Questão 11

Sejam $f(x) = \sqrt{1+2x}$ e $g(x) = \sqrt{\tan x}$. Calcule $(fog)'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Solução

Observe que em particular g é diferenciável em $\frac{\pi}{4}$ e f é diferenciável em $g(\frac{\pi}{4})=1$.

Seja $F(x) = (f_o g)(x)$ então F é diferenciável em $\frac{\pi}{4}$ e $F'(x) = f'(g(\frac{\pi}{4})).g'(\frac{\pi}{4})$.

Observe que

$f'(x) = \frac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{1}{2}}.2 = (1+2x)^{-\frac{1}{2}}$

$g'(x) = = \frac{1}{2}(\tan x)^{-\frac{1}{2}}.(\sec x)^2$

$g(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{\tan \frac{\pi}{4}} = 1$

$g'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}(1)^{-\frac{1}{2}}.(\sqrt{2})^2 = 1$

Logo,

$(f_o g)'(\frac{\pi}{4}) = f'(1).1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Questão 13

Seja $g:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável; $g(0) = \frac{1}{2}$ e $g'(0)=1$.

Calcule $f'(0)$, onde

$f(x) = (\cos x).\ g^2(\tan \frac{x}{x^2+2})$

Solução

$f(x) = (\cos x).\ g^2(\tan \frac{x}{x^2+2}) = (\cos x).\left[g(\tan \frac{x}{x^2+2})\right]^2$

f é o produto de duas funções, logo para calcular $f'(x)$ devemos aplicar a regra do produto para derivadas.

$f'(x) = (\cos x).\left(\left[g(\tan \frac{x}{x^2+2})\right]^2\right)' + g^2(\tan \frac{x}{x^2+2}).(-\text{sen } x)$

$f'(x) = (\cos x).\, 2\left[g(\tan \frac{x}{x^2+2})\right]\left(g(\tan \frac{x}{x^2+2})\right)' - g^2(\tan \frac{x}{x^2+2})(\text{sen } x)$ (1)

Só resta calcular $\left(g(\tan \frac{x}{x^2+2})\right)'$

Seja $F(x) = g(\tan \frac{x}{x^2+2}) = g(h(x))$, onde $h(x) = \tan\left(\frac{x}{x^2+2}\right)$, F é composta de duas funções diferenciáveis no domínio da função logo pela regra da cadeia temos que

$F'(x) = g'(h(x)).h'(x)$

$F'(x) = g'(\tan \frac{x}{x^2+2}) . sec^2\left(\frac{x}{x^2+2}\right).\frac{(x^2+2)-x(2x)}{(x^2+2)^2}$

$F'(x) = g'(\tan \frac{x}{x^2+2}). sec^2\left(\frac{x}{x^2+2}\right).\frac{(2-x^2)}{(x^2+2)^2}$ (2)

Substituindo (2) em (1) temos

$f'(x) = 2(\cos x).\left[g(\tan \frac{x}{x^2+2})\right]\left[g'(\tan \frac{x}{x^2+2}). sec^2\left(\frac{x}{x^2+2}\right).\frac{(2-x^2)}{(x^2+2)^2}\right] - g^2(\tan \frac{x}{x^2+2})(\text{sen } x)$

Assim no ponto pedido

$f'(x) = 2\,(1)[g(0)][\frac{1}{2}\, g'(0)(1)] - g^2(0)\, .0$

$f'(x) = 2\,[\frac{1}{2}][\frac{1}{2} . 1 . 1]$

$f'(x) = \frac{1}{2}$