Resolução da Lista 1 de Cálculo Diferencial e Integral Aplicado I

Por: Camila Fontoura Paulo

Orientadora: Cruz Sonia Quiroga de Caldas

Questão 19

Resolva para x e represente a solução na reta numérica

$$\left|\frac{1}{x - 2}\right| \leq \left|\frac{5}{2x - 1}\right|$$

Solução

A expressão dada é equivalente a

$$\frac{1}{|x-2|} \leq \frac{5}{|2x-1|}$$

Considerando $x \neq 2$ e $x \neq \frac{1}{2}$ e multiplicando ambos os membros pelo produto $|x-2|.|2x-1| > 0$, a desigualdade não muda assim obtemos:

$$\frac{1.|x-2|.|2x-1|}{|x-2|} \leq \frac{5.|x-2|.|2x-1|}{|2x-1|}$$

$|2x-1| \leq 5|x-2|$

Assim utilizando uma das propriedades de inequações modulares temos:

$-5|x-2| \leq 2x-1 \leq 5|x-2|$

Logo,

$$\overbrace{-5|x-2| \leq 2x-1}^{1} \wedge \overbrace{5|x-2| \geq 2x-1}^{2}$$

Solução de 1) $-5|x-2| \leq 2x-1$

Podemos multiplicar a inequação por (-1) alterando seu sinal de desigualdade.

$5|x-2| \geq -(2x-1)$

Desta inequação teremos duas inequações.

$$\overbrace{5(x-2) \geq -(2x-1)}^{1.1} \text{ ou } \overbrace{5(x-2) \leq 2x-1}^{1.2}$$

1.1) $-2x+1 \leq 5x-10$, para $x > 2$

$-7x \leq -11$

$7x \geq 11$

$x \geq \frac{11}{7}$

Pela interseção dos intervalos:

Resulta em

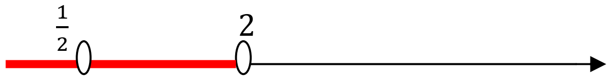
Logo, temos o intervalo $(2,+\infty)$.

1.2) $-2x+1 \leq -5x+10$, para $x < 2$

$3x \leq 9$

$x \leq 3$

Pela interseção dos intervalos:



Resulta em

Logo, temos o intervalo $(-\infty,\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2},2)$.

Para encontramos o intervalos correspondente a resposta da primeira parte da inequação inicial faremos a união dos intervalos da inequação 1.1 e 1.2, ou seja, $(-\infty,\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2},2) \cup (2,+\infty)$(intervalo 3).

Solução de 2) $5|x-2| \geq 2x-1$

Desta inequação teremos duas inequações:

$\overbrace{5(x-2) \geq 2x-1}^{2.1}$ ou $\overbrace{5(x-2) \geq 2x-1}^{2.2}$

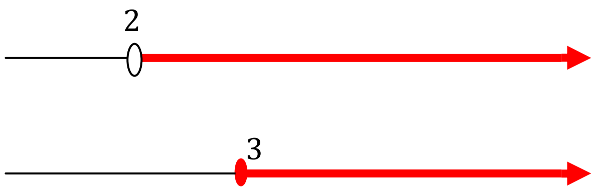
2.1) $2x-1 \leq 5x-10$, se $x > 2$

$-3x \leq -9$

$3x \geq 9$

$x \geq 3$

Pela interseção dos intervalos:



Resulta em

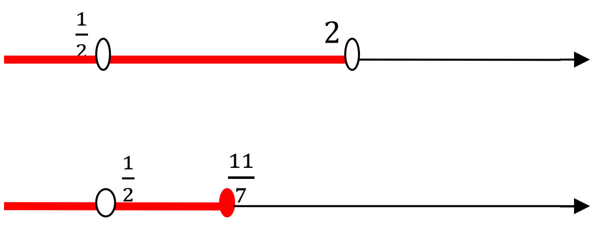
Logo, temos o intervalo $[3, +\infty)$.

2.2) $2x-1 \leq -5x+10$, para $x < 2$

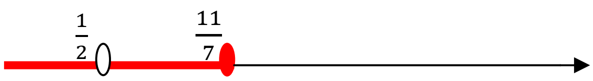
$7x \leq 11$

$x \leq \frac{11}{7}$

Pela interseção dos intervalos:



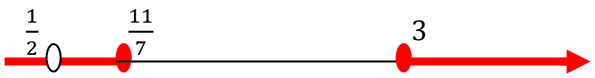
Resulta em



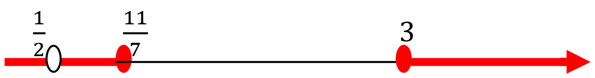
Logo, temos o intervalo $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{11}{7}]$.

Para encontramos o intervalos correspondente a resposta da segunda parte da inequação inicial faremos a união dos intervalos da inequações 2.1 e 2.2, ou seja, $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{11}{7}] \cup [3, +\infty)$(intervalo 4).

Para a resposta final temos a interseção dos intervalos 3 e 4.



Resulta em



Logo, a resposta final da inequação será: $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{11}{7}] \cup [3, +\infty)$.

<u>Questão 44</u>

<u>Esboçe o gráfico da função, especificando o domínio, a imagem e, quando possível, a paridade.</u>

$$y = \frac{|x^3 - 5x^2 + 2x + 8|}{x-2}$$

<u>Solução</u>

Temos $y = \frac{|x^3 - 5x^2 + 2x + 8|}{x-2} = \begin{cases} \frac{x^3-5x^2+2x+8}{x-2}, \text{ se } x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \geq 0 \\ \frac{-(x^3-5x^2+2x+8)}{x-2}, \text{ se } x^3 - 5x^2 + 2x + 8 < 0 \end{cases}$

Sabe-se que o domínio da função é $\mathbb{R}$-{2}.

Vamos fatorar a equação

$x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$

Por tentativas temos que x = -1 é raiz da equação. Logo, pelo método de Briot-Ruffini .

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -5 & 2 & 8 \\ \hline -1 & 1 & -6 & 8 & 0 \end{array}$$

Logo, $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = (x+1)(x^2 - 6x + 8) = (x+1)(x-2)(x-4) = 0$, já que na equação de segundo grau por soma e produto temos $-6 = -(2+4)$ e $8 = 2.4$.

Logo ,

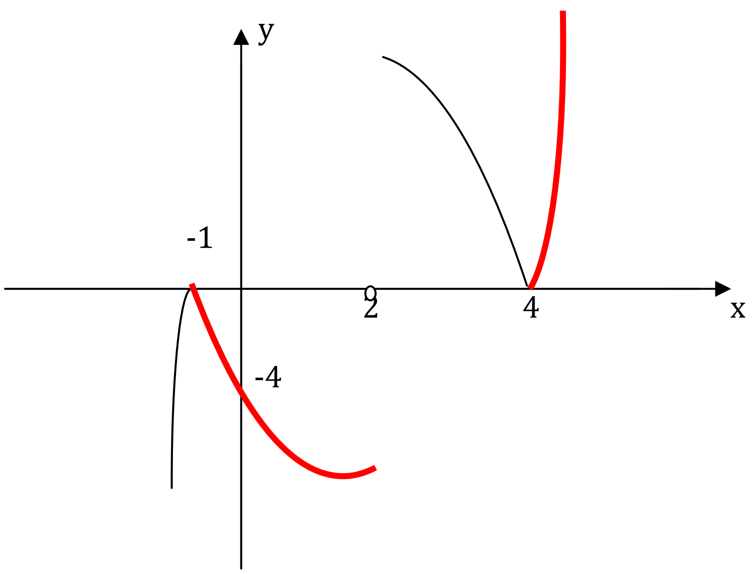
$$y = \frac{|(x+1)(x-2)(x-4)|}{x-2} = \begin{cases} (x+1)(x-4)\,, \text{se} (x+1)(x-2)(x-4) \geq 0 \\ -(x-1)(x-4)\,, \text{se } (x+1)(x-2)(x-4) < 0 \end{cases}$$

Observe que

	x < -1	x=-1	-1<x<2	x=2	2 < x < 4	x=4	x > 4
x+1	-	0	+		+	5	+
x-2	-	-3	-		+	2	+
x-4	-	-5	-		-	0	+
(x+1)(x-2)(x-4)	-	0	+	∄	-	0	+

$$y = \begin{cases} x^2 - 3x - 4\,, \text{se } x \in [-1,2) \cup [4, +\infty) \\ -x^2 + 3x + 4\,, \text{se } x \in (-\infty, -1) \cup (2,4) \end{cases}$$

Desta forma, podemos esboçar o gráfico:



A imagem da função dada é $\mathbb{R}$, pela análise gráfica.