

### 15. Funções Trigonômicas

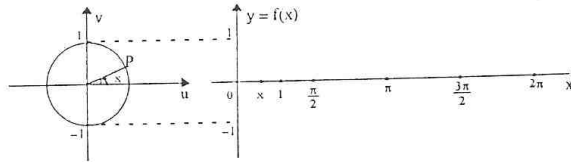
#### 15.1 Função Periódica

Uma função  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  é periódica se existir um número real  $p > 0$  tal que:  
 $f(x+p) = f(x)$ , para todo  $x$  e  $x+p$  em  $D$ .  
 O menor valor de  $p$  que satisfaz a condição acima é chamado período de  $f$ .

#### 15.2 Funções Trigonômicas. Definições e Gráficos

Construiremos o gráfico das funções trigonométricas a partir do círculo trigonométrico, como descrito abaixo. Observe também a figura a seguir.

- Adotaremos um sistema de coordenadas  $uOv$  para representar o círculo trigonométrico e um sistema de coordenadas  $xOy$  para representar o gráfico da função trigonométrica.
- Adotaremos como unidade de medida no sistema  $xOy$  o raio do círculo trigonométrico. Não esqueça que  $\pi \approx 3,14$ . O ângulo de  $x$  radianos no círculo trigonométrico será representado no eixo das abscissas do sistema  $xOy$ .
- Lembre que a todo ângulo de  $x$  radianos está associado um único número real  $P$  do círculo trigonométrico. O valor da ordenada,  $y = f(x)$ , no sistema  $xOy$ , será obtido a partir deste ponto  $P$ .



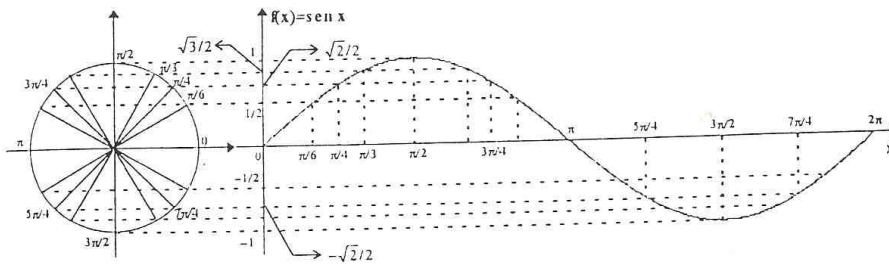
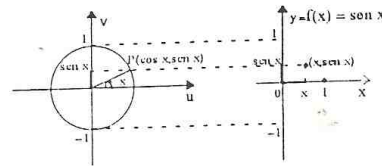
#### 15.2.1 Função Seno

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

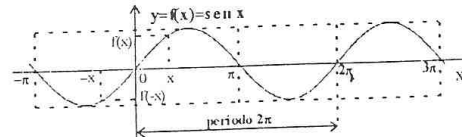
$$f(x) = \text{sen } x$$

$$\text{Domínio} = \mathbb{R}$$

$$\text{Imagem} = [-1, 1]$$



- A função seno é periódica de período  $2\pi$
- A função seno é ímpar:  
 $\text{sen}(-x) = -\text{sen } x, \forall x \in \mathbb{R}$



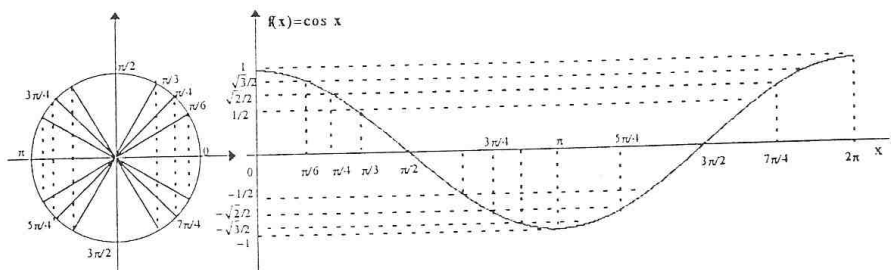
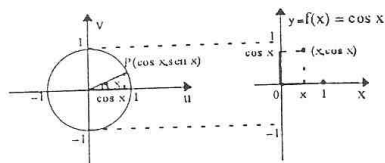
15.2.2 Função Cosseno

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \cos x$

Domínio =  $\mathbb{R}$

Imagem =  $[-1, 1]$

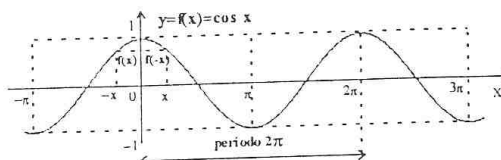


- A função cosseno é periódica de período  $2\pi$

$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$

- A função cosseno é par:

$\cos(-x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$



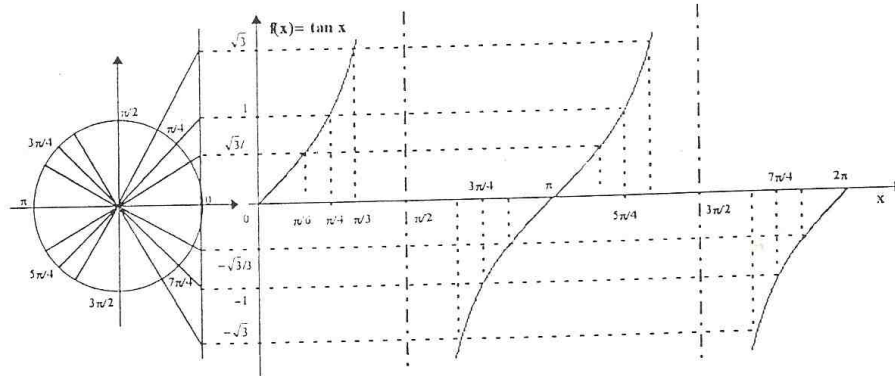
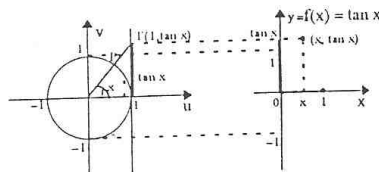
15.2.3 Função Tangente

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \tan x$

Domínio =  $\{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Imagem =  $\mathbb{R}$

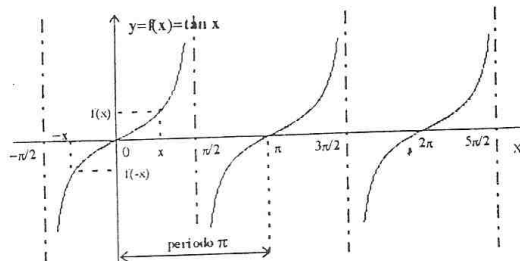


- A função tangente é periódica de período  $\pi$

$\tan(x + \pi) = \tan x, \forall x \in D$

- A função tangente é ímpar:

$\tan(-x) = \frac{\text{sen}(-x)}{\text{cos}(-x)} = \frac{-\text{sen } x}{\text{cos } x} = -\tan x, \forall x \in D$



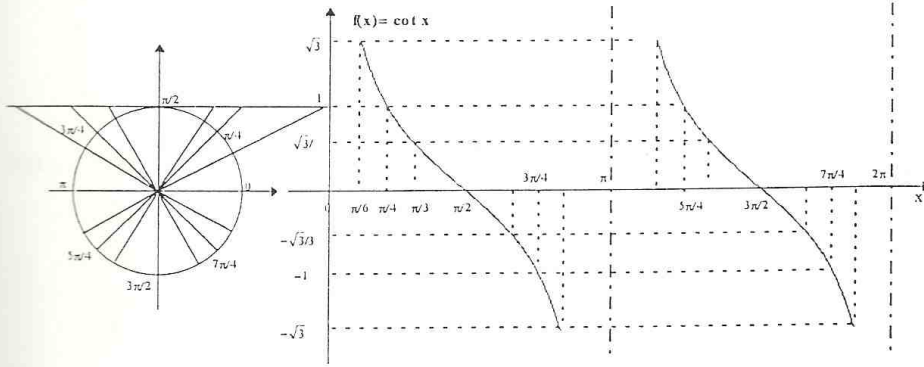
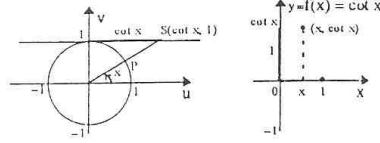
15.2.4 Função Cotangente

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \cot x$

Domínio =  $\{x \in \mathbb{R} / x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

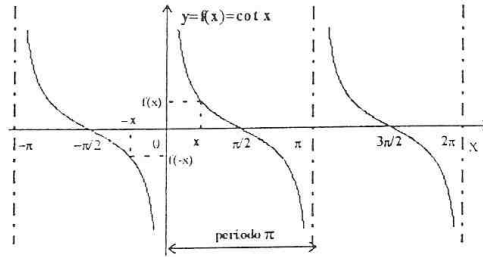
Imagem =  $\mathbb{R}$



• A função cotangente é periódica de período  $\pi$   
 $\cot(x + \pi) = \cot x, \forall x \in D$

• A função cotangente é ímpar:

$\cot(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\cot x, \forall x \in D$



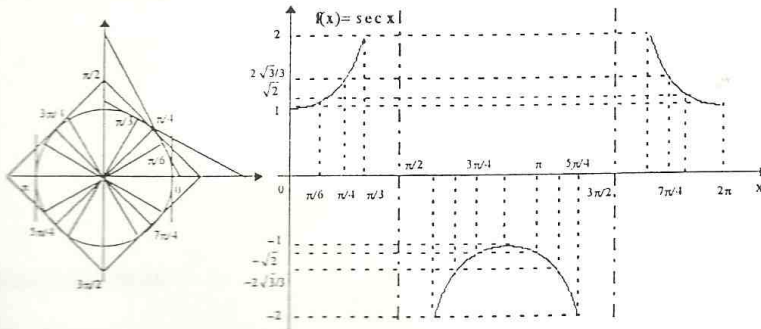
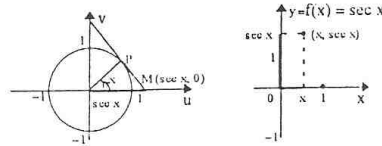
15.2.5 Função Secante

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \sec x$

Domínio =  $\{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

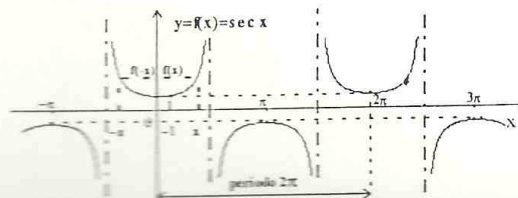
Imagem =  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



• A função secante é periódica de período  $2\pi$   
 $\sec(x + 2\pi) = \sec x, \forall x \in D$

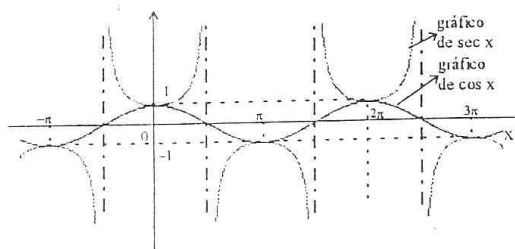
• A função secante é par:

$\sec(-x) = \frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x, \forall x \in D$



Vamos comparar os gráficos :

$f(x) = \sec x$  e  $g(x) = \cos x$



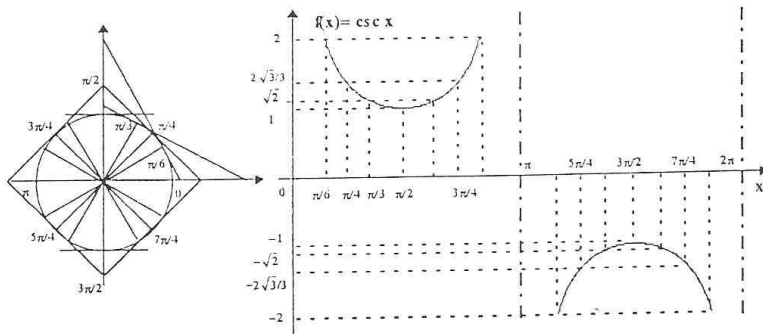
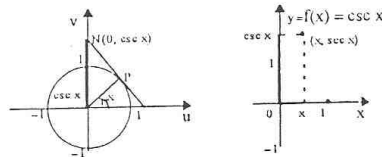
15.2.6 Função Cossecante

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \csc x$

Domínio =  $\{x \in \mathbb{R} / x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

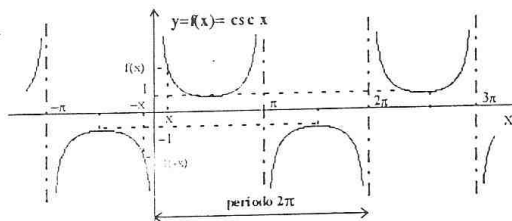
Imagem =  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



- A função cossecante é periódica de período  $2\pi$   
 $\csc(x + 2\pi) = \csc x, \forall x \in D$

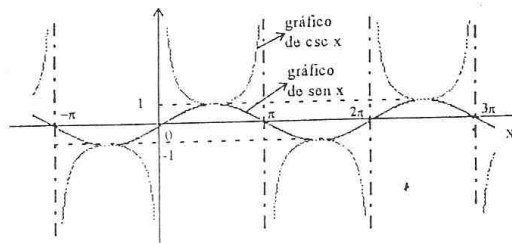
- A função cossecante é ímpar:

$\csc(-x) = \frac{1}{\text{sen}(-x)} = \frac{1}{-\text{sen } x} = -\csc x, \forall x \in D$



Vamos comparar os gráficos :

$f(x) = \csc x$  e  $g(x) = \text{sen } x$



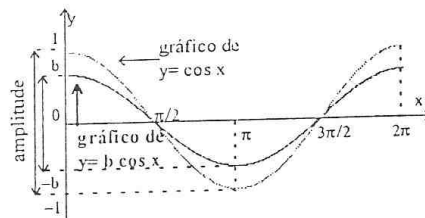
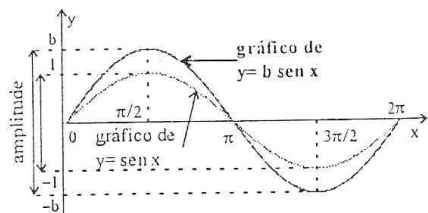
15.3 Gráficos das funções:  $F(x) = a + b \operatorname{sen}(cx + d)$  e  $G(x) = a + b \operatorname{cos}(cx + d)$

Os gráficos destas funções serão desenhados a partir dos gráficos de  $f(x) = \operatorname{sen} x$  e  $g(x) = \operatorname{cos} x$

I) O parâmetro b modifica a amplitude das funções  $y = f(x) = \operatorname{sen} x$  e  $y = g(x) = \operatorname{cos} x$

$F(x) = b \operatorname{sen} x \quad b > 1$

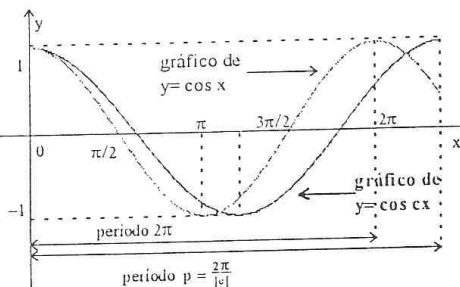
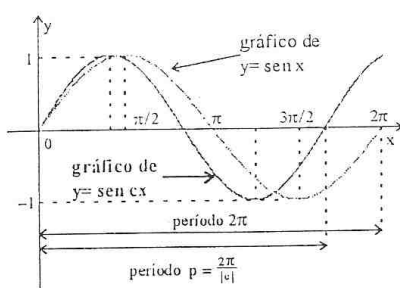
$G(x) = b \operatorname{cos} x \quad 0 < b < 1$



II) O parâmetro c modifica o período das funções  $y = f(x) = \operatorname{sen} x$  e  $y = g(x) = \operatorname{cos} x$

$F(x) = \operatorname{sen} cx \quad c > 1$

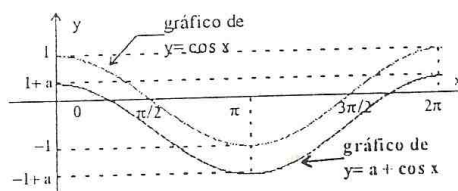
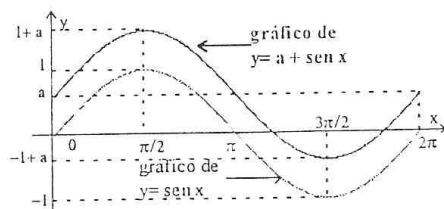
$G(x) = \operatorname{cos} cx \quad 0 < c < 1$



III) O parâmetro a é responsável por uma translação vertical dos gráficos das funções  $y = f(x) = \operatorname{sen} x$  e  $y = g(x) = \operatorname{cos} x$

$F(x) = a + \operatorname{sen} x \quad a > 0$

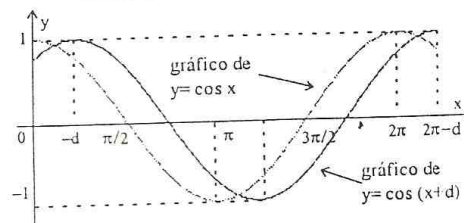
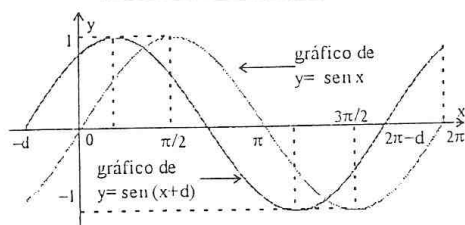
$G(x) = a + \operatorname{cos} x \quad a < 0$



IV) O parâmetro d é responsável por uma translação horizontal dos gráficos das funções  $y = f(x) = \operatorname{sen} x$  e  $y = g(x) = \operatorname{cos} x$

$F(x) = \operatorname{sen}(x + d) \quad d > 0$

$G(x) = \operatorname{cos}(x + d) \quad d < 0$





Exercícios

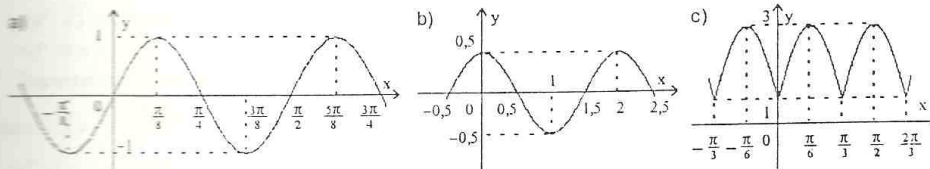
1) Dê exemplo de uma função periódica que não seja trigonométrica.

2) Construa o gráfico, dê o domínio, a imagem e o período da funções:

- a)  $y = -\sin x$       b)  $y = 2 \cos x$       c)  $y = \sin 4x$       d)  $y = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$   
 e)  $y = |\sin x|$       f)  $y = 1 + \cos x$       g)  $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$       h)  $y = |\cos x|$   
 i)  $y = 1 + 2 \cos 4x$       j)  $y = -1 + 2 \sin 2x$       k)  $y = |1 + 2 \cos 4x|$       l)  $y = -1 + 2 \sin 2x$

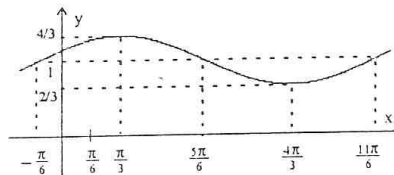
3) Sendo a, b, c, d números reais positivos, determine a imagem e o período de  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = a + b \sin(cx + d)$ .

4) Os gráficos a seguir são referentes a funções periódicas definidas em  $\mathbb{R}$ . Dê o período de cada uma delas.

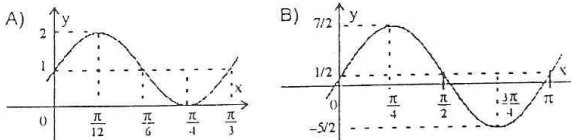


5) Este é o gráfico de uma função  $f(x)$ , periódica, definida em  $\mathbb{R}$ . Dê os valores de x, tais que:

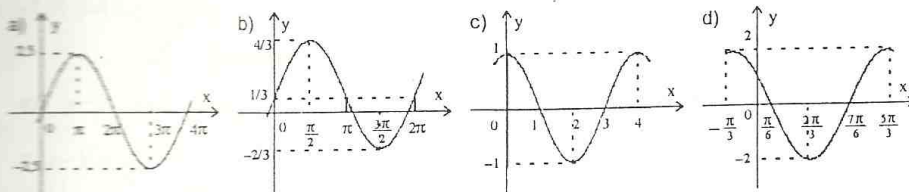
- a)  $f(x) = 1$       b)  $f(x) \leq 1$       c)  $f(x) > 1$



6) Sabendo que os gráficos ao lado são de funções do tipo  $f(x) = a + b \sin cx$ , definidas em  $\mathbb{R}$ , encontre os valores de a, b e c.



7) Identifique cada uma das funções que estes gráficos representam:



8) Construa o gráfico, dê o domínio, a imagem e o período das funções:

- a)  $f(x) = \tan 3x$       b)  $f(x) = 1 + \cot\left(\frac{x}{2}\right)$       c)  $f(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$   
 d)  $f(x) = |1 + \tan x|$       e)  $f(x) = \sec 2x$