Questão 4

Quantas retas tangentes ao gráfico de $y = x^3 + 3x$ são paralelas à reta $y = 6x+1$? Determine as equações dessas tangentes.

Solução

Sabe-se que a derivada no ponto $x = x_o$ é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função nesse ponto.

$m_1 = y' = 3x_o^2 + 3$

Para que a reta tangente seja paralela à reta dada no enunciado é necessário que seu coeficiente angular, m_1, seja igual ao da reta, $m_2=6$. Logo,

$m_1 = m_2$

$3x_o^2 + 3 = 6$

$x_o = \pm 1$

Assim, pode-se afirmar que existem duas retas tangentes paralelas a reta dada, uma reta corresponde ao $x_o = -1$ e a outra a $x_o = 1$.

A equação da reta tangente é: $y = f(x_o) + f'(x_o)(x- x_o)$

Logo,

Para $x_o = -1$,

$y = f(-1) + f'(-1)(x +1)$

$y = -4 + 6x + 6$

$y = 6x +2$

Para $x_o = 1$,

$y = f(1) + f'(1)(x-1)$

$y = 4 + 6x -6$

$y = 6x -2$

Questão 7

Determine a e b de modo que $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{se } x<1 \\ ax+b, & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$ seja diferenciável.

<u>Solução</u>

Observe que se $x < 1$ $f(x) = x^2$, que é uma função diferenciável e $f'(x) = 2x$.

Se $x > 1$ então $f(x) = ax+b$, e para a e b reais f é uma função diferenciável e $f'(x) = a$.

Para que f seja derivável resta que f seja diferenciável em $x=1$ e para isso as derivadas laterais terão que ser iguais no ponto $x = 1$.

Isto é,

$f'_+(1) = f'_-(1)$

Como $f'_+(1) = a$ e $f'_-(1) = 2$, temos

$a = 2$

Por outro lado se f é diferenciável em $x = 1$ então f é contínua em $x = 1$. Assim, em particular,

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$

Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (ax + b) = a+b$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 = 1$, temos

$a+b = 1$

$2+b=1$

$b = -1$