb{Z}\}$$

Exemplo 5 Resolva a equação: $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}2\alpha + \operatorname{sen}3\alpha + \operatorname{sen}4\alpha = 0$

Resolução: Aplicando a fórmula do produto ao primeiro membro, temos:

$2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-2\alpha}{2}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{3\alpha+4\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{3\alpha-4\alpha}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\operatorname{sen}\left(\frac{3\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{-\alpha}{2}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{7\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{-\alpha}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow \quad 2\cos\left(\frac{-\alpha}{2}\right)\left[\operatorname{sen}\left(\frac{3\alpha}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{7\alpha}{2}\right)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\cos\left(\frac{-\alpha}{2}\right)\cdot 2\operatorname{sen}\left[\frac{\frac{3\alpha}{2}+\frac{7\alpha}{2}}{2}\right]\cos\left[\frac{\frac{3\alpha}{2}-\frac{7\alpha}{2}}{2}\right] = 0$

$\Rightarrow \quad 4\cos\left(\frac{-\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{5\alpha}{2}\right)\cos(-\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{5\alpha}{2}\right)\cos(\alpha) = 0.$

Logo: $\cos\frac{\alpha}{2} = 0$ ou $\operatorname{sen}\left(\frac{5\alpha}{2}\right) = 0$ ou $\cos(\alpha) = 0$. Assim:

$\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou $\frac{5\alpha}{2} = k\pi$ ou $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \quad \Rightarrow \alpha = \pi + 2k\pi$ ou $\alpha = \frac{2\pi}{5}k\pi$ ou $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$

$$S = \left\{\alpha = \pi + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \alpha = \tfrac{2\pi}{5}k\pi \quad \text{ou} \quad \alpha = \tfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z\right\}$$

Exemplo 6 Resolva a equação: $\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{-1}{2}$ no intervalo $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

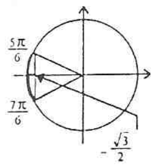
Resolução: Como $\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \cos 2\alpha$ temos que: $\cos 2\alpha = \frac{-1}{2}$.

Mas $\frac{-\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\pi \le 2\alpha \le \pi$. Logo: $2\alpha = \frac{-2\pi}{3}$ ou $2\alpha = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{-\pi}{3}$ ou $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

$$S = \left\{\frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$$

9.2 Inequações Trigonométricas

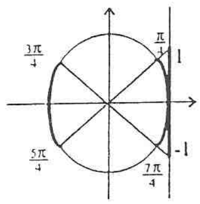
Exemplo 1 Resolva a inequação: $\cos\alpha < -\frac{\sqrt{3}}{2}$



Resolução: A partir desta figura devemos perceber que: $\frac{5\pi}{6} < \alpha < \frac{7\pi}{6}$.

$$S = \left\{\alpha \in R;\ \tfrac{5\pi}{6} + 2k\pi < \alpha < \tfrac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z\right\}$$

Exemplo 2 Resolva a inequação: $|\tan\alpha| < 1$ para $0 \le \alpha \le 2\pi$.



Resolução: $|\tan\alpha| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < \tan\alpha < 1$

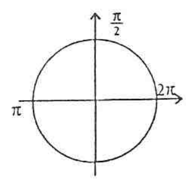
No intervalo $0 \le \alpha \le 2\pi$ temos:

$S = \left\{\alpha \in R;\ 0 \le \alpha < \frac{\pi}{4}\ \text{ou}\ \frac{3\pi}{4} \le \alpha < \frac{5\pi}{4}\ \text{ou}\ \frac{7\pi}{4} \le \alpha \le 2\pi\right\}$

Exemplo 3 Resolva a inequação: $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}\alpha \le 1$

Resolução: $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}\alpha \le 1 \quad \Rightarrow \quad 1 - \operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}\alpha \le 1$

$-\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}\alpha \le 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}\alpha \ge 0$



Resolvendo esta inequação de 2º grau em $\operatorname{sen}\alpha$:

$\operatorname{sen}\alpha(\operatorname{sen}\alpha - 1) \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\alpha \ge 1$ ou $\operatorname{sen}\alpha \le 0$.

De $\operatorname{sen}\alpha \ge 1$ temos $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z$

De $\operatorname{sen}\alpha \le 0$ temos $\pi + 2k\pi \le \alpha \le 2\pi + 2k\pi,\ k \in Z$

$$S = \left\{\alpha \in R;\ \alpha = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \pi + 2k\pi \le \alpha \le 2\pi + 2k\pi,\ k \in Z\right\}$$