Por: Camila Fontoura Paulo

Orientadora: Cruz Sonia Quiroga de Caldas

Questão 18

Sabendo que para x> 1, f(x) satisfaz $(x-1)^2 \leq (x^2-1)\, f(x) \leq (x+1)^2$, calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Solução

Pelo teorema do confronto, sejam três funções tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, para todo $x \neq a$; se $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, então existe $\lim_{x\to a} g(x)$ e também é igual a L.

Temos,

$(x-1)^2 \leq (x^2-1)\, f(x) \leq (x+1)^2$

Como $x\to+\infty$ podemos supor que $x>1$. Resulta que $x^2-1 > 0$ podemos dividir a desigualdade principal pelo termo x^2-1 sem ter que trocar a ordem da desigualdade.

$$\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} \leq f(x) \leq \frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{x-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{x-1}$$

Sabe-se que,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1+1-1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{2}{x+1}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1+1-1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x-1}{x-1} + \frac{2}{x-1}\right) = 1$$

Assim, pode-se afirmar pelo teorema do confronto que,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

Questão 25

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\operatorname{sen} x}}{x^3}$$

Solução

Note que $\frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\operatorname{sen} x}}{x^3}$ é uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ quando $x\to 0$. Vamos racionalizar o numerador.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\operatorname{sen} x}}{x^3} \cdot \frac{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\operatorname{sen} x}}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\operatorname{sen} x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+\tan x-1-\text{sen } x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\text{sen } x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\tan x-\text{sen } x}{x^3\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\text{sen } x}\right)} \cdot \frac{\cos x}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x-(\text{sen } x)(\cos x)}{x^3\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\text{sen } x}\right)(\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\text{sen } x)(1-\cos x)}{x^3\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\text{sen } x}\right)(\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\text{sen } x}} \cdot \sec x \qquad (1)$$

Observa-se que $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(\cos x)^2}{x^2(1+\cos x)} =$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\text{sen} x)^2}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

Sabemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1 \qquad (3)$$

Substituindo (2) e (3) em (1) resulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\text{sen} x}}{x^3} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$