uff - Universidade Federal Fluminense
Departamento de Matemática Aplicada

Notas de Pré-Cálculo

Cristiane Ramos Ribeiro Argento

5-ª versão -fevereiro/2010

Sumário

OBSERVAÇÕES PRELIMINARES:

Quando a disciplina *Pré-Cálculo* começou a ser oferecida pelo Departamento de Matemática Aplicada, senti, imediatamente, a necessidade de ter um texto que servisse de apoio aos alunos, já que tal disciplina pertence a uma classe de disciplinas, que podemos classificar como sendo de transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior. Devido a essa peculiaridade, não tínhamos muitos livros que atendessem às necessidades do curso e dos alunos. Os livros eram elementares demais ou eram livros de Cálculo que apenas faziam revisão superficial de alguns assuntos, supondo os mesmos já bem conhecidos pelo aluno, ou ainda eram livros que traziam vários tópicos importantes para o Cálculo, em forma de resumo, porém sem aprofudar conceitos e assim não se adequavam à proposta do curso. Após vários períodos de experiência com alunos iniciantes, percebemos o quanto estes são deficientes no algebrismo elementar com os números reais, no conceito de função e nas noções de trigonometria. O que torna o curso de Pré-Cálculo importante para a maioria deles, já que têm a oportunidade de rever conceitos, organizar o que já aprenderam, consertar o que eventualmente foi transmitido de forma imprecisa e aprender conceitos importantes que, na verdade já deveriam saber, como ocorre com as noções de trigonometria.

Visando suprir um pouco essa deficiência, escrevi essas notas direcionando-as para o curso de Cálculo Diferencial e Integral para funções de uma variável real. Assim, com as ferramentas de que dispomos, num contexto mais restrito, podemos traçar gráficos, estudar o comportamento das funções em pontos singulares, abordar o conceito de máximos e mínimos de funções, esboçar regiões entre gráficos ou resolver e interpretar geometricamente uma equação ou inequação. Inicialmente, as "Notas de Pré-Cálculo"tratam dos Números Reais e suas propriedades algébricas e de ordem, que nos permitem resolver equações e inequações. Depois, tratamos de equações e inequações envolvendo módulos, raízes e expressões do 2^o grau, sempre que possível, aliando à leitura gráfica. Os Polinômios também são estudados e, então, começamos a trabalhar com equações e inequações de grau maior do que dois. Finalmente, introduzimos o conceito de Função, apresentamos as funções definidas verbalmente e os gráficos básicos que servirão para a construção dos demais. Nesse ponto, propositalmente, paramos as Notas e convidamos o aluno a utilizar um livro de Cálculo (sugerimos o Stewart vol. 1), para terminar o estudo das funções e esse é o primeiro contato dos alunos com tais livros. Essas notas constituem um material de apoio às aulas de Pré-Cálculo e serão enriquecidas com diversos exercícios e problemas propostos em sala de aula .

Espero que o texto "Notas de Pré-Cálculo"cumpra bem os objetivos para os quais foi direcionado. Proporcionando ao aluno uma bagagem maior para que possa aprender e apreciar as tão importantes ferramentas e ideias do Cálculo Diferencial e Integral.

Agora é com vocês alunos! O sucesso é proporcional ao estudo e à dedicação de vocês ao curso. Não aprendemos Matemática vendo o outro fazer e sim quando nós mesmos resolvemos enfrentar os desafios e resolver os problemas propostos, encarando nossos erros e limitações, para enfim, vencê-los.

CRISTIANE R. R. ARGENTO

1 Números Reais

1.1 Introdução

O homem já utilizou marcas em paredes de cavernas, gravetos e até ossos de animais para representar quantidades. A ideia de número acompanha a humanidade desde a antiguidade. Demorou muito até se chegar a escrita numérica utilizada hoje. Várias civilizações antigas, como os Babilônios, Egípcios, Romanos, Chineses e Maias, criaram diferentes sistemas de numeração. O sistema de números que utilizamos deriva do sistema dos Hindus, divulgado na Europa pelos Árabes, daí o nome sistema Hindu-Arábico. Até ser padronizado, por volta de 1450, após a invenção da imprensa, ele sofreu várias modificações.

O conjunto dos números *naturais* $\mathbb{N}$ está relacionado à contagem e é definido por

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ..\}$$ [1].

Nele há duas operações bem definidas , a soma (+) e o produto ($\times$ ou .). O conjunto dos números *inteiros* $\mathbb{Z}$ é formado por $\mathbb{N}$ e o conjunto dos opostos (ou simétricos) dos naturais, mais o elemento neutro , que é o zero , ou seja ,

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Em $\mathbb{Z}$, as operações de soma, produto e subtração (-) estão bem definidas.

O conjunto dos quocientes de inteiros, isto é , das frações de inteiros é dito o conjunto dos números *racionais*. Ele é descrito assim :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z} \;\; e \;\; q \neq 0 \right\}$$

Estão bem definidas em $\mathbb{Q}$, as operações de soma, produto, subtração (-) e divisão($\div$ *ou* /) por um racional não nulo. Durante muitos séculos acreditou-se que o conjunto dos números racionais era suficientemente grande para abrigar todos os valores encontrados nas medições de comprimento, área, volume, entre outras. Somente no século IV AC surgiu entre os discípulos de Pitágoras alguém que observou que na verdade não era bem assim! A medida da diagonal de um quadrado de lado l=1 e o próprio lado eram medidas *incomensuráveis*, isto é, não existe um segmento de reta w que caiba n vezes em l e m vezes na diagonal, que mede $\sqrt{2}$. Em termos modernos, isto significa que se existir um tal w, então $1 = n.w$ *e* $\sqrt{2} = m.w$ e portanto, chegamos ao resultado absurdo que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Esta constatação gerou uma grande crise no pitagorismo e na matemática grega, mostrando que o conjunto dos naturais mais as frações não eram suficientes para realizar todas as medições possíveis. Assim, o conceito de número foi ampliado e os números *irracionais* entraram em cena, isto é, o conjunto dos números racionais foi "completado"para não deixar de fora nenhuma medida. Desta forma, surgiu o conjunto dos números *reais* $\mathbb{R}$, bem como, de forma natural, sua representação na reta orientada, onde leva-se em conta também o oposto das medidas e o 0.

1.2 A reta orientada

Pensando nas medidas de comprimento é natural representar o conjunto dos reais positivos $\mathbb{R}_+$ e o zero numa semirreta orientada partindo do zero, onde fixamos uma unidade de comprimento u e os comprimentos vão aumentando à medida em que avançamos para a direita. Assim, cada medida tem um único lugar na reta e vice-versa, cada ponto diferento de 0 da semirreta corresponde a um comprimento. Ampliando a semirreta para a esquerda, formamos a reta orientada, onde à esquerda do zero marcamos os reais negativos de forma que cada um fique equidistante do seu oposto em relação à origem. Veja a figura abaixo:

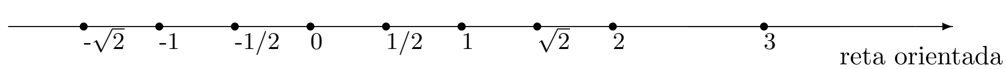


fig.1

---

[1]Dependendo do autor, o número 0 pode estar ou não incluído em $\mathbb{N}$. Não existe um consenso em torno do assunto.

1.3 As propriedades algébricas de $\mathbb{R}$

É possível construir $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{N}$, passando por $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, mas esse é um assunto que requer conhecimento mais avançado, o que foge do objetivo do presente texto. Aqui $\mathbb{R}$ será apresentado de forma axiomática, ou seja, vamos supor que existe um conjunto, dito dos números reais, que goza das propriedades algébricas abaixo relativas às operações de soma e produto.

Propriedade 1.3.1 *Fechamento*
$a+b\ ,\ a.b \in \mathbb{R}\ \ ,\forall a,b \in \mathbb{R}.$

Propriedade 1.3.2 *Comutatividade*
$a+b=b+a$ *e* $a.b=b.a,\ \forall a,b\in\mathbb{R}.$

Propriedade 1.3.3 *Associatividade*
$a+(b+c)=(a+b)+c\ ,\ a.(b.c)=(a.b).c,\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}.$

Propriedade 1.3.4 *Distributividade*
$a.(b+c)=a.b+a.c\ ,\ (b+c).a=b.a+c.a,\ \ \forall a,b,c\in\mathbb{R}.$

Propriedade 1.3.5 *Elemento Neutro*
$a+0=a\ ,\ a.1=a\ ,\ \ \forall a\in\mathbb{R}.$
O e 1 são respectivamente os elementos neutros da soma e da multiplicação. Mostra-se que são únicos.

Propriedade 1.3.6 *Lei do simétrico*
Para cada $a\in\mathbb{R}$*, existe um elemento -a em* $\mathbb{R}$*, tal que* $a+(-a)=(-a)+a=0$
(-a é único e é dito o simétrico de a).

Propriedade 1.3.7 *Lei do inverso*
Para cada $a\in\mathbb{R}$*,* $a\neq 0$*, existe um (único)elemento* $\frac{1}{a}\in\mathbb{R}$*, tal que* $a.\frac{1}{a}=\frac{1}{a}.a=1$
(1/a é o inverso de a e também é denotado por a^{-1} *)*

OBS: $a=0$ *não tem inverso, pois não existe elemento* $b\in\mathbb{R}$*, tal que* $0.b=1$ *(veja a propriedade abaixo)*

A operação de *subtração* é definida como $a-b:=a+(-b),\ \forall a,b\in\mathbb{R}$, isto significa a soma entre a e o simétrico de b.

A operação de *divisão* de a por b é definida $\forall a,b\in\mathbb{R},\ b\neq 0$, como o produto entre a e o inverso de b, ou seja

$$\frac{a}{b}:=a.\frac{1}{b}\ .$$

OBS: A divisão por 0 não é definida, já que 0 não tem inverso!

Das propriedades acima seguem as demais propriedades dos reais que nos são bem familiares :

Propriedade 1.3.8 *Para todo* $a,b\in\mathbb{R}$*, temos*

1. $a.0=0.a=0$
2. $-(-a)=a$
3. $(-a).(-b)=a.b$
4. $(-1).a=-a$
5. $\frac{-1}{a}=\frac{1}{-a}=-\frac{1}{a}$
6. $-(a+b)=-a-b$
7. $a.(-b)=(-a).b=-(a.b)$
8. $-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b},\ se\ b\neq 0$
9. $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}\ ,\ se\ \ b,d\ \neq 0$
10. $(\frac{a}{b})^{-1}=\frac{b}{a}\ \ se\ a,b\neq 0$
11. $\frac{a}{b}/\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}=\frac{a.d}{b.c}\ \ se\ b,c,d\neq 0$
12. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow a.d=b.c,\ \ se\ \ b,d\neq 0$
(igualdade entre frações)

As Leis de Cancelamento listadas a seguir são fundamentais na manipulação algébrica de equações, conforme veremos nas subseções 1.6.1 , 1.9.1 , 1.9.2, entre outras.

Propriedade 1.3.9 *Leis de Cancelamento*

1. $a + b = a + c \Leftrightarrow b = c$ *(Da soma)*
2. *Seja* $a \neq 0$. *Então,* $a.b = a.c \Leftrightarrow b = c$ *(Do produto)*

Observe que na Lei de Cancelamento do produto, o termo a ser cancelado deve ser não nulo. A falta de atenção com relação a esse fato nos induz frequentemente ao erro na resolução de equações. Portanto, fique atento!!!

Propriedade 1.3.10 *Lei do Anulamento*
$a.b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ *ou* $b = 0$

A lei acima é consequência da lei do cancelamento do produto.

OBS: As Leis de Cancelamento e do Anulamento são fundamentais para a resolução de equações (confira as seções 1.6 e 1.9) e juntas produzem a importante equivalência que utilizaremos com muita frequência :

Propriedade 1.3.11 *Sejam* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *então*
$a.b = a.c \Leftrightarrow a = 0$ *ou* $b = c$.

Para ilustrar rapidamente a propriedade acima, considere a equação $x^2 = x$. Observando que a equação dada é equivalente a $x.x = x.1$, aplicamos a *propriedade 1.3.11* e obtemos que a equação equivale a $x = 0$ ou $x = 1$, que são suas únicas soluções. Veja as seções 1.6 e 1.9 para outros exemplos.

1.4 As propriedades de ordem de $\mathbb{R}$

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, *diz-se que a é menor do que b* , escreve-se $a < b$, se $b - a > 0$. Na reta numérica, isto significa que b está à direita de a.
Também, a é *menor ou igual a* b [2], escreve-se $a \leq b$, quando $b - a \geq 0$, o que na reta numérica quer dizer que b está à direita de a ou representa o mesmo ponto que a.
Analogamente, definimos $a > b$, *a maior do que b* e $a \geq b$, *a maior ou igual a b.*

Propriedade 1.4.1 *Tricotomia*
Dados $a, b \in \mathbb{R}$, *vale uma e somente uma das relações :*

$$a < b \;,\; a = b \text{ ou } a > b.$$

Em termos algébricos, isso quer dizer que dois números reais quaisquer são sempre comparáveis. Geometricamente, significa que na reta, dados dois pontos quaisquer a e b, existem três possíveis posições para eles: a está à esquerda de b, ou a ocupa o mesmo ponto que b (são iguais), ou a está à direita de b.

Abaixo vamos estabelecer as *propriedades da relação de ordem* que são essenciais no estudo das inequações.

Propriedade 1.4.2 *Transitividade*
Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. *Se* $a < b$ e $b < c \Rightarrow a < c$.

Propriedade 1.4.3 *Monotonicidade da adição*
Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. *Então* $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$.

Propriedade 1.4.4 *Monotonicidade da multiplicação*
Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. *Então,*

1. *se* $c > 0$, *temos que* $a < b \Leftrightarrow a.c < b.c$.
2. *se* $c < 0$, *temos que* $a < b \Leftrightarrow a.c > b.c$.

Observe que na Monotonicidade da multiplicação a desigualdade inicial é invertida sempre que a mesma é multiplicada ou dividida por um número real negativo. Ocorrem muitos tropeços sempre que essa propriedade é negligenciada. Portanto, acautele-se e fique atento!

[2] Na verdade, a forma correta de se expressar é: *a menor do que ou igual a b* , mas raramente falamos assim, costumamos suprimir o *"do que"*.

Seguem das propriedades de ordem anteriores, as seguintes implicações:

Propriedade 1.4.5 .

1. $a < b \Leftrightarrow -a > -b$
2. *Se* $a < b$ *e* $c < d \Rightarrow a + c < b + d$.
3. *Se* $0 < a < b$ *e* $0 < c < d \Rightarrow ac < bd$.

Além dessas propriedades, também seguem as conhecidas regras de sinal: o produto entre dois números reais positivos é positivo, o produto entre dois números reais negativos é positivo e o produto entre dois de sinais opostos é negativo.

OBS: Dados $a, b \in \mathbb{R}$, tem-se $a = b \Leftrightarrow a \leq b$ *e* $b \leq a$. Frequentemente, recorremos a esta propriedade para mostrar que dois números são iguais.
As propriedades de 1.4.2 a 1.4.5 também valem para a relação " $\leq$ ", já que valem para a igualdade e para a desigualdade estrita, como vimos acima. Elas nos permitem fazer estimativas e manipular inequações a fim de resolvê-las, conforme veremos mais adiante.

1.5 Intervalos

São subconjuntos importantes da reta que denotamos por:

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\} \qquad (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$$
$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\} \qquad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$$
$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\} \qquad [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\}$$
$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\} \qquad (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a < x\}$$

Em muitas ocasiões também denota-se $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Os quatro intervalos da esquerda são *limitados*, [a,b] é um *intervalo fechado*, [a,b) é *fechado à esquerda*, (a,b] é*fechado à direita* e (a,b) é *aberto*. Os quatro intervalos da direita são *ilimitados* e denotam semirretas. O intervalo [a,b] pode ser degenerado, isto é, a pode ser igual a b e, então $[a,a] = \{a\}$.

OBS:

1. " $+\infty$" e " $-\infty$" NÃO são números! São apenas símbolos para representar que os intervalos continuam indefinidamente, respectivamente, para a direita e para a esquerda. Portanto, não podemos somá-los, mutiplicá-los ou executar qualquer operação como se fossem números.
2. Usa-se também a notação "]"em substituição ao parêntese "("e "["para ")". Por exemplo, $(0,1] \equiv]0,1]$ e $(3,5) \equiv]3,5[$.

1.6 Aplicações das propriedades de $\mathbb{R}$

1.6.1 Resolução de Equações

As equações aparecem na modelagem matemática de problemas nas diversas áreas do conhecimento. Resolver uma equação em $\mathbb{R}$ consiste em determinar os valores da incógnita que a satisfazem. Para resolvê-las não usamos truques e nem mágicas ! Usamos as propriedades dos reais e alguma engenhosidade para reduzi-las a equações elementares.
O objetivo dessa subseção é apresentar algumas[3] equações simples de se resolver, enfatizando assim, o uso das propriedades algébricas dos reais.

Exemplos:

1. Resolva a equação $x.(1-x).(5-6x) = 0$.
   Solução: Pela propriedade 1.3.10, a equação dada equivale a $x.(1-x) = 0$ ou $5 - 6x = 0$. Novamente, de 1.3.10 temos que as duas equações obtidas equivalem a $x = 0$ ou $1 - x = 0$ ou $5 - 6x = 0$. Utilizando a *Lei de Cancelamento da soma* 1.3.9 na segunda equação (somando x aos dois lados da equação) e pelas *Leis de Cancelamento da soma e do produto* 1.3.9, aplicadas à terceira equação(somamos -5 a ambos os lados e depois dividimos tudo por -6), segue que o conjunto solução é dado por S=$\left\{0, 1, \frac{5}{6}\right\}$.

[3] Veremos outros exemplos em sala de aula.

2. Resolva a equação $x^2 - 1 = (x-1).x^2$.
Solução: Observe que $x^2-1 = (x-1).(x+1)$ e portanto a equação dada equivale a $(x-1).(x+1) = (x-1).x^2$. Assim, pela Propriedade 1.3.11, a equação original equivale a $x-1=0$ ou $x+1=x^2$. Resolvendo a equação do 2º grau $x+1=x^2$, obtemos que o conjunto solução do problema é $S = \{1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\}$.

3. Determine os números reais que são iguais ao seu quadrado. Dê uma interpretação geométrica no plano.
Solução: Primeiro devemos transformar o enunciado do problema numa equação matemática, ou seja, procuramos os valores de $x \in \mathbb{R}$, tais que $x = x^2$. Aplicando a Propriedade 1.3.9, onde somamos $-x^2$ aos dois lados da equação, obtemos $x - x^2 = 0$ e portanto $x.(1-x) = 0$. Daí, e da Propriedade 1.3.10, temos que x=0 ou x=1. Como todos os passos efetuados acima são equivalentes, chegamos ao conjunto solução $S = \{0, 1\}$. Geometricamente, significa que encontramos as abscissas das interseções entre a reta $y = x$ e a parábola $y = x^2$. Faça o esboço!!

O exercício acima pode ser resolvido usando diretamente a propriedade 1.311. Resolva!

4. Encontre os pontos do plano cartesiano onde a reta $y = x$ e a parábola $y = x.(x-2)$ se cruzam.
Solução: Queremos determinar os valores de x, tais que as ordenadas dos pontos sobre a reta são iguais às ordenadas dos pontos sobre a parábola, logo devemos resolver a equação $x.1 = x = x(x-2)$. Note que $x.1 = x(x-2) \leftrightarrow x = 0 \, ou \, 1 = x-2$, pela Propriedade1.3.11. Logo, as abscissas dos pontos de interseção são $x = 0 \, ou \, x = 3$ e os pontos de interseção $P_1 = (0,0) \; e \; P_2 = (3,3)$, conforme a figura 2 a seguir.

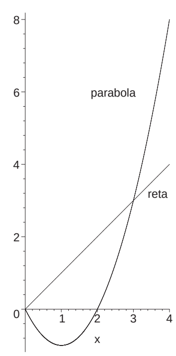


fig.2

1.6.2 Domínio de uma expressão

Dada uma expressão $E(x)$, que pode ser usada para definir uma equação ou inequação, é importante saber para quais os valores da variável x essa expressão está bem definida, isto é , em que pontos tal expressão pode ser avaliada. A este conjunto damos o nome de *domínio da expressão* ou simplesmente *domínio.*

O *domínio de uma equação (ou inequação)* é formado pela interseção dos domínios das expressões que a definem. Note que nos exemplos anteriores o domínio era todo $\mathbb{R}$.

Exemplo: Resolva a equação $\dfrac{2x^2-5x}{x-x^3} = 0$.
Solução: Como a divisão por zero não é definida, devemos ter $x - x^3 \neq 0$ Mas, note que

$$x - x^3 = 0 \Leftrightarrow x(1-x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \, ou \, x = 1 \, ou \, x = -1,$$

portanto o domínio da equação é $D = \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 1\}$.
Para resolver a equação, devemos encontrar os valores de $x \in D$ que a satisfazem, então

$$\frac{2x^2-5x}{x-x^3} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(2x-5) = 0$$

pela Propriedade 1.3.10, a última igualdade ocorre se e só se $x = 0 \, ou \, x = \dfrac{5}{2}$, mas $x = 0 \notin D$, logo $S = \left\{\dfrac{5}{2}\right\}$.

1.6.3 Exercícios

1. Resolva $\dfrac{x(x^2-2)-x^2}{x+1}=0$.

2. Determine o domínio da expressão $E(x)=\dfrac{x}{x(x^2-2x-1)}$.

3. Determine o domínio da equação $\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{(x+2)(x^2+1)}=\dfrac{x}{x^2-4}$.

1.6.4 Resolução de Inequações

Resolver uma inequação é determinar o conjunto de todos os números reais que a satisfazem. Mas, não esqueça: *o conjunto solução deve estar contido no domínio da inequação.* A fim de encontrarmos o conjunto solução de uma inequação, vamos utilizar as propriedades de ordem dos reais. Em particular, 1.4.3 e 1.4.4, que nos permitem manipular as inequações e simplificá-las .

Exemplos:

1. Resolva a inequação $x^2-2x+1\geq 0$.
Solução: Note que $x^2-2x+1=(x-1)^2\geq 0$,$\forall x\in\mathbb{R}$, pois qualquer número real ao quadrado é positivo ou zero. Portanto a inequação é satisfeita para qualquer número real, isto é $S=\mathbb{R}$.

2. Resolva a inequação $-x^2+x+3>0$.
Solução: As raízes da equação do 2º grau $-x^2+x+3=0$ são $x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ ou $x=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ e a concavidade da parábola $y=-x^2+x+3$ é para baixo, pois o sinal do termo quadrático é negativo. Assim,$-x^2+x+3>0$ $\Leftrightarrow x\in(\frac{1-\sqrt{13}}{2},\frac{1+\sqrt{13}}{2})$, logo $S=(\frac{1-\sqrt{13}}{2},\frac{1+\sqrt{13}}{2})$.

3. Represente a solução de $3x-2\geq 4$ na reta numérica e dê uma interpretação geométrica para esta inequação no plano.
Solução: Pela propriedade 1.4.3 (veja observação da página 6), temos

$$3x-2\geq 4\Leftrightarrow 3x\geq 6.$$

Usando a propriedade 1.4.4, segue que

$$3x\geq 6\Leftrightarrow x\geq 2.$$

Portanto, o conjunto solução é dado por $S=[2,+\infty)$. A representação da solução na reta numérica é dada por

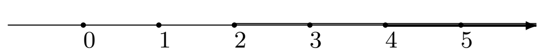


fig.3

Pensando na representação geométrica do problema no plano, observe que $y=3x-2$ e $y=4$ são duas retas . Além disso, o conjunto solução encontrado corresponde às abscissas dos pontos do plano cartesiano onde a reta $y=3x-2$ está acima ou intersecta a reta $y=4$. Veja a fig.4 a seguir:

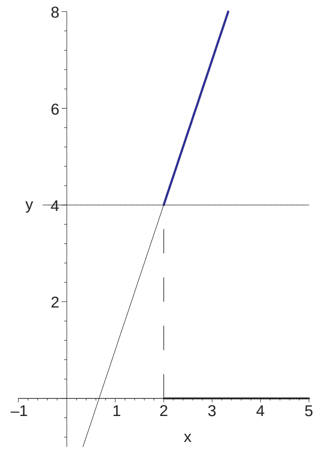


fig.4

4. Resolva $\dfrac{x-2}{x} \leq 0.$

   Solução: Inicialmente, note que o domínio da expressão é dado por $D = \mathbb{R}^*$. Para auxiliar o estudo da inequação, e já que a mesma pode ser vista como o produto entre $x-2$ e $\dfrac{1}{x}$, vamos utilizar a tabela do produto dos sinais dos termos que aparecem :

Exp./intervalo	$x<0$	$x=0$	$0<x<2$	$x=2$	$2<x$
x-2	-	-	-	0	+
x	-	0	+	+	+
$\dfrac{x-2}{x}$	+	n.d*	-	0	+

   * n.d significa não definido.
   Analisando a última linha da tabela, concluímos que $S = (0, 2]$.

5. Determine os valores de x para os quais o gráfico da reta $y = x$ está abaixo da parábola $y = x^2 - 2x$.
   Solução: Queremos resolver a seguinte inequação $x < x^2 - 2x$. Usando a propriedade 1.4.3, obtemos que

$$x < x^2 - 2x \Leftrightarrow x^2 - 3x > 0$$

   Estudando o sinal da parábola $y = x^2 - 3x$, que tem concavidade para cima e cujas raízes são $x = 0$ e $x = 3$, segue que $S = (-\infty, 0) \bigcup (3, +\infty)$, veja a fig.2 na subseção 1.6.1.

1.6.5 Exercícios

Resolva as inequações abaixo.

1. $\dfrac{x^2}{1 - x^2 + x} < \dfrac{-1}{1 - x^2 + x}$
2. $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{x+1}$
3. $\dfrac{x - \dfrac{3x}{1-2x}}{1 - \dfrac{1}{x^2}} < 0$

1.7 Módulo ou Valor Absoluto

O *módulo ou valor absoluto* de um número real é a distância do ponto à origem. Precisamente, temos a definição

$$|a| := \begin{cases} a, & se\ a > 0; \\ 0, & se\ a = 0; \\ -a, & se\ a < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Exemplos:

1. $|0|$=0
2. $|-2|$=2
3. $|3|$=3
4. $|-\pi|=\pi$
5. $|1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}-1$
6. $|3,14-\pi|=\pi$ - 3,14

Assim, pela definição anterior, dados $a, b \in \mathbb{R}$, a distância entre eles será

$$d = \begin{cases} b-a, & \text{se } b > a; \\ 0, & \text{se } b = a; \\ a-b, & \text{se } b < a. \end{cases} \Leftrightarrow \quad d = \begin{cases} b-a, & \text{se } b-a > 0; \\ 0, & \text{se } b-a = 0; \\ -(b-a), & \text{se } b-a < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \quad d = |b-a| = |a-b|.$$

Por exemplo, a distância entre 2 e 5.3 é $|2-5.3| = 5.3-2 = 3.3$ e a distância entre 6 e 2π é $|6-2\pi| = 2\pi - 6$. Uma maneira mais concisa de escrever a definição (1) é

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0; \\ -a, & \text{se } a < 0. \end{cases} \quad \text{ou} \quad |a| = \begin{cases} a, & \text{se } a > 0; \\ -a, & \text{se } a \leq 0. \end{cases}$$

Exemplos: Use a definição (1) para "abrir"os módulos a seguir.

1. $|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{se } x \geq 2; \\ -(x-2), & \text{se } x < 2. \end{cases}$
2. $|x^2-9| = \begin{cases} x^2-9, & \text{se } x^2-9 \geq 0; \\ -x^2+9, & \text{se } x^2-9 < 0. \end{cases} = \begin{cases} x^2-9, & \text{se } x \leq -3 \ ou\ x \geq 3; \\ 9-x^2, & \text{se } -3 < x < 3. \end{cases}$
3. $|-4-x^2+3x|$ (exercício)
4. $|1-\dfrac{1}{x}|$(exercício)

Propriedades do módulo

1.7.1 $|a| \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}$. Além disso, $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

1.7.2 $|a| = |b| \Leftrightarrow a = \pm b$.

1.7.3 $|a.b| = |a|.|b|, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

1.7.4 $|\dfrac{a}{b}| = \dfrac{|a|}{|b|}, \forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$.

1.7.5 $|a| \leq \delta \Leftrightarrow -\delta \leq a \leq \delta$, onde $\delta > 0$)

1.7.6 $|a| > \delta \Leftrightarrow a > \delta$ ou $a < -\delta$.

1.7.7 $|a+b| \leq |a|+|b|, \forall a, b \in \mathbb{R}$[Desigualdade triangular][4].

1.7.8 $|a^n| = |a|^n$, $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$.
$|a^n| = |a|^n$, $\forall a \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{Z}_-$[5]

Demonstração: 1.7.1: segue da definição de módulo.

1.7.2:($\Rightarrow$) Podemos dividir nos casos em que $a > 0$ e $b > 0$, ou $a > 0$ e $b < 0$, ou $a < 0$ e $b > 0$, ou $a < 0$ e $b < 0$. Aplicando a definição de módulo a a e b em cada caso, temos que $a = b$ ou $a = -b$. Se $a = 0$ de 1.7.1,

[4]A desigualdade triangular é bastante utilizada para fazer estimativas.
[5]$\mathbb{Z}_-$ é o conjunto dos inteiros negativos

temos que b=0, idem se b=0.

($\Leftarrow$)Se $a = b$, é claro que $|a| = |b|$. Se $a = -b$, então

$$|a| = |-b| = \begin{cases} -b, & \text{se } -b > 0; \\ -(-b), & \text{se } -b \leq 0. \end{cases} = \begin{cases} -b, & \text{se } b < 0; \\ b, & \text{se } b \geq 0. \end{cases} = |b|.$$

1.7.3 : Vamos dividir nos casos em que $a > 0$ e $b > 0$, ou $a > 0$ e $b < 0$ ($a < 0$ e $b > 0$ é análoga a esse) , ou $a < 0$ e $b < 0$ ou $a = 0$ e $b \in \mathbb{R}$ ou $b = 0$ e $a \in \mathbb{R}$ e aplicar a definição de módulo a a e b. Se $a > 0$ e $b > 0$, então $|a.b| = a.b = |a|.|b|$, pois $a.b > 0$. Se $a > 0$ e $b < 0$, então $|a.b| = -(a.b)$, pois $a.b < 0$, mas $-(a.b) = a.(-b) = a.|b| = |a|.|b|$, o que conclui a verificação desse caso. Deixamos como exercício a verificação dos demais casos.

1.7.4 : Vamos mostrar primeiro que $|\frac{1}{b}| = \frac{1}{|b|}$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Se $b > 0$, segue que $|\frac{1}{b}| = \frac{1}{b} = \frac{1}{|b|}$, visto que $\frac{1}{b} > 0$ e $|b| = b$. Se $b < 0$, então $|\frac{1}{b}| = -\frac{1}{b} = \frac{1}{-b} = \frac{1}{|b|}$, pois $\frac{1}{b} < 0$ e $|b| = -b$. Aplicando essa igualdade e observando que $|\frac{a}{b}| = |a.\frac{1}{b}| = |a|.|\frac{1}{b}|$, pela propriedade 1.7.3, o resultado segue.

1.7.5 :($\Rightarrow$) Suponha que $|a| \leq \delta$. Se $a \leq 0$, isto significa que $|a| = -a \leq \delta$, daí e da propriedade 1.4.4 , segue que $a \geq -\delta$. E sendo $a \leq 0$ *e* $\delta > 0$, obtemos que $a \leq 0 < \delta$, donde concluímos que $-\delta \leq a \leq \delta$. Também, se $a \geq 0$, temos que $-\delta < 0 \leq a = |a| \leq \delta$, como queríamos demonstrar.

($\Leftarrow$) suponha que $-\delta \leq a \leq \delta$. Se $a \geq 0$, $|a| = a \leq \delta$. Se $a \leq 0$, $|a| = -a$ e pela propriedade 1.4.4 temos $\delta \geq -a \geq -\delta$, logo segue que $|a| \leq \delta$.

1.7.6 : A demonstração é análoga à de 1.7.5.

1.7.7 : Usando a definição de módulo, temos que

$$|a + b| = \begin{cases} \text{a+b}, & \text{se } a + b \geq 0; \\ \text{-(a+b)}, & \text{se } a + b < 0. \end{cases}$$

Seja qual for o caso, segue que $a + b \leq |a| + |b|$ e $-(a + b) = -a - b \leq |a| + |b|$ (veja observação 2 abaixo), donde concluímos a desigualdade desejada $|a + b| \leq |a| + |b|$.

1.7.8 : Segue de 1.7.3, aplicada n-vezes se $n \in \mathbb{N}$. Para $n \in \mathbb{Z}_-$, escrevemos $|a^n| = |\frac{1}{a^{-n}}| = \frac{1}{|a^{-n}|} = \frac{1}{|a|^{-n}} = |a|^n$, de 1.7.4. e já que $-n \in \mathbb{N}$

■

Pensando na noção de distância, as propriedades 1.7.1, 1.7.2, 1.7.5 e 1.7.6 são bastante naturais. Por exemplo, 1.7.1 nos diz que a distância de um número real à origem é positiva ou nula e que só pode ser nula quando o número é o 0. Já 1.7.2 nos diz que dois números reais são equidistantes da origem se e só se são iguais ou simétricos. A propriedade 1.7.5 indica que a distância de um número a à origem é menor ou igual a um valor δ se e só se a pertencer ao intervalo determinado por δ e seu simétrico $-\delta$. Considerações análogas podemos fazer para 1.7.6.

OBS: 1)A propriedade 1.7.5 nos diz que a distância de a à origem é menor ou igual a δ, se e somente se, a pertence ao intervalo fechado $[-\delta, \delta]$. É fácil ver que uma propriedade análoga a essa também vale para a desigualdade estrita "$<$". Da mesma forma , 1.7.6 e nos diz que a distância de a à origem é maior do que δ, se e somente se, a pertence ao intervalo $(-\infty, \delta)$ ou ao intervalo $(\delta, +\infty)$. Uma propriedade análoga a essa também vale para a desigualdade "$\geq$".

2) As seguinte desigualdades são verdadeiras

$$-|a| \leq a \leq |a| \quad \text{e} \quad -|a| \leq -a \leq |a|.$$

De fato, para $a = 0$ o resultado é óbvio. Se $a \neq 0$, tome $\delta = |a| > 0$ e aplique 1.7.5 para obter o primeiro bloco de desigualdades. Para o segundo bloco de desigualdaes, multiplique todo o primeiro bloco por -1 e utilize 1.4.4.

1.7.9 :Representação gráfica de $y = |x|$

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0; \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Portanto, o gráfico do módulo de x é composto pelas semi-retas $y = x$,$x \geq 0$ e $y = -x$, $x \leq 0$, confira a fig.5 abaixo.

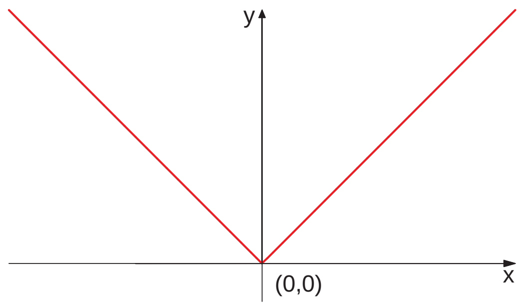


fig.5

Exemplos: Esboce os gráficos abaixo.
1. $y = |x-1|$.

Solução: Usando a definição de módulo, temos que $y = |x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{se } x-1 \geq 0; \\ -(x-1), & \text{se } x-1 < 0. \end{cases}$, isto é,
$y = |x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{se } x \geq 1; \\ -(x-1), & \text{se } x < 1. \end{cases}$, portanto o gráfico é formado por duas semi-retas $y = x-1$, para $x \geq 1$ e $y = 1-x$, para $x < 1$. Veja o esboço abaixo na fig.6.

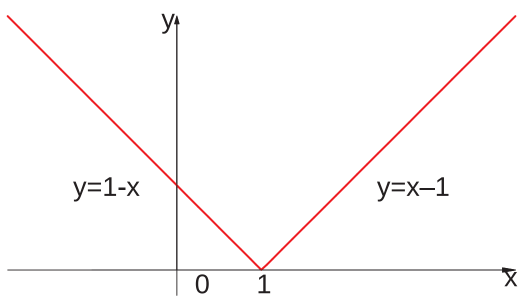


fig.6. Gráfico de $y = |x-1|$

2. $y = |x| - 1$ (exercício)

3. $y = |x^2 - 9|$ (exercício)

1.7.10 Exercícios

1)Resolva, se possível, as equações.

a) $|x^2 + 1| = 1$

b) $|x| = 2$

c) $|x-1| = 3 - \pi$

d) $|x-1| = 4$

e) $|3-2x| = 0$

f) $|3-2x| = 1$

g) $|3x| = |x| - 1$

h) $|3x| = 1 - |x|$

i) $|x^2| = x + 2$

j) $x.|x|(x^2-1) = x.(x+1)$

k) $|x-1|.x^2 - 3x.(x-1) = 0$

2)Resolva geometricamente utilizando o conceito de distância.

a) $|x-3| = 2$

b) $|x+3| = 2$

c) $|x+2| \geq 4$

3) Interprete as equações do ex.2) e suas soluções, no plano cartesiano.

4)Determine os pontos de interseção entre $y = |x|$ e $y = x^2 - 2x - 1$. Faça um esboço da solução no plano cartesiano.

5)Resolva, se possível:

a) $1 - \dfrac{x}{1-|2x|} = 0$

b) $\dfrac{|x|}{x^2-1} \geq \dfrac{2-|x|}{x^2-1}$

c) $||x+3| - |x+1|| = 0$

d) $|2x-1| < 3$

e) $|5x+1| > 2$

f) $\left|\dfrac{|x|-1}{1-x}\right| = \dfrac{|x|-1}{1-x}$

g) $\dfrac{|x|+3}{|x|-3} \leq 0$

h) $\dfrac{|x|-\sqrt{2}}{|x|-3} < 0$

6) Esboce os gráfico abaixo .

a) $y = |x^2-1|$

b) $y = |3x-1|$

c) $y = |-x^2+x-5|$

d) $y = \left|\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}\right|, \ x \neq -1.$

e) $y = \dfrac{|x^2-2x-3|}{x+1}, \ x \neq -1$

f) $y = \begin{cases} x^2+1, & \text{se } |x| < 2; \\ 1-2x, & \text{se} |x| \geq 3. \end{cases}$

7)Verifique se cada afirmação é falsa ou verdadeira, demonstrando as verdadeiras e dando contraexemplos para as falsas.

a) Se $0 \leq a < b \Rightarrow a^2 < b^2$.

b) Se $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$.

c) Se $a < b \Rightarrow |a| < |b|$.

d) $||x| - |y|| \leq |x-y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

1.8 Raiz Quadrada

Lembremos da definição de ***raiz quadrada***[6]de um número real $a \geq 0$: *é o número $b \geq 0$, tal que $b^2 = a$, e b recebe a notação de $\sqrt{a}$. A notação* $\sqrt{\ }$ *é dita* radical *e o número a o* radicando. *Outra notação bastante conveniente para raiz quadrada de a é $a^{1/2}$.*

- Note que, $\sqrt{a} > 0 \Leftrightarrow a > 0$. Isto é, se $a > 0$, então $\sqrt{a} > 0$ e reciprocamente, se $\sqrt{a} > 0$, então $a > 0$. Assim, $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, etc.

- A equação $x^2 = a$, onde $a > 0$, possui exatamente **duas soluções**, também chamadas simplesmente de raízes da equação dada, a saber, a solução (raiz) positiva $x = \sqrt{a}$ e a solução(raiz) negativa $x = -\sqrt{a}$. Lembre-se de que a expressão $\sqrt{a}$, **raiz quadrada de a**, denota um **único** número real (por definição), pois é escolhida como a **raiz positiva** da equação $x^2 = a$. Por exemplo, $\sqrt{16}$=4, $\sqrt{25}$=5, $\sqrt{36}$=6, etc. Assim, NÃO É CORRETO escrever algo como $\cancel{\sqrt{16} = \pm 4}$!!

[6]A existência da raiz quadrada é demonstrada em cursos mais avançados, como de *Análise na Reta* . A unicidade segue do fato de que, se existirem $b, c > 0$,tais que $c^2 = a = b^2 \Rightarrow c^2 - b^2 = 0 \Rightarrow (c+b)(c-b) = 0 \Rightarrow c = b \text{ ou } c = -b$. Como $b, c > 0$, segue que $c = b$.

Propriedades da raiz quadrada

Propriedade 1.8.1 $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, & \textit{se } a \geq 0; \\ -a, & \textit{se } a < 0. \end{cases} = |a|, \forall a \in \mathbb{R}.$

Propriedade 1.8.2 $\sqrt{a.b} = \sqrt{a} \,.\, \sqrt{b},\ \forall\, a,\ b \geq 0$ *e* $\sqrt{a.b} = \sqrt{-a} \,.\, \sqrt{-b},\ \forall\, a,\ b \leq 0.$

Propriedade 1.8.3 $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},\ \forall\, a \geq 0,\ \forall b > 0$ *e* $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}},\ \forall\, a \leq 0,\ \forall b < 0.$

Propriedade 1.8.4 *Sejam* $a, b > 0$*, então* $0 < a < b \Leftrightarrow\ 0 < \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Propriedade 1.8.5 $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b},\ \forall\, a,\ b \geq 0.$

Demonstrações: 1.8.1: Se $a = 0$, a igualdade é trivial. Suponha $a \neq 0$ e seja $b = \sqrt{a^2}$. Pela definição, a raiz quadrada de a^2 é $b > 0$ tal que $b^2 = a^2$. Assim, se $a > 0$, temos que $b = a$. Se $a < 0$, como $-a > 0$ e $(-a)^2 = a^2$, segue que b=-a. Aplicando a definição do módulo da seção 1.7, segue que $b = \sqrt{a^2} = |a|$.

1.8.2: Suponha $a, b \geq 0$. Seja $c = \sqrt{a}.\sqrt{b}$, note que c satisfaz a definição de raiz quadrada de $a.b$, pois $c \geq 0$ e $c^2 = a.b$. Pela unicidade da raiz, segue que $c = \sqrt{a.b}$.
Se $a, b \leq 0$, note que $-a$, $-b$ e $a.b = (-a).(-b)$ são maiores ou iguais a zero, logo, do caso acima, temos $\sqrt{a.b} = \sqrt{(-a)(-b)} = \sqrt{-a}.\sqrt{-b}$.

1.8.3: Idem a 1.8.2 (exercício).

1.8.4: Sejam $a, b > 0$. Usando uma fatoração bem conhecida, temos que $b - a = (\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})$, onde $\sqrt{b} + \sqrt{a} > 0$. Logo, $b - a > 0 \Leftrightarrow \sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$, ou seja, $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

1.8.5: Se $a = 0$ ou $b = 0$, vale a igualdade trivialmente. Suponha $a, b > 0$, então,

$$0 < a + b < a + b + 2.\sqrt{a}.\sqrt{b} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2.$$

Aplicando primeiro 1.8.4 e depois 1.8.1 à desigualdade anterior, acarreta em

$$\sqrt{a+b} < \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} = |\sqrt{a} + \sqrt{b}| = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

■

Cuidado: *Em vista de 1.8.1,* $\sqrt{x^2} = (x^2)^{1/2} = |x|,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Por exemplo, se $x = -2$, temos $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = |-2|$. Logo, podemos escrever que $\sqrt{x^2} = x,\ \forall x \geq 0$ e $\sqrt{x^2} = -x,\ \forall x < 0$.

OBS: A demonstração da propriedade 1.8.5 deixa claro que *a raiz quadrada de uma soma entre números positivos é menor do que a soma das raízes quadradas* dos números em questão. A igualdade só vale quando um dos números envolvidos é zero. Veja os exemplos :

- $5 = \sqrt{25} = \sqrt{9+16} < \sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$
- $\sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = |a| + |b|,\ \forall a, b \in \mathbb{R}$ (como a ou b podem ser nulos, então usamos o sinal " $\leq$ ")
- $\sqrt{x^2 + 1} \leq \sqrt{x^2} + 1 = |x| + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

,

1.8.6 Representação gráfica de $y = \sqrt{x}$, para $x \geq 0$.

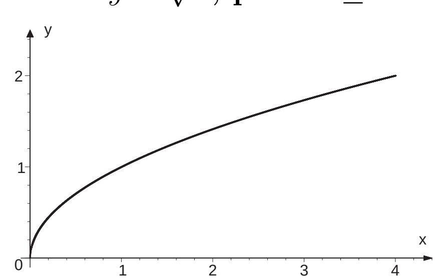


fig.7 Gráfico de $y = \sqrt{x}$.

Note que o gráfico anterior cresce bem rápido para valores "pequenos"de x, isto é, próximos de 0 e mais devagar para valores "grandes"de x. Além disso, a propriedade 1.8.4 nos diz que o gráfico de $y = \sqrt{x}$ é *crescente*, isto é, sempre que aumentamos o valor de x, aumentamos também o valor de $\sqrt{x}$.

1.8.7 Exercícios

1))Determine o domínio de cada expressão.

a) $\sqrt{2x-3}.$

b) $\sqrt{-x}$

c) $\sqrt{|x|}$

d) $\sqrt{|x|-1}$

e) $\sqrt{x^2-2x-1}$

f) $\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$

g) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-1}}$

2) Em que domínio podemos afirmar que $\dfrac{\sqrt{|x|-1}}{\sqrt{x^2-2x}} = \sqrt{\dfrac{|x|-1}{x^2-2x}}$?

3)Considere a expressão $E(x) = \sqrt{x^2-2x+1}$, definida em $\mathbb{R}$, pois $x^2-2x+1 = (x-1)^2 \geq 0$. Um aluno distraído simplificou a expressão da seguinte forma :

$$E(x) = \sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{(x-1)^2} = [(x-1)^2]^{1/2} = x-1, \; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Um outro aluno mais atento observou que havia algo errado na simplificação feita, pois, de acordo com a simplificação do aluno, para $x = 0$, teríamos $E(0) = -1$. Mas, a raiz quadrada de qualquer número real positivo é positiva! Descubra você o erro nas contas acima e corrija-o.

4)Esboce no mesmo referencial os gráficos de $y = x$ e $y = \sqrt{x}$, para $x \geq 0$. Determine os pontos de interseção entre eles e o intervalo onde vale a desigualdade $x \leq \sqrt{x}$.

1.9 Equações envolvendo raízes quadradas

Para resolvermos uma equação, pensamos primeiro em simplificá-la. Nesse processo, frequentemente efetuamos operações que *modificam a equação inicial*, ou seja, passamos a trabalhar com uma equação que *não é equivalente à primeira*. O que implica que *o conjunto solução da primeira equação está contido no conjunto solução da segunda, mas esses conjuntos podem ser diferentes.* Neste caso, ao resolvermos a equação simplificada, encontramos apenas *candidatos* à solução da equação inicial. Esses candidatos devem ser *testados* na equação inicial, a fim de descartarmos as soluções *"estranhas"*. Observe o esquema a seguir:

$$\underline{\text{EQUAÇÃO INICIAL}} \;\Rightarrow\; \underline{\text{EQUAÇÃO SIMPLIFICADA}}$$

$$\therefore S_i \subset S_s$$

Onde, S_i é o conjunto solução da equação inicial (ou equação dada) e S_s o conjunto solução da equação simplificada. Em geral, esses conjuntos são diferentes, isto é, $S_i \subsetneq S_s$. Isto ocorre quando a recíproca ($\Leftarrow$)do esquema acima não vale, ou seja, quando as equações não são equivalentes. Porém, temos a certeza de que, caso a equação inicial tenha solução, todas elas estarão no conjunto solução da equação simplificada e portanto basta eliminarmos do conjunto S_s os números reais que não resolvem a equação dada.

1.9.1 Elevando uma equação ao quadrado

Um exemplo de operação que pode introduzir soluções *"estranhas"* à equação inicial é *elevar a equação ao quadrado* (mais geralmente, elevar a uma potência par). E é justamente esta operação que mais utilizamos quando temos uma equação envolvendo uma ou mais raízes quadradas. Veja os exemplos a seguir:

1. Resolva a equação $\sqrt{x+3} = x+1$.
   Solução: Neste caso a equação inicial é $\sqrt{x+3} = x+1$. Elevando os dois lados da equação ao quadrado, obtemos a equação simplificada

$$x+3=(x+1)^2 \Leftrightarrow x+3=x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2+x-2=0.$$

As soluções da equação simplificada acima são $x=1$ ou $x=-2$. Testando essas soluções (da equação simplificada) na equação inicial, vemos que $x=1$ é solução da equação inicial, mas $x=-2$ não é, pois nem mesmo pertence ao domínio da expressão. Portanto, $S=\{1\}$.

OBS: No exemplo acima, a equação simplificada é equivalente a $\sqrt{x+3}=|x+1|$ e não à equação inicial dada!

2. Resolva a equação $\sqrt{x^2-3}=\sqrt{x-3}$.
   Solução : Elevando os dois lados da equação ao quadrado, obtemos a equação simplificada $x^2-3=x-3 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$. Neste caso, testando esses dois valores na equação inicial, vemos que nenhuma das soluções encontradas para a equação simplificada é solução da inicial . Portanto, $S=\varnothing$.

3. Resolva a equação $x+\sqrt{x-2}=4$.
   Solução: Observe que antes de elevarmos ao quadrado, vamos reescrever a equação *(por que???)* : $x+\sqrt{x-2}=4 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}=4-x \Rightarrow x-2=(4-x)^2$. Mas $x-2=(4-x)^2=16-8x+x^2 \Leftrightarrow x^2-9x+18=0 \Leftrightarrow x=3$ ou $x=6$. Testando esses dois valores na equação original, vemos que $x=3$ é a única solução, logo $S=\{3\}$.

1.9.2 Exercícios

1)Resolva as equações abaixo elevando-as ao quadrado.

a) $|x-2|=\sqrt{x}$

b) $\sqrt{x-1}=x-3$

c) $|x-2|+|x+2|=4$

1.9.3 Mudança de variável

Outra simplificação eficiente é a *mudança de variável*. Esta simplificação consiste em escrever a equação original em termos de uma nova variável, resolvê-la e então obter as soluções desejadas voltando à variável original através da mudança de variável utilizada. Em muitos casos, soluções da equação na nova variável serão descartadas, pois devido à mudança utilizada estas não produzirão soluções da equação inicial. Confira os exemplos a seguir.

1. Resolva a equação $x+4\sqrt{x}-2=0$.

   Solução: Considere a mudança de variável $y=\sqrt{x}$. Então, a equação dada se escreve como $y^2+4y-2=0$, cujas soluções são $y_1=-2+\sqrt{6}$ e $y_2=-2-\sqrt{6}$. Voltando à variável original, $y=\sqrt{x}\geq 0$, descartamos y_2, já que $y_2<0$. Segue que a única solução ocorre quando $y_1=\sqrt{x}$, donde $x=(-2+\sqrt{6})^2=10-4\sqrt{6}$. Logo, $S=\{10-4\sqrt{6}\}$.

   O exemplo acima também pode ser resolvido reescrevendo a equação de forma conveniente e elevando ao quadrado. Faça!

2. Resolva a equação $(|x|-2)^2=16$

   Solução: Considere a mudança de variável $y=|x|-2$. Então, na nova variável y, a equação se escreve como $y^2=16$, que tem como solução $y=\pm 4$. Voltando à variável x, temos que

   $$|x|-2=4 \Leftrightarrow |x|=6 \Leftrightarrow x=6 \text{ ou } x=-6.$$

   Também,

   $$|x|-2=-4 \Leftrightarrow |x|=-2, \text{ porém esta equação não tem solução.}$$

   Assim, $S=\{\pm 6\}$.

3. Determine o domínio das expressões a) $\dfrac{1}{|x|-x^2+1}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{|x|-x^2+1}}$.

   Solução: a) Para que um número x esteja no domínio, devemos ter $|x|-x^2+1 \neq 0$, assim vamos resolver a equação

$$|x|-x^2+1=0 \ (*)$$

   e suas soluções não farão parte do domínio. Usando a mudança de variável $y=|x|$, podemos escrever (*) como $y-y^2+1=0$, pois $x^2=|x|^2$. Resolvendo a equação do 2-ºgrau em y obtida, encontramos as raízes $y_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $y_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Voltando à variável x original, temos $|x|=y_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, donde $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ são soluções de (*). Note que não existe x, tal que $|x|=y_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<0$, logo daí não provém solução para (*). Portanto , $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

   b)Devemos ter $|x|-x^2+1>0$, para que a expressão esteja bem definida. Usando a mudança de variável e os cálculos feitos em a), temos que a parábola $y=y-y^2+1$ é positiva entre as raízes, pois sua concavidade é para baixo. Voltando à variável x, temos que $|x|-x^2+1>0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<|x|<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow |x|<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, pois $0\leq|x|, \forall x\in\mathbb{R}$. Logo, o domínio é o intervalo $D=\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

4. a)Encontre o ponto de interseção entre os gráficos de $y=\sqrt{x}$ e a reta $y+x=1$. Faça um esboço dos gráficos.

   b)Utilizando os gráficos do item a), determine o conjunto dos pontos que satisfazem a desigualdade $\sqrt{x}<1-x$.

   Solução:a) Devemos resolver a equação $\sqrt{x}=1-x$, então fazendo $y=\sqrt{x}$, obtemos $y=1-y^2$, cujas raízes são $y_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ e $y_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Como $y_2<0$, não há solução para a equação inicial associada a y_2. Para $y_1=\sqrt{x}$, obtemos $x=\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\dfrac{1-2\sqrt{5}+5}{4}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. Logo a interseção ocorre no ponto $P=\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$. Veja o gráfico abaixo:

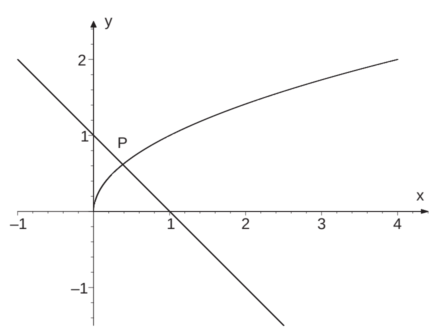


fig.8 Gráfico do ex.4 acima.

b)Pelo gráfico acima, observamos que o conjunto dos valores de x, tais que $y=\sqrt{x}$ está abaixo de $y=1-x$, é formado pelo intervalo $\left[0,\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

1.10 Raízes de índice n

As raízes de um número real estão divididas em dois tipos: as raízes de índice *par* e as de índice *ímpar*.

1.10.1 Raízes de índice ímpar

Dados $a \in \mathbb{R}$ um número real qualquer e $n \geq 3$ um inteiro ***ímpar***, a ***raiz n-ésima*** de a é o número real b, tal que $b^n = a$.

Notações: $b \equiv \sqrt[n]{a} \equiv (a)^{1/n}$.
Note que, sendo n ímpar, $\sqrt[n]{a}$ tem o mesmo sinal de a , isto é, se $a > 0$, então $\sqrt[n]{a} > 0$; se $a < 0$, então $\sqrt[n]{a} < 0$.
Assim,

- $\sqrt[3]{8} = 2$, pois $2^3 = 8$;
- $\sqrt[5]{-243} = -3$, pois $(-3)^5 = -243$;
- $\sqrt[7]{2187} = 3$, pois $3^7 = 2187$;
- $\sqrt[9]{-512} = -2$, pois $(-2)^9 = -512$;

Um inteiro n é ímpar se e só se é escrito como $n = 2k+1$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, podemos escrever que

- $(\sqrt[2k+1]{x})^{2k+1} = x$, ou com a outra notação $(x^{1/2k+1})^{2k+1} = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
- $\sqrt[2k+1]{x^{2k+1}} = x$, ou com a outra notação $(x^{2k+1})^{1/2k+1} = x$,$\forall x \in \mathbb{R}$.

1.10.2 Raízes de índice par

Dados $a \geq 0$ qualquer e $n \geq 2$ um inteiro ***par***, a ***raiz n-ésima*** de a é o número real $b \geq 0$, tal que $b^n = a$.

Notações: $b \equiv \sqrt[n]{a} \equiv (a)^{1/n}$.

Quando $n = 2$, a raiz de índice 2 é dita raiz quadrada e, como já sabemos, é denotada por $\sqrt{a}$ em vez de $\sqrt[2]{a}$. Como qualquer número real não nulo ao quadrado é sempre positivo, a raiz quadrada de um número a negativo não está definida em $\mathbb{R}$.

Vejamos a seguir alguns exemplos:

- $\sqrt[4]{16} = 2$, pois $2 \geq 0$ e $2^4 = 16$;
- $\sqrt[6]{729} = 3$, pois $3 \geq 0$ e $3^6 = 729$;
- $\sqrt[8]{25536} = 4$, pois $4 \geq 0$ e $4^8 = 25536$;
- $\sqrt[10]{9765625} = 5$, pois $(5)^{10} = 9765625$.

Um inteiro n é par se e só se é escrito como $n = 2k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, podemos escrever que

- $(\sqrt[2k]{x})^{2k} = x$, ou com a outra notação $(x^{1/2k})^{2k} = x$, $\forall x \geq 0$;
- $\sqrt[2k]{x^{2k}} = |x|$, ou com a outra notação $(x^{2k})^{1/2k} = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Note que a segunda identidade é verdadeira, pois $|x| \geq 0$ e $|x|^{2k} = x^{2k}$. Assim,

$$(x^{2k})^{1/2k} = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0; \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Observe os exemplos:

1. $(x^6)^{1/2} = ((x^3)^2)^{1/2} = |x^3| = |x|^3$
2. $(x^{10})^{1/2} = ((x^5)^2)^{1/2} = |x^5| = |x|^5$
3. $(x^9)^{1/3} = x^3$

Vamos listar a seguir algumas propriedades das raízes pares e das ímpares. A listagem será feita lado a lado para que possamos comparar as identidades com seus respectivos domínios, já que as raízes de índice ímpar estão definidas para todo número real e as de índice par somente para os números reais não negativos.

1.10.3 Propriedades das raízes ímpares

1. $\sqrt[2k+1]{x^{2k+1}} = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\sqrt[2k+1]{x.y} = \sqrt[2k+1]{x}\ .\ \sqrt[2k+1]{y},\ \forall x, y \in, \mathbb{R}$
3. $\sqrt[2k+1]{-x} = -\sqrt[2k+1]{x},\ \forall x \in \mathbb{R}$
4. $\sqrt[2k+1]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[2k+1]{x}}{\sqrt[2k+1]{y}},\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ y \neq 0.$
5. Se $x < y \Rightarrow \sqrt[2k+1]{x} < \sqrt[2k+1]{y}$
6. $\sqrt[2k+1]{x+y} \leq \sqrt[2k+1]{x} + \sqrt[2k+1]{y},\ \forall x, y \geq 0$

1.10.4 Propriedades das raízes pares

1. $\sqrt[2k]{x^{2k}} = |x|,\ \forall x \in \mathbb{R}.$
2. $\sqrt[2k]{x.y} = \sqrt[2k]{x}.\ \sqrt[2k]{y},\ \forall x, y \geq 0$ e
   $\sqrt[2k]{x.y} = \sqrt[2k]{-x}.\ \sqrt[2k]{-y},\ \forall x, y < 0.$
3. $\sqrt[2k]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[2k]{x}}{\sqrt[2k]{y}}, \forall x \geq 0\ ,\ \forall y > 0$ e
   $\sqrt[2k]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[2k]{-x}}{\sqrt[2k]{-y}}, \forall x \leq 0\ ,\ \forall y < 0.$
4. Se $0 < x < y \Rightarrow 0 < \sqrt[2k]{x} < \sqrt[2k]{y}.$
5. $\sqrt[2k]{x+y} \leq \sqrt[2k]{x} + \sqrt[2k]{y},\ \forall x, y \geq 0.$

Além das propriedades anteriores, podemos relacionar :

- Seguem, respectivamente das propriedades 2 de 1.10.4 e de 1.10.3, que
  $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$, para todo $x \geq 0$, se n for par e vale para todo $x \in \mathbb{R}$ se n for ímpar .
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x},\ \forall x \geq 0$ se m ou n par e vale $\forall x \in \mathbb{R}$, se n e m ímpares.

OBS: A propriedade 6 de 1.10.3 não vale para quaisquer x e y reais. Veja o contraexemplo:
Se $x = y = -1$ *e* $k = 1 \Rightarrow -\sqrt[3]{2} > \sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{-1} = -2, onde -\sqrt[3]{2} \approxeq -1.26.$

Exemplos:

1. $\sqrt[4]{x^8} = x^2,\ \forall x \in \mathbb{R};$
2. $\sqrt[4]{x^4} = |x|,\ \forall x \in \mathbb{R};$
3. $\sqrt[6]{x^{18}} = |x|^3,\ \forall x \in \mathbb{R};$
4. $\sqrt[3]{x^9} = x^3,\ \forall x \in \mathbb{R};$
5. $\sqrt[3]{x^{18}} = x^6,\ \forall x \in \mathbb{R};$
6. $\sqrt[4]{x^6} = \sqrt{x^3},\ \forall x \geq 0.$
7. $\sqrt[4]{x^{10}} = \sqrt{|x|^5},\ \forall x \in \mathbb{R}.$

1.10.5 Expoentes Racionais

Definimos uma ***potência racional*** do tipo $x^{\frac{m}{n}}$, onde $m > 0$ e $n > 0$ são **inteiros primos entre si**[7], da seguinte forma: $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, se n for ímpar e $\forall x \geq 0$ se n for par.

Observe que $(\sqrt[n]{x^m}) = (\sqrt[n]{x})^m$, das propriedades 2 de 1.10.3 e 1 1.10.4, logo $x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{1/n} = (x^{1/n})^m$.
Para o caso em que m/n é negativo, $x^{m/n} := \dfrac{1}{x^{-(m/n)}}$ e neste caso x possui a mesma restrição de domínio do caso já visto $x^{-(m/n)}$ e também $x \neq 0$.

Exemplos:

1. $x^{5/3} = \sqrt[3]{x^5},\ \forall x \in \mathbb{R};$
2. $x^{3/8} = \sqrt[8]{x^3},\ \forall x \geq 0;$
3. $x^{-5/4} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^5}},\ \forall x > 0;$

[7] Se m e n não forem primos entre si, $x^{\frac{m}{n}}$ não fica bem definido. Veja o caso particular :
$x^{3/2} = \sqrt{x^3}$ está definida **somente para** $x \geq 0$. Por outro lado, $3/2 = 6/4$ e se tivéssemos definido $x^{6/4}$ da mesma forma, teríamos $x^{6/4} = \sqrt[4]{x^6}$, definida para **todo** x real. Porém não há problema em calcular $\sqrt[4]{x^6} = \sqrt{|x|^3},\ \forall x \in \mathbb{R}$, só não usamos, nesse caso, a notação de potência fracionária.

1.10.6 Exercícios

1)Determine o domínio das expressões.

a) $E(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-6}}{\sqrt[3]{(x+5)(x-4)}}$

b) $F(x) = \sqrt[4]{\dfrac{2-|x|}{x^2+2x-1}}$

c) $G(x) = \dfrac{\sqrt[4]{2-|x|}}{\sqrt[4]{x^2+2x-1}}$

2)Dê um contraexemplo para mostrar que $\sqrt[3]{x+y} \neq \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$.

1.11 Fatoração

Fatorar uma expressão é escrevê-la como um produto de fatores. Identificar fatorações nas expressões envolvidas numa equação ou numa inequação é fudamental na resolução das mesmas. Vejamos alguns exemplos.

Fatore as expressões abaixo.

1. $x^2 - x = x(x-1)$
2. $y = ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$, se $\Delta \geq 0$ e x_1, x_2 são as raízes reais da equação associada.
   Casos particulares:
   a)$y = 2x^2 + 3x - 2 = 2(x - 1/2)(x+2)$
   b)$y = -x^2 - x + 2 = -(x-1)(x+2)$
   c)$2x^2 + x - 3 = 2(x-1)(x+3/2)$
3. $x - 1 = x(1 - \dfrac{1}{x})$
4. $x^2 - x^4 = x^2(1-x^2)$
5. $(x+1)^2x - 2(x+1)^3x^2 = x(x+1)^2[1-2x(x+1)] = x(x+1)^2(1-2x-2x^2) = -x(x+1)^2(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$
6. $x^4 + x^2 - 2 = (x^2-1)(x^2+2) = (x-1)(x+1)(x^2+2)$, pois fazendo a mudança de variável $y = x^2$ na expressão dada, obtemos uma expressão do 2^o grau em y, cujas raízes são -2 e 1. Daí, temos que $y^2 + y - 2 = (y-1)(y+2)$ e voltando à variável original, o resultado segue.

1.11.1 Exercícios

1)Fatore e resolva as equações

a) $(x+1) + (x+1)^2 - (x+1)^3 = 0$

b) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

2)Fatore e resolva as inequações

a) $x^3 - 2x \leq 0$.

b) $3(x+1) - (x+1)^3 > 0$

c) $\dfrac{x(x^2-1) - 2(x-1)}{4-|x|} \geq 0$

1.12 Produtos Notáveis

Algumas expressões possuem a forma de produtos importantes. Tais produtos são ditos *notáveis* e consistem, na verdade, em fatorações de determinadas expressões conhecidas. Confira abaixo:

1. $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
2. $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
3. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$
4. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$
5. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
6. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
7. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$, onde $n \in \mathbb{N}$ (Estende as igualdades 5 e 6 anteriores).
8. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
9. $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... + b^{n-1})$, se $n \in \mathbb{N}$ for **ímpar**, (Estende a igualdade 8).

Exemplos

1. Simplifique $E(x) = \dfrac{(1+x)^3 - 1}{x}$.
   Solução:Utilizando o produto notável (3) acima, obtemos
   $$\frac{(1+x)^3 - 1}{x} = \frac{1 + 3x^2 + 3x + x^3 - 1}{x} = \frac{3x^2 + 3x + x^3}{x} = 3x + 3 + x^2.$$
   Observe que a simplificação acima é útil, por exemplo, para estudar o comportamento de $E(x)$ quando x se aproxima de 0. Neste caso, o gráfico de $E(x)$ é a parábola $y = x^2 + 3x + 3$ menos o ponto (0,3) e $E(x)$ fica próximo de 3 para x próximo de 0.

2. Esboce o gráfico de $y = \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$.
   Solução: De 8, temos que $y = \dfrac{x^3 + 8}{x + 2} = \dfrac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{x + 2} = x^2 - 2x + 4,\ \forall x \neq -2$. Logo , o gráfico da expressão é o da parábola $y = x^2 - 2x + 4$ menos o ponto (-2,12). Veja a fig.9.

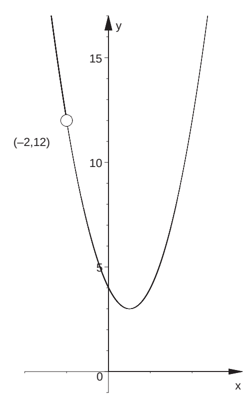


fig.9 Gráfico do ex.2 acima.

3. Simplifique $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$, onde $a > 0$.
   Solução: Multiplicando e dividindo a expressão dada por $(\sqrt{x} + \sqrt{a})$ [8], obtemos, do produto notável (5), aplicado com $a = \sqrt{x}$ e $b = \sqrt{a}$, que
   $$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{x - a}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}.$$

[8] Esse termo é dito o conjugado de $\sqrt{x} - \sqrt{a}$

4. Demonstre a identidade $a-b=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$.
   Solução: Aplique o produto notável (6), substituindo a por $\sqrt[3]{a}$ e b por $\sqrt[3]{b}$. Depois use a propriedade (2) de 1.10.3.

5. Usando o ex.(4) acima, simplifique $\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$.
   Solução: Note que

$$\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{1}}{x}.\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}\,\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}\,\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1}}\ ^{9}$$
$$=\frac{(\sqrt[3]{x+1})^3-1}{x(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)}=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1},$$

   onde usamos o ex.(4) com $a=x+1$ e $b=1$.

6. Resolva a inequação $(x^2-1)^2-2(x-1)^2>0$.

7. Mostre que $\dfrac{x^3-y^3}{x-y}>0$, $\forall x\neq y\, reais$.

1.13 Completando quadrados

Dada uma expressão do 2-º grau $y=ax^2+bx+c$, onde $a\neq 0$, podemos sempre completar o quadrado para os termos dependentes de x e escrevê-la na forma $y=a(x+B)^2+C$. De fato,

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

$$\text{Logo,}\qquad \boxed{y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}}\qquad (1)\ ,$$

onde $B=\dfrac{b}{2a}$ e $C=\dfrac{-\Delta}{4a}$.

Aplicações:

1. Uma importante aplicação para a identidade (1) é a fórmula de Bhaskara que nos dá as soluções para as equação do 2º grau $ax^2+bx+c=0$.
   De (1), temos que

$$ax^2+bx+c=0\Leftrightarrow a(x+B)^2+C=0\Leftrightarrow (x+B)^2=-\frac{C}{a}=\frac{\Delta}{4a^2}.\quad (*)$$

   Logo, de (*), se $\Delta=0$, temos uma única raiz real (com multiplicidade 2) , a saber $x=-B=\dfrac{-b}{2a}$. Se $\Delta<0$, , segue que as raízes são complexas. E , se $\Delta>0$, temos duas raízes reais. De qualquer forma, segue que

$$x=-B\pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a},$$

   onde usamos na última igualdade a definição de $|a|$.

2. Resolva a equação $x^2+2x-2=0$ completando o quadrado.
   Solução: $x^2+2x-2=(x+1)^2-3=0\Leftrightarrow(x+1)=\pm\sqrt{3}\Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{3}$.

[9] Costuma-se chamar a operação feita acima de multiplicação e divisão pelo conjugado de $\sqrt[3]{x+1}-1$

3. Complete o quadrado e mostre que $x^2 + 2x + 4 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
   Solução: $x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3 \geq 3 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

4. Obtenha as fórmulas para a abscissa x_v e para a ordenada y_v do vértice da parábola $y = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$.
   Solução: Consideremos primeiro o caso $a > 0$. Nesse caso, observando (1), o vértice será o ponto onde a ordenada da parábola assume o valor mínimo (a parábola tem concavidade voltada para cima). Utilizando (1), o valor mínimo da ordenada y ocorre se, e só se, o termo quadrático $a(x + B)^2$ não contribuir para aumentar a soma , ou seja quando $a(x + B)^2 = 0$, o que ocorre para $x = -B = \dfrac{-b}{2a}$ e $y = C = \dfrac{4ac - b^2}{4a} = \dfrac{-\Delta}{4a}$. Analogamente, se $a < 0$, o vértice será o ponto onde a ordenada da parábola assume o valor máximo, pois a parábola tem concavidade voltada para baixo. Utilizando (1), obtemos a mesma expressão para x e y. Assim, $(x_v, y_v) = (\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a})$.

   **Note que a expressão (1) acima se escreve em termos das coordenadas do vértice da seguinte forma : $y = a(x - x_v)^2 + y_v$.

1.13.1 Exercícios

1. Determine o domínio de $E(x) = \sqrt{2x^2 + 3x + 2}$.

2. Mostre que a)$E(x) = \dfrac{1}{x^4 - x^2 + 1}$ está bem definida para todo x real.
   b)Idem para $E(x) = \dfrac{\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2 + 1}}}{x^2 + 2|x| + 3}$.

3. Completando o quadrado e fazendo uma mudança de variável, obtenha a igualdade $\sqrt{x^2 - 4x + 1} = \sqrt{y^2 + c}$. Determine y e c, onde c é uma constante real.

4. Dada a equação $x^2 - x + y^2 + 2y = 0$ que descreve uma curva no plano, obtenha a equação equivalente do tipo $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c$, determinando a, b, c. Identifique a curva.

5. [10] Determine os valores de λ para os quais $2x^2 - 3x + \lambda \geq 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

6. [11] Um objeto desloca-se no espaço, de tal forma que sua distância d ao planeta Terra, em cada instante t, é dada por $d = \sqrt{4t^4 - 2kt^2 + k^2}$, onde t é dado em horas , d é obtida em quilômetros e k é uma constante positiva. Mostre que esse objeto estará sempre a uma distância não inferior a $k\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Mostre também que essa distância mínima é assumida se, e somente se, $t = \dfrac{\sqrt{k}}{2}$.

[10]Esse ex. foi tirado dePreparação para o Cálculo,S.Druck,S.Firmo,M.E.Gomes.
[11]Esse ex. foi tirado de"Preparação para o Cálculo",S.Druck,S.Firmo,M.E.Gomes.

1.14 Estudo do sinal de expressões fatoradas

Estudar o sinal [12] de expressões fatoradas (que são escritas como produto de fatores) envolve o estudo do sinal de cada parcela e o produto dos sinais de todos os fatores da expressão. Em outras palavras, reduzimos o estudo do sinal de uma expressão "grande"e complicada , ao estudo dos sinais das parcelas mais simples. Assim, se a expressão em questão não estiver fatorada, sempre que possível, efetuamos uma fatoração para simplificar o estudo do seu sinal.

Atenção: O sinal de uma expressão só pode ser determinado pelo produto de sinais, se a expressão estiver escrita na forma de um produto de fatores!

Exemplos:

1. Estude o sinal da expressão $E(x) = (|x| + 1)(x^3 - 2x)$.
Solução: A expressão pode ser fatorada da seguinte forma:

$$E(x) = (|x| + 1)(x^2 - 2)x = (|x| + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})x.$$

Note que o termo $|x| + 1 > 0$, logo não interfere no sinal da expressão. Fazendo o produto dos sinais, na tabela abaixo, obtemos

Exp./Int.	$x < -\sqrt{2}$	$x = -\sqrt{2}$	$-\sqrt{2} < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \sqrt{2}$	$x = \sqrt{2}$	$x > \sqrt{2}$
x	- - -	-	- - -	0	+ + +	+	+ + +
$x + \sqrt{2}$	- - -	0	+ + +	+	+ + +	+	+ + +
$x - \sqrt{2}$	- - -	-	- - -	-	- - -	0	+ + +
Produto dos sinais	- - -	0	+ + +	0	- - -	0	+ + +

Assim, o sinal de $E(x)$ é dado por : $E(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$; $E(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$, ou $x = 0$, ou $x = \sqrt{2}$; $E(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$.

2. Estude o sinal da expressão $E(x) = (|x| - 1)(-x^2 + 3x - 4)$.
Solução: Observe que o termo de grau 2 presente na expressão acima não pode ser fatorado em $\mathbb{R}$, pois $\Delta < 0$. Por outro lado, $\Delta < 0$ e sendo negativo o coeficiente de grau 2 da parábola $y = -x^2 + 3x - 4$, temos que $y = -x^2 + 3x - 4 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Agora, $|x| - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ *ou* $x < -1$; $|x| - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$; $|x| - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$, logo obtemos o quadro de sinais

Exp./Int	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$\|x\| - 1$	+ + +	0	- - -	0	+ + +
$-x^2 + 3x - 4$	- - -	-	- - -	-	- - -
Produto dos sinais	- - -	0	+ + +	0	- - -

Concluímos que o sinal de $E(x)$ é dado por : $E(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; $E(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$; $E(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$.

3. Estude o sinal da expressão $E(x) = \dfrac{(9 - x^2)(x^2 + |x|)}{-x^2 + 4x - 5}$.

4. Resolva a inequação $\dfrac{(|x| - 3)\sqrt{x + 1}}{-x^2 + 2x - 3} \geq 0$.

5. Determine o domínio de $E(x) = \dfrac{1}{\sqrt[6]{-x^5 - x^3 + 2x}}$.

[12] No curso de Cálculo esse tipo de estudo é importante para determinar os intervalos onde as funções estudadas são crescentes ou decrescentes. E também para saber como se comporta a concavidade dos gráficos das funções.

6. No curso de Cálculo I, após ter feito alguns cálculos para obter o traçado de um gráfico, um aluno chegou às seguintes expressões

   a) $E'(x) = \dfrac{2x(x-1)^2 - 2(x-1)x^2}{(x-1)^4}$

   b) $E''(x) = \dfrac{-2(x-1)^3 + 6x(x-1)^2}{(x-1)^6}$.

   Ele precisava estudar o sinal de cada uma delas para poder terminar o gráfico, mas não conseguiu. E você? Consegue estudar esses sinais?

1.15 Esboço de gráficos e primeira abordagem para o estudo das raízes e do sinal de expressões envolvendo soma ou diferença de módulos

Quando a expressão envolve soma ou diferença de módulos, uma maneira de estudar seu sinal e traçar seu gráfico é **"abrirmos"os módulos em intervalos onde cada expressão em módulo não troca de sinal e então reescrevermos e estudarmos a expressão em cada intervalo sem os módulos**. Para tal, precisamos determinar todos os pontos onde as parcelas que se encontram dentro dos módulos trocam de sinal , dividir a reta usando tais pontos e analisar a expressão e seu sinal em cada um desses intervalos da reta. Ao executarmos esse estudo, também encontramos naturalmente os pontos onde a expressão se anula, que são suas raízes ou seus zeros. Esse processo ficará mais claro através dos exemplos. Ele é fundamental quando queremos não somente o sinal, mas também esboçar o gráfico da expressão.

Exemplos:

1. Estude o sinal da expressão $E(x) = |x+3| - |x| - 1$ e esboce seu gráfico.
   Solução: Os termos que estão em módulo são x e $x+3$. Estes trocam de sinal em $x = 0$ e $x = -3$, respectivamente. Assim, vamos dividir a reta em 3 intervalos, a saber, $(-\infty, -3), [-3, 0]$ e $(0, +\infty)$.

   Se $x \in (-\infty, -3)$, então $E(x) = -(x+3) - (-x) - 1$, pois usamos a definição de módulo e o fato de que nesse intervalo $x < 0$ e $x+3 < 0$. Logo, $E(x) = -4$ **(1)**, $\forall x \in (-\infty, -3)$, donde $E(x) < 0$, $\forall x \in (-\infty, -3)$.

   Se $x \in [-3, 0]$, então $E(x) = (x+3) - (-x) - 1 = 2x + 2$ **(2)**, $\forall x \in [-3, 0]$. Ora, $2x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -1$, $2x + 2 < 0 \Leftrightarrow x < -1$ e $2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Portanto, $E(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 0]$,
   $E(x) < 0 \Leftrightarrow x \in [-3, -1)$ e $E(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.
   Se $x \in (0, +\infty)$, então $E(x) = (x+3) - (x) - 1 = 2 > 0$ **(3)**,$\forall x \in (0, +\infty)$.
   Reunindo os resultados de cada intervalo, chegamos ao sinal de $E(x)$:
   $E(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, +\infty)$; $E(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1)$; $E(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.
   Usando as expressões (1), (2) e (3) , em seus respectivos intervalos, obtemos o gráfico da expressão abaixo.

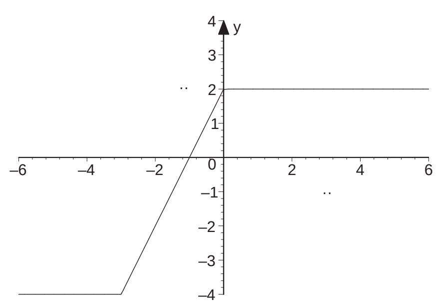
   

   fig.10

2. Estude o sinal da expressão $E(x) = |x| - |x-2| + |2x+1| + 2$ e esboce seu gráfico.
   Solução: Os termos em módulo, $x, x-2$ e $2x+1$, mudam de sinal respectivamente em $x = 0$, $x = 2$ e $x = -\dfrac{1}{2}$. Como há vários termos em módulo é conveniente organizar uma tabela para o estudo do sinal de $E(x)$.

Exp./Intervalo	$x < -\frac{1}{2}$	$x = -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 0$
$\lvert x\rvert$	$-x$	$1/2$	$-x$
$\lvert x-2\rvert$	$-(x-2)$	$5/2$	$-(x-2)$
$\lvert 2x+1\rvert$	$-(2x+1)$	0	$2x+1$
$E(x)$	$-x+x-2-(2x+1)+2=-2x-1$	0	$-x+x-2+2x+1+2=2x+1$
Sinal de $E(x)$:	$+++$	0	$+++++$

Exp./Intervalo	$x=0$	$0<x<2$	$x=2$	$x>2$
$\lvert x\rvert$	0	x	x	x
$\lvert x-2\rvert$	2	$-(x-2)$	0	$x-2$
$\lvert 2x+1\rvert$	1	$2x+1$	5	$2x+1$
$E(x)$	1	$x+x-2+2x+1+2=4x+1$	9	$x-x+2+2x+1+2=2x+5$
Sinal de $E(x)$:	$+$	$++++$	$+$	$++++++$

Logo, $E(x)>0 \Leftrightarrow x \neq -1/2$ e $E(x)=0 \Leftrightarrow x=-1/2$.
Utilizando a penúltima linha da tabela anterior, temos as expressões de $E(x)$ em cada intervalo da reta sem os módulos e podemos traçar o seguinte gráfico

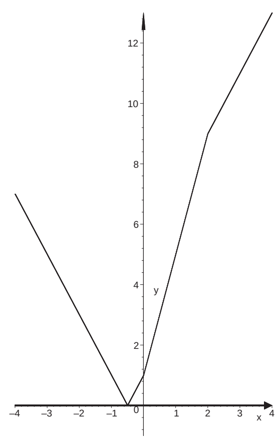


fig.11

3. Estude o sinal da expressão $E(x)=\dfrac{|x|-|x-3|}{\sqrt{x}-x+2}$.

Solução: Observe que o domínio da expressão é dado por $D=\{x\in\mathbb{R}; x\geq 0 \; e \; \sqrt{x}-x+2\neq 0\}$. Fazendo a mudança de variável $y=\sqrt{x}$, econtramos que a única raiz real de $\sqrt{x}-x+2=0$ é $x=4$. Logo, $D=[0,4)\cup(4,+\infty)$. Agora, vamos estudar o sinal de $E(x)$.
Sinal do numerador: dividimos a semi-reta $x\geq 0$ em 2 intervalos, a saber $[0,3]$ e $(3,+\infty)$ e formamos as tabelas abaixo.

Exp./Intervalo	$0\leq x\leq 3$	$x>3$
$\lvert x\rvert$	x	x
$\lvert x-3\rvert$	-(x-3)	x-3
$\lvert x\rvert-\lvert x-3\rvert$	x+x-3=2x-3	x-x+3=3

Exp./Intervalo	$0\leq x<3/2$	x=3/2	$3/2<x<3$	$x\geq 3$
Sinal de $\lvert x\rvert-\lvert x-3\rvert$	- - -	0	$+++$	$+++$

Sinal do denominador: a mudança $y=\sqrt{x}$ transforma o denominador em $y-y^2+2$. Note que analisando a parábola $z=y-y^2+2$, para $y\geq 0$, temos que $z>0$, para $y\in[0,2)$, $z=0$ para $y=2$ e $z<0$ para $y\in(2,+\infty)$. O que corresponde para x aos pontos $\sqrt{x}-x+2>0$, para $x\in[0,4)$; $\sqrt{x}-x+2=0$, para x=4 ; $\sqrt{x}-x+2<0$, para $x\in(4,+\infty)$.

Sinal da expressão $E(x)$:

Exp./Intervalo	$0 \leq x < 3/2$	x=3/2	$3/2 < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
Sinal de $\|x\| - \|x-3\|$	- - -	0	+ + +	+	+ + + +
Sinal de $\sqrt{x} - x + 2$	+ + +	+	+ + +	0	- - -
Produto dos sinais	- - -	0	+ + +	nd	- - -

Abaixo traçamos o gráfico da expressão do ex.3 a título de curiosidade, pois vocês ainda não dispõem das ferramentas do Cálculo para esboçá-lo.

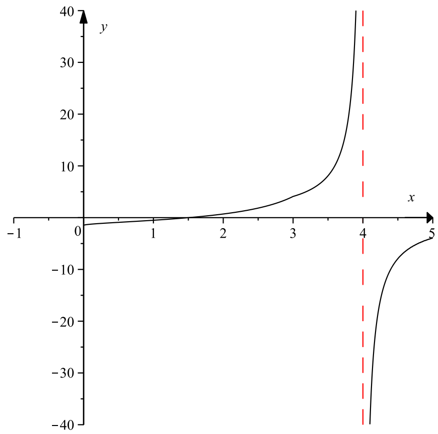


fig.12

4. Esboce o gráfico e estude o sinal da expressão $E(x) = |x^2 - 5x| + 5|x| - x^2$.
Solução: Os termos em módulo trocam de sinal em 0 e 5. Assim, temos a tabela

Intervalo	$x < 0$	x=0	$0 < x < 5$	x=5	$x > 5$
$\|x^2 - 5x\| + 5\|x\| - x^2$	$-10x$	0	$-2x^2 + 10x$	0	0
sinal de $\|x^2 - 5x\| + 5\|x\| - x^2$	++++	0	+++++	0	0

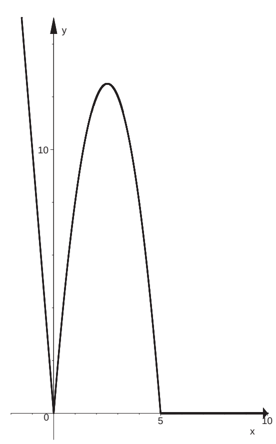


fig.13

Aplicações:

1. Resolva a inequação $|x| + |2x+1| + 2 > |x-2|$.
Solução: Pelo estudo do sinal feito no ex. 2 anterior, temos que $S = \mathbb{R} \backslash \{-1/2\}$.

2. Determine o domínio de $E(x) = \dfrac{x}{|x+3|-|x|-1}$.
   Soução: Pelo estudo do sinal feito no ex. 1 anterior, temos que $S = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, pois $|x+3|-|x|-1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

3. Determine o domínio de $E(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{||x-1|-2|+x}}$.
   Solução: Vamos estudar o sinal de $||x-1|-2|+x$ para determinarmos os pontos onde esta expressão é positiva. Tais pontos correspondem ao domínio de $E(x)$. Observando que

   $$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{se } \ x \geq 1; \\ -x+1, & \text{se}\, x < 1. \end{cases} \qquad \text{e}$$

   $$||x-1|-2| = \begin{cases} |x-1|-2, & \text{se}\, |x-1| > 2; \\ -|x-1|+2, & \text{se}\, |x-1| \leq 2. \end{cases} = \begin{cases} |x-1|-2, & \text{se } \ x > 3 \ ou \ x < -1; \\ -|x-1|+2, & \text{se } \ -1 \leq x \leq 3. \end{cases},$$

   obtemos a tabela

Exp./Intervalo	$x < -1$	$-1 \leq x \leq 1$	$1 < x < 3$	$x > 3$
$\|x-1\|$	$-(x-1)$	$-(x-1)$	$x-1$	$x-1$
$\|\|x-1\|-2\|$	$\|x-1\|-2$	$-\|x-1\|+2$	$-\|x-1\|+2$	$\|x-1\|-2$
$\|\|x-1\|-2\|+x =$	-1	$2x+1$	3	$2x-3$

   Devido à mudança de sinal de $||x-1|-2|+x$ no intervalo [-1,1], construímos outra tabela para o sinal desta expressão:

Intervalo	$x < -1/2$	$x = -1/2$	$x > -1/2$
Sinal de $\|\|x-1\|-2\|+x$	- - -	0	$+++$

   Logo, o domínio de $E(x)$ é $D = (-1/2, +\infty)$.

4. Determine o domínio de $E(x) = \sqrt{\dfrac{(8-x^3)|x-3|}{|x+1|-2x}}$.

5. Determine o domínio de $E(x) = \dfrac{\sqrt{(3x^2-x-2)}}{\sqrt{|x+1|-2x}\,|x+6|}$

6. Esboce o gráfico de $y = |x^2-x|+|x|-1$ e determine as interseções com os eixos coordenados.

1.16 Resolução de equações envolvendo módulos

Dada uma equação envolvendo duas expressões, digamos $F(x) = G(x)$, temos que x é uma solução dessa equação se e só se x é solução da equação equivalente $E(x) \equiv F(x) - G(x) = 0$ (ou $E(x) \equiv G(x) - F(x) = 0$). Portanto, para resolvermos uma equação qualquer, basta encontrarmos as raízes da equação equivalente associada.
Na seção anterior, vimos uma maneira de estudar o sinal e encontrar as raízes de uma expressão envolvendo soma ou diferença de módulos, portanto o método desenvolvido também constitui uma forma de resolver equações desse tipo.

Passemos agora à descrição de outro método para resolver equações do tipo $F(x) = G(x)$ envolvendo módulos. Em linhas gerais, o método consiste em substituir cada termo da equação do tipo $|E_i(x)|$ por $E_i(x)$ e $-E_i(x)$, formando, para cada passo desse tipo, duas novas equações (Não equivalentes à primeira em todo o seu domínio!). Assim, se tivermos n módulos na equação, formaremos 2^n equações, que ao serem resolvidas nos fornecerão *candidatos* às soluções da equação inicial. De posse dos candidatos, testamos[13] os mesmos na equação inicial para termos seu conjunto solução.

[13] Nem sempre esse método funciona. Imagine se você obtivesse uma infinidade de candidatos a solução da equação. Por exemplo, se o cojunto de candidatos fosse toda a semi-reta $(-\infty, 0]$ ou todo $\mathbb{R}$. Não haveria como testar cada candidato! Esse é o caso do ex.3 desta seção.

Em alguns exemplos, esse método pode ser rápido e bastante eficaz para se encontrar as soluções de uma equação com módulos. No entanto, se nosso objetivo for, além de encontrar as raízes, traçar o gráfico de uma expressão $E(x)$, esse método não ajuda . Nesse caso, podemos usar o método da seção anterior (seção1.15), onde dividimos a reta em intervalos onde nenhum termo em módulo troca de sinal e então reescrevemos a expressão em cada intervalo sem os módulos.

Exemplos:
1)Resolva as equações .

a) $|x| + 2x = |x+1| - 2$
Solução: Operando em $|x|$, obtemos as duas equações:

$$\begin{array}{rl} x + 2x = |x+1| - 2 & (1) \\ -x + 2x = |x+1| - 2 & (2). \end{array}$$

Operando em (1) sobre $|x+1|$, obtemos as equações:

$$\begin{array}{rl} x + 2x = x + 1 - 2 & (3) \\ x + 2x = -(x+1) - 2 & (4) \end{array}$$

Operando em (2) sobre $|x+1|$, obtemos as equações

$$\begin{array}{rl} -x + 2x = x + 1 - 2 & (5) \\ -x + 2x = -(x+1) - 2 & (6) \end{array}$$

Resolvendo as equações (3) , (4), (5) e (6), obtemos os candidatos a solução da equação dada $x = -1/2$, $x = -3/4$ e $x = -3/2$. Testando os candidatos , vemos que $S = \{-3/2\}$.

b) $|3x + |1-x|| = |x| + 1$
Solução: Operando em $|x|$, obtemos as duas equações:

$$\begin{array}{rl} |3x + |1-x|| = x + 1 & (1) \\ |3x + |1-x|| = -x + 1 & (2) \end{array}$$

Operando em (1) sobre $|3x + |1-x||$, obtemos as equações:

$$\begin{array}{rl} 3x + |1-x| = x + 1 & (3) \\ -3x - |1-x| = x + 1 & (4) \end{array}$$

Operando em (2) sobre $|3x + |1-x||$, obtemos as equações

$$\begin{array}{rl} 3x + |1-x| = -x + 1 & (5) \\ -3x - |1-x| = -x + 1 & (6) \end{array}$$

Finalmente, operando em (3), (4), (5) e (6), sobre $|1-x|$, obtemos as oito equações:

$$\begin{array}{c} 3x + 1 - x = x + 1 \\ 3x - 1 + x = x + 1 \\ -3x - 1 + x = x + 1 \\ -3x + 1 - x = x + 1 \\ 3x + 1 - x = -x + 1 \\ 3x - 1 + x = -x + 1 \\ -3x - 1 + x = -x + 1 \\ -3x + 1 - x = -x + 1 \end{array}$$

Resolvendo as oito equações, obtemos os candidatos a solução da equação dada $x = 2/5$, $x = \pm 2/3$, $x = 0$ e $x = -2$. Testando os candidatos , vemos que $S = \{0, -2\}$.

c) $|x| + 2\sqrt{x^2 + x - 6} = x$
Solução: Operando sobre $|x|$, obtemos duas equações, a saber

$$\begin{array}{rl} x + 2\sqrt{x^2 + x - 6} = x & (1) \\ -x + 2\sqrt{x^2 + x - 6} = x & (2) \end{array}$$

Resolvendo (1), temos $x = -3$ ou $x = 2$. De (2), obtemos $\sqrt{x^2 + x - 6} = x$, que elevando ao quadrado produz $x^2 + x - 6 = x^2$, cuja solução é $x = 6$. Assim, chegamos aos candidatos $x = -3$, $x = 2$ e $x = 6$. Testando os candidatos, obtemos $S = \{2\}$.

2)[14]Determine as raízes (ou os zeros) da expressão $E(x) = \dfrac{|x^2 - 3x| - |x| - 1}{4 - x + x^2}$. (Exercício)

3)Exemplo de uma equação para a qual o método dessa seção não funciona : $x|x| + x^2 = 0$.

Solução: Substituímos a equação por $x^2 + x^2 = 0$ e $x(-x) + x^2 = 0$. Mas,

$$\begin{array}{c} x^2 + x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ x(-x) + x^2 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Assim todo número real é candidato e o método é inconclusivo. Portanto, para encontrarmos as soluções, vamos usar a definição de módulo, dividindo a reta em dois intervalos. Se $x > 0$, a equação dada equivale a $x^2 + x^2 = 0$ que é equivalente a $x = 0$. Como $0 \notin (0, +\infty)$, descartamos $x = 0$ como solução para esse caso. Se $x \leq 0$, a equação equivale a $-x^2 + x^2 = 0$, cujo conjunto solução é $\mathbb{R}$. Como $x \leq 0$, segue que qualquer número real $x \leq 0$ é solução da equação inicial. Concluímos que $S = (-\infty, 0]$.

ATENÇÃO: O método que acabamos de desenvolver não se aplica às inequações. Não podemos substituir uma inequação por 2^n inequações sem os módulos e resolvê-las, pois não temos como testar os candidatos a solução. Em geral, no caso de inequações, o conjunto solução é formado por intervalo(s), possuindo assim, uma infinidade de pontos para teste.

1.17 Estudo do sinal de expressões usando o Teorema do Valor Intermediário

Já vimos que uma maneira eficiente de estudarmos o sinal de uma expressão é fatorando, estudando o sinal de cada fator e então operando o produto dos sinais. Para expressões envolvendo, por exemplo, somas de vários módulos, que não podem ser fatorados, dividimos a reta em intervalos, de tal forma que em cada intervalo *nenhum* termo em módulo muda de sinal. Então, nesses intervalos "abrimos"os módulos usando sua definição (seção 1.7) para reescrevermos a expressão dada sem os referidos módulos.

Nesta seção, vamos usar um importante resultado do Cálculo, conhecido como o *Teorema do Valor Intermediário* (TVI) para apresentar outra forma de estudar o sinal de expressões "bem comportadas"(contínuas[15]). Salvo menção explícita contrária, todas as expressões com as quais vamos operar serão "bem comportadas"em seus domínios. Portanto o referido teorema será aplicável ao nosso estudo, o que será feito na forma do resultado que chamaremos de *Teorema da preservação do sinal*, que é consequência imediata do TVI. Escrevendo em linguagem acessível ao curso e dentro do seu contexto, temos o seguinte enunciado:

[14]Os exs. 1)b), c) e 2 foram tirados de [1]

[15]Expressões que variam continuamente em seus domínios. A grosso modo, são aquelas cujos gráficos não possuem saltos ou quebras em pontos do domínio. Para maiores informações, veja, por exemplo, as referências [1] ou [2]. O Teorema do valor Intermediário não vale para qualquer expressão, sem a propriedade da continuidade, veja o exemplo $E(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & se\ x \neq 0; \\ 1, & se\ x = 0. \end{cases}$.
$E(x)$ não tem raízes em $\mathbb{R}$, mas troca de sinal.

Teorema da Preservação do Sinal: Se em todos os pontos de um intervalo I uma expressão contínua estiver bem definida e não possuir raízes nesse intervalo, então ela é sempre positiva em I ou ela é sempre negativa em I.

OBS: O Teorema do Valor Intermediário e o da Preservação do Sinal não valem se o domínio não for um intervalo.

Consequências:

1. Se I for um intervalo contido no domínio de uma expressão $E(x)$, que não possui nenhuma raiz de $E(x)$, então $E(x)$ não troca de sinal em I. Portanto, se para algum ponto $x_0 \in I$,
   - $E(x_0) > 0$, então $E(x) > 0, \forall x \in I$
   - $E(x_0) < 0$, então $E(x) < 0, \forall x \in I$
2. Se $E(x)$ trocar de sinal num intervalo I contido em seu domínio, então existe ao menos uma raiz de $E(x)$ em I.
   Interpretação geométrica: Se $E(x)$ trocar de sinal em I, isto é, se seu gráfico possuir algum ponto em I acima do eixo $0x$ e algum ponto abaixo de $0x$, então ele possui ao menos um ponto de interseção com $0x$. Veja o gráfico abaixo, o ponto P está acima do eixo $0x$ e Q está abaixo, portanto o gráfico corta $0x$ em algum ponto entre as abscissas de P e Q, que neste caso é $x = 1$.

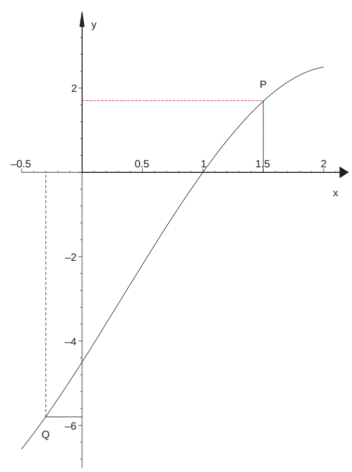


fig.14

Vejamos a seguir como aplicar o Teorema da Preservação do Sinal ao estudo do sinal de uma expressão.

1-ºCASO: O domínio de $E(x)$ é $\mathbb{R}$ ou um único intervalo I.

Nesse caso, encontramos todas as raízes de $E(x)$, digamos $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ e dividimos a reta orientada ou o intervalo I usando esses valores. Esse passo vai determinar $n+1$ intervalos abertos, $I_1, I_2, I_3, ..., I_{n+1}$, que não possuem nenhuma raiz de $E(x)$. Então, escolhemos $n+1$ pontos para teste, digamos $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_{n+1}$, tais que para cada $i \in \{1, 2, ..., n+1\}$, temos $\overline{x}_i \in I_i$. Em seguida, calculamos $E(\overline{x}_i)$ e pelas consequências enumeradas anteriormente, o sinal da expressão $E(x)$ em I_i vai acompanhar o sinal de $E(\overline{x}_i)$.

OBS: Os pontos $\overline{x}_i$ são escolhidos de forma arbitrária, porém é claro que escolhemos de forma a facilitar o cálculo do valor da expressão nessses pontos.

Exemplos: Estude o sinal de cada expressão $E(x)$ usando o Teorema da Preservação do Sinal.

1. $E(x) = (x+2)(x-1)$.
   Solução: As raízes de $E(x)$ são $x = -2$ e $x = 1$. Tomando $\overline{x}_1 = -3 \in (-\infty, -2) = I_1$, calculamos $E(-3) = 4 > 0$. Logo, $E(x) > 0, \forall x \in (-\infty, -2)$. Tomando $\overline{x}_2 = 0 \in (-2, 1) = I_2$, calculamos $E(0) = -2 < 0$. Logo, $E(x) < 0, \forall x \in (-2, 1)$. Finalmente, $\overline{x}_3 = 2 \in (1, +\infty) = I_3$, calculamos $E(2) = 4 > 0$. Logo, $E(x) > 0, \forall x \in (1, +\infty)$. Assim, temos o seguinte sinal de $E(x)$:

$$\begin{array}{ccccc} + + + + + & 0 & - - - - - & 0 & + + + + + \\ & -2 & & 1 & \end{array}$$

2. $E(x) = x^3 + 3x^2 - 4x$.
   Solução: Primeiro fatoramos $E(x)$ para calcularmos suas raízes : $E(x) = x(x^2+3x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 ou x = -4$ *ou* $x = 1$. Tomando $\overline{x}_1 = -5 \in (-\infty, -4) = I_1$, calculamos $E(-5) = -30 < 0$. Logo, $E(x) < 0, \forall x \in (-\infty, -4)$. Tomando $\overline{x}_2 = -1 \in (-4, 0) = I_2$, calculamos $E(-1) = 6 > 0$. Logo, $E(x) > 0, \forall x \in (-4, 0)$. Tomando $\overline{x}_3 = 1/2 \in (0, 1) = I_3$, calculamos $E(1/2) = -9/8 < 0$. Logo, $E(x) < 0, \forall x \in (0, 1)$. Finalmente, $\overline{x}_4 = 2 \in (1, +\infty) = I_4$, calculamos $E(2) = 12 > 0$. Logo, $E(x) > 0, \quad \forall x \in (1, +\infty)$. Assim, temos o seguinte sinal de $E(x)$:

   $$\underset{-4}{\overset{- - - - -\quad 0}{\bullet}} \overset{+ + + + + +\quad 0}{\longrightarrow} \underset{0}{\bullet} \overset{- - \; 0}{} \underset{1}{\bullet} \overset{+ + + + + +}{\longrightarrow}$$

3. $E(x) = (|x| - \pi)(\sqrt{x+6} - \sqrt{2}\, x)$
   (Exercício)

2-ºCASO: O domínio da expressão é um intervalo I menos um número finito de pontos.

Nesse caso, encontramos todas as raízes de $E(x)$, digamos $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ e dividimos o intervalo I usando esses valores e os pontos que não estão no domínio, denotados por $p_1, p_2, ..., p_k$. Esse passo vai determinar no máximo $n + k + 1$ intervalos abertos, que não possuem nenhuma raiz de $E(x)$. Escolhendo pontos para teste nesses intervalos, prosseguimos como no caso anterior. O intervalo I é qualquer, como por exemplo $(a, b), (a, +\infty)(-\infty, a], \mathbb{R}, etc.$

Exemplos:

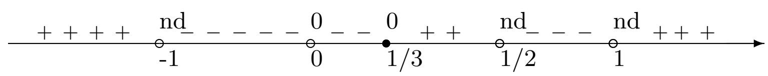
1. Estude o sinal de $E(x) = \dfrac{2x(x-2)}{x^2-1}$.
Solução: Nesse caso, o domínio da expressão é $D = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$, portanto $p_1 = -1$, $p_2 = 1$, e as raízes são $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$. Assim, vamos tomar pontos para teste nos intervalos abertos $(-\infty, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2) e (2, +\infty)$.
$E(-2) = 16/3 > 0 \Rightarrow E(x) > 0, \forall x \in (-\infty, -1)$.
$E(-1/2) = -10/3 < 0 \Rightarrow E(x) < 0, \forall x \in (-1, 0)$.
$E(1/2) = 2 > 0 \Rightarrow E(x) > 0, \forall x \in (0, 1)$.
$E(3/2) = -6/5 < 0 \Rightarrow E(x) < 0, \forall x \in (1, 2)$.
$E(3) = 3/4 > 0 \Rightarrow E(x) > 0, \forall x \in (2, +\infty)$.
Sinal de $E(x)$:

$$\overset{+ + + +}{} \underset{-1}{\overset{nd}{\circ}} \overset{- - - -}{} \underset{0}{\overset{0}{\bullet}} \overset{+ + + +}{} \underset{1}{\overset{nd}{\circ}} \overset{- - - -}{} \underset{2}{\overset{0}{\bullet}} \overset{+ + + + +}{\longrightarrow}$$

2. Estude o sinal de $E(x) = \dfrac{1 - \dfrac{x}{1-2x}}{1 - \dfrac{1}{x^2}}$.
Solução: Essa expressão não está bem definida quando :

- $1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$, pois nesse caso $\dfrac{x}{1-2x}$ não está bem definida.
- $x = 0$, pois nesse caso $1/x^2$ não está bem definida.
- $1 - \dfrac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$, pois anula o denominador da expressão.
  Logo, $D = \mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 1/2, 1\}$. Além disso, $E(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{x}{1-2x} = 0 \Leftrightarrow 1 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 1/3$.
  Assim, devemos escolher pontos para teste nos seguintes intervalos: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1/3)$, $(1/3, 1/2)$, $(1/2, 1)$ *e* $(1, +\infty)$.

Assim, temos
$E(-2) > 0 \Rightarrow E(x) > 0, \forall x \in (-\infty, -1)$.
$E(-1/2) < 0 \Rightarrow E(x) < 0, \forall x \in (-1, 0)$.
$E(0.2) < 0 \Rightarrow E(x) < 0, \forall x \in (0, 1/3)$.
$E(0.4) > 0 \Rightarrow E(x) > 0, \forall x \in (1/3, 1/2)$.
$E(0.6) < 0 \Rightarrow E(x) < 0, \forall x \in (1/2, 1)$.
$E(2) > 0 \Rightarrow E(x) > 0, \forall x \in (1, +\infty)$.
Sinal de $E(x)$:



3. Resolva a inequação $\dfrac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^3-1}}{x^5+1} \geq 0$. (Exercício)

1.18 2-ª abordagem do estudo do sinal de expressões envolvendo soma ou diferença de módulos

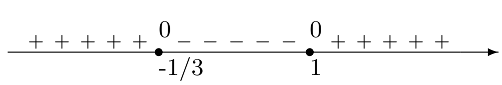
Nesta seção, vamos determinar as raízes das expressões envolvendo somas ou diferença de módulos utilizando o método da seção 1.16 e faremos o estudo de seu sinal tomando pontos para teste, conforme visto na seção anterior. Observe que esse método ***não*** pode ser usado se quisermos ***esboçar o gráfico*** da expressão.

Exemplos: Estude o sinal das expressões.

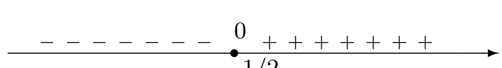
1. $E(x) = |2x| - |x+1|$.
   Solução: Primeiro, calculemos as raízes de $E(x)$, então

$$E(x) = 0 \Leftrightarrow |2x| = |x+1|. \text{ Daí, temos } \begin{cases} 2x = x+1 & (1) \\ ou \\ 2x = -(x+1) & (2). \end{cases}$$

   Mas, (1) tem solução $x = 1$ e a solução de (2) é $x = -1/3$, logo testando $x = 1$ e $x = -1/3$ na expressão, vemos que são raízes. Se $\overline{x}_1 = -1$, $E(-1) = 2 > 0$, portanto $E(x) > 0, \forall x < -1/3$.
   Se $\overline{x}_2 = 0$, $E(0) = -1 < 0$, portanto $E(x) < 0, \forall x \in (-1/3, 1)$. Se $\overline{x}_3 = 2$, $E(2) = 1 > 0$, portanto $E(x) > 0, \forall x \in (1, +\infty)$. Veja o sinal representado na reta orientada:



2. [16] $E(x) = ||x-1| - 2| + x$.
   Solução: As raízes de $E(x)$ são dadas por
   $||x-1|-2| + x = 0 \Leftrightarrow ||x-1|-2| = -x$. Daí, abrindo um módulo de cada vez, obtemos $x - 1 - 2 = -x$, ou $-x + 1 - 2 = x$, ou $-x + 1 - 2 = -x$, ou $x - 1 - 2 = x$. Observe que as duas últimas equações não possuem solução e das duas primeiras, obtemos os candidatos a solução da equação inicial $x = 3/2$ e $x = -1/2$. Testando os candidatos, temos que só $x = -1/2$ é raiz de $E(x)$.
   Como $E(0) = 1 > 0 \Rightarrow E(x) > 0$, $\forall x > -1/2$.
   Como $E(-1) = -1 < 0 \Rightarrow E(x) < 0$, $\forall x < -1/2$. Conforme a representação abaixo:



[16] Esse exercício foi resolvido usando o outro método de estudo do sinal , veja a aplicação 3 da seção 1.15

1.18.1 Exercícios

1)Considere a expressão $E(x) = |x^2 - 1| - |2x + 1| - 1$.

a) Estude seu sinal usando os dois métodos estudados em 1.15 e 1.18.

b) Esboce o gráfico da expressão.

2)Escolha o método e estude o sinal das expressões abaixo:

a) $E(x) = \dfrac{|x^3 - x^2| - 2|1 - x|}{x^2 + 3x - 1/2}$

b) $E(x) = |x| - |\sqrt{x - 1} - 3|$

c) $E(x) = |x| - |\sqrt{x - 1} - 1/2|$

d) $E(x) = \dfrac{\sqrt{-x^2 + 4x + 5}}{||x| - 1| - 1}$

3)Determine o domínio das expressões:

1. $E(x) = \dfrac{\dfrac{1}{2 - |x|}}{\sqrt{\sqrt{x} - 1 + x}}$
2. $E(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x - |x - 1/2|}}{\sqrt{\dfrac{8|x|^3 - 1}{-2x^2 + x - 1}}}$
3. $E(x) = \sqrt{\dfrac{x - |x - 1/2|}{-x^3 - x^2 - x}}$

4)Esboce o gráfico de $E(x) = |x| - |x^2 + x|$.

Referências

[1] Druck, S., Firmo, S. e Gomes, M. E., *Preparação para o Cálculo* , Apostila de aula , 2006.

[2] Guidorizzi, H. L. ,*Um curso de Cálculo*, LTC, 1992.

[3] Stewart, J., *Cálculo*, Thomson Learning , 2006.

2 Polinômios

2.1 Introdução

Os polinômios são fundamentais na matemática e nas diversas áreas do conhecimento, como em ciências sociais, física, engenharia, biologia entre outras, pois os polinômios modelam muitos problemas práticos. E como as operações envolvidas no cálculo de seus valores numéricos são simples, apenas somas e multiplicações, eles são importantíssimos no cálculo de valores numéricos de expressões(funções) mais complicadas, via aproximação polinomial. Nesta seção, estudaremos um pouco sobre os polinômios, onde demonstraremos os resultados mais simples.

Definição 2.1.1 *Um polinômio na variável x é uma expressão formada através da soma de produtos de constantes (reais ou complexas) por potências inteiras não negativas de x. Escrevemos*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

onde $a_n, a_{n-1}, ..., a_0$ são os coeficientes do polinômio, $n \geq 0$ inteiro e x é uma variável real (ou complexa).

OBS: Nesse texto vamos tratar de polinômio com coeficientes reais, porém as definições e resultados gerais que veremos também valem para os polinômios com os coeficientes complexos.

Definição 2.1.2 *Um polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ é identicamente nulo se e só se os coeficientes $a_i = 0$, $\forall i = 0, .., n$.*

Definição 2.1.3 *O grau de um polinômio não identicamente nulo é o maior expoente de x, tal que o coeficiente é não nulo. Denota-se por $gr(p(x))$.*

OBS: Não se define grau para o polinômio identicamente nulo.

Exemplos:

1. $p(x) = a_0$, $a_0 \neq 0$ é um polinômio constante, tem grau 0 e seu gráfico é uma reta horizontal. Note que nesse caso, $p(x) = a_0 = a_0 x^0$.
2. $p(x) = 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ tem grau 1 e seu gráfico é uma reta.
3. $p(x) = x^8 - x^3 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, tem grau 8.
4. Identifique os polinômios.

   a) $p(x) = x^{50} - x^{49} + x^{48} - x^{47} + ... - x + 1$, é um polinômio de grau 50.

   b) $p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + \dfrac{1}{x}$ não é polinômio, pois $\frac{1}{x} = x^{-1}$, o expoente é negativo.

   c) $p(x) = \sqrt{x} + x^3 + x^2 + x$ não é polinômio, pois $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, o expoente é fracionário.

   d) $p(x) = 5|x| + x^2 - 2$ não é um polinômio, observe que $p(x) = 5x + x^2 - 2$, se $x \geq 0$, $p(x) = -5x + x^2 - 2$, se $x < 0$.

Definição 2.1.4 *Dois polinômios $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ e $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0$ são iguais ($p = q$), se e só se os coeficientes dos termos de mesmo grau são iguais.*

OBS: Prova-se que $p = q \Leftrightarrow p(x) = q(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2.2 Operações com polinômios

Considere $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ e $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0$ polinômios de grau n e m, respectivamente.

Soma: $(p+q)(x) := p(x) + q(x)$, onde gr((p+q)(x))≤max{m,n}.

Multiplicação por um número real: Dado $c \in \mathbb{R}$, a multiplicação de $p(x)$ por c é outro polinômio, definido por $(cp)(x) := c.p(x) = ca_n x^n + ca_{n-1}x^{n-1} + ... + ca_1 x + ca_0$.
Se $c \neq 0$, $gr(cp(x)) = n$.

Diferença: A diferença entre $p(x)$ e $q(x)$ é um novo polinômio definido por $(p-q)(x) := (p + (-1)q)(x) = p(x) - q(x)$,onde $gr((p-q)(x)) \leq max\{m, n\}$.

Multiplicação: O produto entre dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ é um polinômio de grau n+m, definido por $(p.q)(x) = p(x).q(x)$, onde usando a distributividade, multiplicamos termo a termo.

Divisão: A divisão entre polinômios á dada pelo Teorema conhecido como Algoritmo de Euclides.

Teorema 2.2.1 ***(Algoritmo de Euclides)*** *Dados dois polinômios* $p(x)$ *e* $d(x)$ *(não identicamente nulo), existem polinômios* $q(x)$ *e* $r(x)$ *únicos, tais que*

$$p(x) = q(x)d(x) + r(x),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

onde $r \equiv 0$ *ou* $gr(r(x)) < gr(d(x))$.

Neste caso, $p(x)$ é chamado de **dividendo**; $d(x)$ de **divisor**; $q(x)$ de **quociente** ; $r(x)$ de **resto**.
Quando $gr(d(x)) > gr(p(x)$, temos que $q(x) \equiv 0$ e $r(x) = p(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Quando $r(x) \equiv 0$, temos a igualdade $p(x) = q(x)d(x)$ (a divisão é exata) e dizemos que $p(x)$ **é divisível por** $d(x)$.

Exemplo:
1)$p(x) = 4x^2 - 3x - 1 = (x-1)(4x+1)$, onde $q(x) = x - 1$ e $d(x) = 4x + 1$. Portanto, $p(x)$ é divisível por $d(x)$.

Método da Chave para divisão de polinômios:

Vamos dividir $p(x) = x^4 - 3x^2 + x - 1$ por $d(x) = x^2 - x + 1$. Começamos dispondo $p(x)$ e $q(x)$ na ordem decrescente das suas potências . Dividimos x^4 por x^2 o que resultará em x^2 que será colocado no lugar do quociente. A seguir, multiplicamos x^2 (do quociente) pelo divisor e o resultado é posto sob $p(x)$ com o sinal oposto para ser somado a $p(x)$. Então, recomeçamos o processo para o polinômio que resultou dessa soma. O processo termina, quando na coluna da esquerda é produzido um polinômio com grau menor do que o grau de $d(x)$.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & -3x^2 & +x & -1 & \quad x^2 - x + 1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +x^3 & -x^2 & & & \quad x^2 + x - 3 = q(x) \\ \cline{1-5}
 & x^3 & -4x^2 & +x & -1 & \\
 & -x^3 & +x^2 & -x & & \\ \cline{2-5}
 & & -3x^2 & & -1 & \\
 & & 3x^2 & -3x & +3 & \\ \cline{3-5}
 & & & -3x & +2 & = r(x)
\end{array}$$

Logo, $p(x) = (x^2 + x - 3)(x^2 - x + 1) + 2 - 3x$ e $\dfrac{p(x)}{d(x)} = \dfrac{x^4 - 3x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1} = x^2 + x - 3 + \dfrac{2 - 3x}{x^2 - x + 1}$.

Exemplo:
Usando o método da chave para dividir $p(x) = x^6 + 5x^4 - x + 1$ por $d(x) = 2x - 1$, encontramos o seguinte resultado:
$p(x) = (2x-1)\left(\dfrac{x^5}{2} + \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{21x^3}{8} + \dfrac{21x^2}{16} + \dfrac{21x}{32} - \dfrac{11}{64}\right) + \dfrac{53}{64}$. Confira!!

Dispositivo de Briot-Ruffini : Divisão por $(x - x_0)$

O dispositivo de Briot-Ruffini é uma maneira rápida de efetuarmos a divisão de um polinômio de grau n qualquer, pelo binômio $x - x_0$.
Vamos justificar para n=4, mas o dispositivo pode ser aplicado a n qualquer.

Considere $p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, com $a_4 \neq 0$. Do Algoritmo de Euclides (Teorema 2.2.1), sabemos que

$$p(x) = q(x)(x - x_0) + r, \quad (1)$$

onde $gr(q(x)) = 3$, digamos $q(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ e $r \in \mathbb{R}$, pois $r(x)$ é polinômio de grau zero, ou é identicamente nulo. Portanto, de (1), obtemos a identidade

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0)(x - x_0) + r$$

$$\Leftrightarrow a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = b_3x^4 + (b_2 - x_0b_3)x^3 + (b_1 - x_0b_2)x^2 + (b_0 - x_0b_1)x + (r - x_0b_0)$$

$\Leftrightarrow b_3 = a_4,\ b_2 = x_0b_3 + a_3,\ b_1 = x_0b_2 + a_2,\ b_0 = x_0b_1 + a_1,\ r = x_0b_0 + a_0$ (2), onde usamos a definição 2.1.4.

As identidades em (2) expressam os coeficientes do quociente $q(x)$ e o resto r em função de x_0 e dos coeficientes de $p(x)$. Essas fórmulas podem ser obtidas construindo o dispositivo:

$$\begin{array}{c|ccccc}
x_0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
\hline
 & a_4 & x_0b_3 + a_3 & x_0b_2 + a_2 & x_0b_1 + a_1 & x_0b_0 + a_0 \\
 & \| & \| & \| & \| & \| \\
 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & r
\end{array}$$

+ ×

- Colocamos x_0 e todos os coeficientes de $p(x)$ na 1ª linha da tabela na ordem decrescente dos graus dos fatores presentes em $p(x)$, conforme a tabela ao lado. Os coeficientes das potências menores do que $gr(p(x))$ que não "aparecem"na expressão de $p(x)$ são nulos.
- Repetimos o coeficiente do grau de $p(x)$, na 2ªlinha na posição imediatamente abaixo, esse é b_3.
- b_3 é multiplicado por x_0 e o resultado é somado a a_3, temos assim b_2.
- b_2 é multiplicado por x_0 e o resultado é somado a a_2, temos assim b_1. E assim sucessivamente, até obtermos o resto r.
- Na 2ª linha aparecem os coeficientes de $q(x)$ do termo de maior grau até o de grau zero, nesta ordem, da esquerda para a direita, e por último o resto da divisão.

Exemplo1: $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2$ será dividido por $(x+1)$. Nesse caso, $x_0 = -1$ e temos

$$\begin{array}{c|ccccc}
-1 & 1 & -3 & 2 & 0 & -2 \\
\hline
 & 1 & -4 & 6 & -6 & 4
\end{array}$$

Logo, $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2 = (x^3 - 4x^2 + 6x - 6)(x+1) + 4$.

Exemplo2: $p(x) = 2x^5 - x^2 - 1$ será dividido por $x - 2$.

$$\begin{array}{c|cccccc}
2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
\hline
 & 2 & 4 & 8 & 15 & 30 & 59
\end{array}$$

Logo, $p(x) = 2x^5 - x^2 - 1 = (2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 15x + 30)(x-2) + 59$.

Exemplo3: $p(x) = x^{100} - 2x + 1$ será dividido por $x - 1$.

$$\begin{array}{c|cccccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -2 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 1 & \underbrace{...}_{94\, vezes} & 1 & -1 & 0
\end{array}$$

Logo,
$p(x) = x^{100} - 2x + 1 = (x^{99} + x^{98} + x^{97} + ... + x^2 + x - 1)(x - 1)$.

O próximo resultado é conhecido como Teorema de D'Alembert , ele identifica o resto da divisão de um polinômio por $(x - x_0)$.

Teorema 2.2.2 ***(D'Alembert)*** *O resto da divisão de $p(x)$ por $x - x_0$ é $p(x_0)$.*

Demonstração: Pelo Algoritmo de Euclides, temos que o resto é constante (polinômio de grau zero ou identicamente nulo) e $p(x) = q(x)(x - x_0) + r \Rightarrow p(x_0) = r$. ■

Note que no exemplo1 anterior, encontramos $r = 4$ e $p(-1) = 4$. Idem para os outros dois exemplos.

Corolário 2.2.1 *O polinômio $p(x)$ é divisível por $x - x_0 \Leftrightarrow p(x_0) = 0$.*

Corolário 2.2.2 *O resto da divisão de $p(x)$ por $ax + b$ é $p\left(\frac{-b}{a}\right)$, onde $a \neq 0$.*

Demonstração: Do Corolário 2.2.2, temos p(x)= $q(x)\left(x - \frac{-b}{a}\right) + p\left(\frac{-b}{a}\right) = Q(x)(ax + b) + p\left(\frac{-b}{a}\right)$. Pela unicidade do resto o resultado segue.■

Dizemos que x_0 é **raiz** de $p(x)$ quando $p(x_0) = 0$. Logo, o Corolário 2.2.1 pode ser lido assim:

$$\boxed{p(x) \textbf{\textit{ é divisível por }} x - x_0 \Leftrightarrow x_0 \textbf{\textit{ é raiz de }} p(x).}$$

Se x_0 for raiz de $p(x)$, então $p(x) = (x - x_0)q(x)$, logo as raízes de $p(x)$ são x_0 e as raízes de $q(x)$.

Corolário 2.2.3 *Se $x_1, x_2, .., x_k$ são raízes distintas de $p(x)$, então temos a seguinte fatoração $p(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_k)s(x)$, onde $s(x)$ é um polinômio de grau n-k, onde $n = gr(p(x))$.*

Exemplo:
Sabendo que $x = 2$ e $x = 1$ são raízes de $p(x)$=$x^4 + 3x^2 - 3x^3 - 3x + 2$, fatore $p(x)$.
Solução: Podemos usar Briot-Ruffini duas vezes para efetuarmos as duas divisões:

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & -3 & 3 & -3 & 2 \\ \hline 2 & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & - \end{array}$$

Logo, $p(x)$= $(x - 1)(x - 2)(x^2 + 1)$.

Definição 2.2.1 ***(Multiplicidade de uma raiz)*** *Uma raiz x_0 de um polinômio $p(x)$ tem multiplicidade m $(m \geq 1)$ se $p(x)$for divisível por $(x - x_0)^m$ e não for divisível por $(x - x_0)^{m+1}$.*

Observe que uma raiz x_0 tem multiplicidade m se e só se p(x)= $q(x)(x - x_0)^m$, onde $q(x_0) \neq 0$

Exemplo:
Sabendo que -1 é raiz de $p(x)$= $2x^6 + 6x^4 + 4x^5 + 8x^3 - 12x - 2x^2 - 6$, determine sua multiplicidade.
Solução: Usando Briot-Ruffini temos que $p(x)$= $(x + 1)(2x^5 + 4x^3 + 2x^4 + 4x^2 - 6x - 6)$. Como $x = -1$ é raiz de $q(x) = 2x^5 + 4x^3 + 2x^4 + 4x^2 - 6x - 6$, pois $q(-1) = 0$, aplicando Briot-Ruffini a $q(x)$, obtemos $q(x) = (x+1)(2x^4+4x^2-6)$. Portanto, $p(x)$= $(x+1)^2(2x^4+4x^2-6)$. Mas, $x = -1$ é raiz de $g(x) = 2x^4+4x^2-6$, pois $g(-1) = 0$, daí $g(x) = (x + 1)(2x^3 + 6x - 2x^2 - 6)$, donde $p(x)$= $(x + 1)^3(2x^3 + 6x - 2x^2 - 6)$. Note que $x = -1$ não é raiz do polinômio $s(x) = 2x^3 + 6x - 2x^2 - 6$, pois $s(-1) \neq 0$, portanto $x = -1$ é raiz de $p(x)$ de multiplicidade 3.

Teorema 2.2.3 ***(Teorema Fundamental da Álgebra)*** *Todo polinômio de grau $n \geq 1$ tem ao menos uma raiz complexa.*

Consequências importantes do *Teorema Fundamental da Álgebra*:

1. Todo polinômio de grau $n \geq 1$ tem exatamente n raízes complexas.
2. Se os coeficientes de $p(x)$ forem reais, então suas raízes não reais aparecem aos pares conjugados ($a + bi$ e $a - bi$).
3. Todo polinômio de grau ímpar cujos coeficientes são reais tem ao menos uma raiz real.
4. *Teorema da Decomposição em Fatores Irredutíveis*:
   Todo polinômio com coeficientes reais pode ser decomposto como um produto de potências inteiras não negativas de fatores lineares (tipo $(ax+b)^k$, associados às raízes reais) e/ou fatores quadráticos irredutíveis em $\mathbb{R}$ (tipo $(ax^2 + bx + c)^k$, cujas raízes associadas são não reais)[17].

Exemplo:
A decomposição de $p(x)=(x^2-4)^2(x-1)^3(x^2+3))$ segundo o Teorema da Decomposição em Fatores Irredutíveis é a seguinte:

$$p(x)=(x-2)^2(x+2)^2(x-1)^3(x^2+3).$$

2.3 Pesquisa de raízes racionais

Sabemos encontrar raízes de polinômios de grau 2 pela conhecida fórmula de Bhaskara. Se o grau for 3, há a fórmula de Cardano[18] que não é muito conhecida e nem tão simples quanto a de Bhaskara, mas que pode nos ajudar a encontrar as raízes. Se o grau for superior a 3, o problema fica ainda mais complicado. Assim, vamos dar dois testes que podem ser feitos para procurar raízes inteiras e racionais de polinômios com coeficientes inteiros. Esses testes funcionam assim: *se o polinômio em questão possuir alguma raiz racional, saberemos identificá-la testando os valores que o polinômio assume num conjunto de teste formado por um número finito de elementos.*

Teorema 2.3.1 ***(Pesquisa de raízes inteiras)*** *Seja $p(x)$um polinômio com coeficientes inteiros, digamos $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$, onde $a_n, a_{n-1}, ..., a_1 \in \mathbb{Z}$ e $a_o \in \mathbb{Z}^*$. Se $x_0 \in \mathbb{Z}^*$ for raiz de $p(x)$, então x_0 é divisor de a_0.*

Demonstração : Por hipótese,
$0 = p(x_0) = a_nx_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + ... + a_1x_0 + a_0 \Rightarrow a_0 = x_0(-a_nx_0^{n-1} - a_{n-1}x_0^{n-2} - .... - a_1)$.
Os dois membros do lado direito da expressão anterior são inteiros, logo a_0/x_0 é inteiro, o que prova o teorema.■

Nas condições do teorema anterior, vemos que se $p(x)$ possuir alguma raiz inteira, esta deve pertencer ao *conjunto de teste formado pelos divisores do seu termo constante.* Portanto, se nenhum elemento desse conjunto for raiz de $p(x)$, então as raízes de $p(x)$ não são inteiras! Note que, em geral, nem todo elemento do conjunto de teste é raiz, isto é, no conjunto de teste pode haver mais elementos do que raízes, ou mesmo nenhuma raiz.

Exemplos:

1. Fatore $p(x) = 3x^3 - 12x - x^2 + 4$ e resolva a inequação $3x^3 - 12x + 4 \geq x^2$.
   Solução: Para a fatoração precisamos conhecer as raízes de $p(x)$. Vamos pesquisar as raízes inteiras, pois os coeficientes de $p(x)$ são inteiros. Conjunto para teste $T = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$, formado pelos divisores de 4. Note que $p(-1) = 12, p(1) = -6, p(-2) = 0, p(2) = 0, p(4) = 132, p(-4) = -156$, assim temos somente duas raízes inteiras para $p(x)$ a saber $x = 2$ e $x = -2$. Usando Briot-Ruffini duas vezes, ou o método da chave (com $d(x) = x^2 - 4)$), obtemos a fatoração $p(x) = (x - 2)(3x - 1)(x + 2)$.
   Para resolvermos a inequação, observe que esta equivale a $3x^3 - 12x - x^2 + 4 \geq 0$, assim basta estudarmos o sinal de $p(x)$. Fazendo o produto dos sinais, ou usando o Teorema do Valor Intermediário, segue que $p(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in S = [-2, 1/3] \cup [2, +\infty)$.

[17]Este Teorema é muito importante no *Cálculo Integral* para calcular integrais de funções que são quocientes de polinômios, ditas *funções racionais.*
[18]Para maiores informações pode-se consultar o site www.profcardy.com/calculadoras.

2. Estude o sinal de $p(x) = 5x^4 - x^3 - 4x^2 + x - 1$.
   Solução: Vamos fatorar o polinômio para podermos estudar o sinal; para tal, vamos pesquisar as raízes inteiras. Conjunto para teste $T = \{\pm 1\}$, formado pelos divisores de 1. Note que $p(-1) = 0, p(1) = 0$ e dividindo $p(x)$ por $(x^2 - 1)$, temos que $p(x) = (x^2 - 1)(5x^2 - x + 1)$. Observe que $y = 5x^2 - x + 1$ é uma parábola com raízes não reais e concavidade para cima , logo $5x^2 - x + 1 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Fazendo o produto dos sinais, temos que

   $$p(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1 \text{ ou } x < -1; \quad p(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1; \quad p(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

3. Estude o sinal de $p(x) = \dfrac{x^3}{2} - x^2 + \dfrac{x}{2} - 1$.
   Solução : Inicialmente, note que os coeficientes de $p(x)$ não são inteiros, mas racionais. Porém, podemos escrever $p(x) = \dfrac{q(x)}{2}$, onde $q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ possui os coeficientes inteiros . Como as raízes de $p(x)$ e $q(x)$ são as mesmas, vamos fazer a pesquisa das raízes inteiras em $q(x)$. Assim, o conjunto para teste $T = \{\pm 1, \pm 2\}$ é formado pelos divisores de 2. Calculando os valores de $q(x)$ para x em T , verificamos que somente $x = 2$ é raiz de $q(x)$ e portanto de $p(x)$. Daí, segue a fatoração $p(x) = \dfrac{1}{2}(x - 2)(x^2 + 1)$, donde o sinal de $p(x)$ é dado por

   $$p(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2; \quad p(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2; \quad p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

4. Estude o sinal de $p(x) = \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{2}$. (Exercício)

O polinômio $p(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 3$ não possui raiz inteira, pois $p(1) = -1; p(-1) = 5; p(-3) = -45; p(3) = 33$. Mas, será que tem alguma raiz fracionária? A resposta pode ser obtida através do próximo teorema.

Teorema 2.3.2 ***(Pesquisa de raízes racionais)*** *Seja $p(x)$ um polinômio com coeficientes inteiros, digamos $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, onde $a_n, a_{n-1}, ..., a_1 \in \mathbb{Z}$ e $a_0 \in \mathbb{Z}^*$. Se $\dfrac{m}{k} \in \mathbb{Q}^*$,* ***com*** *$m$* ***e*** *$k$* ***primos entre si****, for raiz de $p(x)$, então m é divisor de a_0 e k é divisor de a_n.*

Demonstração : Exercício.

Exemplos:

1. Verifique se o polinômio $p(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 3$ (veja o comentário anterior ao Teorema 2.3.2) possui raízes racionais.
   Solução: Vimos acima que $p(x)$ não possui raiz inteira, então vamos procurar raízes fracionárias no conjunto para teste $T = \left\{\dfrac{3}{2}, \dfrac{-3}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{2}\right\}$. Os cálculos mostram que $p\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0\,; p\left(\dfrac{-3}{2}\right) = \dfrac{3}{2}\,; p\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2};\ p\left(\dfrac{-1}{2}\right) = 5$. Logo, $x = \dfrac{3}{2}$ é a única raiz racional de $p(x)$.

2. Fatore o polinômio $p(x) = 12x^3 - 4x^2 - 3x + 1$ e determine o domínio de $E(x) = \dfrac{x^3 - 1}{12x^3 - 4x^2 - 3x + 1}$.
   Solução: Fazendo a pesquisa de raízes inteiras e racionais, procuramos raízes no conjunto $T = \{\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/3, \pm 1/4, \pm 1/6, \pm 1/12\}$. Encontramos $p(1/2) = 0, p(-1/2) = 0$ e $p(1/3) = 0$. Como o polinômio é de grau 3, essas são suas únicas raízes. Portanto, obtemos a fatoração $p(x) = 12(x - \dfrac{1}{2})(x + \dfrac{1}{2})(x - \dfrac{1}{3})$, ou $p(x) = (2x - 1)(2x + 1)(3x - 1)$. O domínio D de $E(x)$ é o conjunto dos números reais, tais que $p(x) > 0$, portanto estudando o sinal de $p(x)$, obtemos que $D = (-1/2, 1/3) \cup (1/2, +\infty)$.

   Atenção: Se $x_1, x_2, ...x_n$ são raízes reais de um polinômio de grau n, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, então $p(x)$pode ser decomposto como $p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)..(x - x_n)$.

3. Mostre que $\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$, $\forall r \in \mathbb{N}$ primo.
   Solução : Note que $\sqrt{r}$ é raiz do polinômio $p(x) = x^2 - r$. Suponha por absurdo que $\sqrt{r} \in \mathbb{Q}$, então pela pesquisa de raízes racionais, segue que, $\sqrt{r} = 1$ ou $\sqrt{r} = r$, já que os divisores positivos de r são 1 e r. Portanto, r satisfaz $r = 1$ ou $r = r^2$, donde $r = 0$ ou $r = 1 \longleftarrow$ ABSURDO!, pois r é primo .
   Em particular $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, ... \notin \mathbb{Q}$.

4. Determine o conjunto dos números reais tais que o gráfico de $g(x) = 2x^3 + 9x$ está acima ou intersecta o gráfico da parábola $y = x^2 - 5$.
   Solução : Precisamos resolver a inequação $2x^3 + 9x \geq x^2 - 5 \Leftrightarrow 2x^3 + 9x - x^2 + 5 \geq 0$. Para tal, vamos estudar o sinal do polinômio $p(x) = 2x^3 + 9x - x^2 + 5$.

   - Pesquisa de raízes inteiras: $p(-1) = -7; p(1) = 15; p(5) = 275; p(-5) = -315$. Logo, não há raízes inteiras.
   - Pesquisa de raízes racionais (não inteiras): $p(-1/2) = 0\,; p(1/2) = 19/2$; $p(5/2) = 105/2$; $p(-5/2) = -55$. Logo, a única raiz racional de $p(x)$ é $x = -1/2$.
   - Fatoração de $p(x)$ para estudo do sinal : $p(x) = (x + 1/2)(2x^2 - 2x + 10)$
     $2x^2 - 2x + 10 > 0\, \forall x \in \mathbb{R}$, pois o delta associado é negativo e a concavidade é para cima. Portanto, o sinal de $p(x)$ é o seguinte:
     $p(x) > 0 \Leftrightarrow x > -1/2$; $\quad p(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1/2$; $\quad p(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1/2$.
     Assim, $S = [-1/2, +\infty)$. Veja a seguir na fig.13 os gráficos da parábola $y = x^2 - 5$ e da cúbica $g(x) = 2x^3 + 9x$.

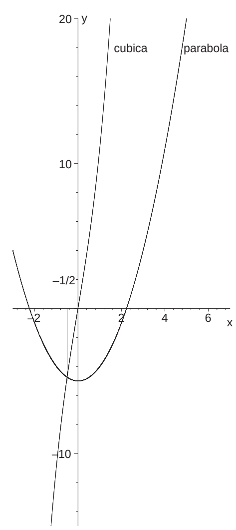


fig.15

OBS:

- A pesquisa de raízes racionais estende a de raízes inteiras.
- Se o coeficiente do termo de maior grau de um polinômio com coeficientes inteiros for 1 ou -1 , então ele não possuirá raízes fracionárias. Se possuir alguma raiz racional, esta será, na verdade, inteira.

Referências

[1] Iezzi,G.,Dolce,O.,Degenszajn,D.,Périgo,R. ,*Matemática*, Atual, 1997.

[2] Stewart, J., *Cálculo*, Thomson Learning , 2006.

[3] Dal-Bello,K.,Sad,L.,Campos,M.L.,Fernandez,M., *Matemática Básica*, Apostila de aula ,1992.

3 Funções Reais a uma Variável Real

3.1 Introdução

As funções são utilizadas para descrever o mundo real em termos matemáticos, é o que se chama de modelagem matemática para as diversas situações. Podem, por exemplo, descrever o ritmo cardíaco, crescimento populacional, variações de temperatura, movimento de objetos, custos e lucros de uma empresa, oscilações do solo num terremoto, entre muitas outras coisas. A noção de função é a principal ferramenta para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral, pois constitui o ambiente no qual o Cálculo é desenvolvido. Dentre as funções mais importantes destacamos os polinômios, as funções racionais, as funções raízes, as trigonométricas, exponenciais e logarítmicas. Nesse curso, vamos estudar um pouco de cada função citada, com exceção das exponenciais e logarítmicas, que serão abordadas nos cursos de Matemática Básica e Cálculo a uma variável real.

Nesta segunda parte do curso de Pré-Cálculo, será utilizado como texto o capítulo 1 do seguinte livro de Cálculo: *Stewart, J., Cálculo vol.1 , Thomson Learning , 2006.* Antes, porém, faremos abaixo uma pequena introdução ao conceito de função real a uma variável real.

3.2 O Conceito de Função

As funções surgem quando uma quantidade (variável dependente) depende de outra (variável independente). Observe os exemplos:

1. A temperatura T da água numa panela que é colocada para ferver depende do tempo transcorrido t. Assim, nessa situação T é a variável dependente e t a variável independente.

2. A área A de um círculo depende de seu raio r e essa dependência se expressa através da fórmula bem conhecida $A = \pi r^2$.

3. A população humana mundial P depende do tempo t e pode ter uma representação aproximada utilizando uma tabela.

Ano	População (bilhões)
1900	1,650
1910	1,750
1920	1,860
1930	2,070
1940	2,300
1950	2,560
1960	3,040
1970	3,710
1980	4,450
1990	5,280
2000	6,080
2007	6,600

4. O cardiologista avalia o ritmo cardíaco de um indivíduo através do eletrocardiograma. Esse gráfico mostra a variação do potencial elétrico (variável dependente) em relação ao tempo e gera uma imagem em ondas, cujo padrão determina a condição cardíaca do paciente.

Em todos os casos acima temos uma associação que a cada valor da variável independente(tempo ou raio), atribui um único valor à variável dependente. Essa situação constitui o que chamamos de *função*, cuja definição matemática é a seguinte :

Definição 3.2.1 *Uma função de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ para outro conjunto $B \subset \mathbb{R}$ é uma regra (lei) que a cada elemento $x \in A$ associa um único elemento $y \in B$.*

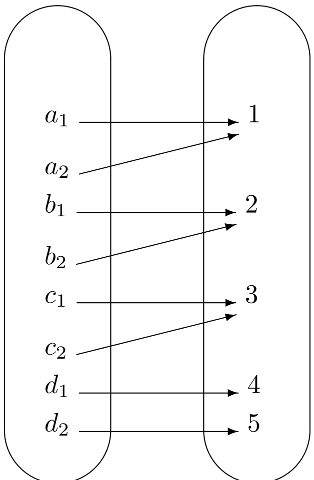
Costuma-se denotar uma função por letras como f(ou $g, h, T, u, ...$). E a seguinte notação, devida a Euler é utilíssima $y = f(x)$ (Lê-se "y é igual a f de x"). Outra maneira de denotar uma função é $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ ou ainda

$$\begin{array}{cccc} f & A & \longrightarrow & B \\ & x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

O conjunto A é dito o *domínio* da função f, também denotado por $D(f)$, e B é dito seu *contradomínio* .

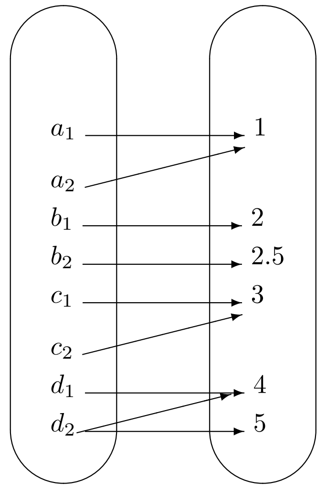
Importante : Para ser considerada função, a lei deve ser capaz de associar a cada elemento do domínio <u>*um único*</u> *elemento do contradomínio. Se houver ambiguidade na associação, a lei não é considerada uma função. Uma forma clássica de representar essa idéia é através do diagrama de flechas :*

Representação de uma função usando um diagrama de flechas.



$A \xrightarrow{f} B$

Representação de uma associação que ***não*** é função usando um diagrama de flechas.



Exemplos de funções:

1. $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.
2. Os polinômios $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, $x \in \mathbb{R}$, onde n é um inteiro não negativo e $a_n, .., a_0$ são constantes reais, são funções definidas em toda a reta real $\mathbb{R}$. Para $n = 2$ a função é dita quadrática e para $n = 3$, a função é dita cúbica.

Quando uma função for definida através de uma expressão sem referência ao domínio ou contradomínio, estaremos supondo que o domínio é o maior subconjunto de $\mathbb{R}$, onde a expressão pode ser calculada e nos fornece valores reais para y e que o contradomínio é $\mathbb{R}$.
Exemplos:

1. A função $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{|x|-2}$, tem como domínio $D(f) = [-3,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty)$ e contradomínio $\mathbb{R}$.
2. A função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{1-x}$ tem como domínio $D(f) = (0,1]$ e contradomínio $\mathbb{R}$.

Note que as expressões trabalhadas nos capítulos anteriores são exemplos de funções reais.

Definição 3.2.2 *Duas funções f e g são* iguais, *escrevemos $f = g$, se e só se D(f)=D(g) , possuem o mesmo contradomínio e $f(x) = g(x)$, $\forall x \in D(f)$.*

Exemplos:

1. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ e $g(x) = x+1$ são funções diferentes, pois $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\} \neq D(g) = \mathbb{R}$.
   O que ocorre é o seguinte: as duas funções são diferentes, porém possuem a mesma imagem em cada ponto de $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$, isto é $f(x) = g(x), \forall x \in D(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
2. $f(x) = \dfrac{x^4-1}{x^2+1}$ e $g(x) = x^2-1$ são funções iguais, pois $D(f) = D(g) = \mathbb{R}$, o contradomínio é o mesmo e $\dfrac{x^4-1}{x^2+1} = x^2-1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Definição 3.2.3 *O Conjunto Imagem de uma f é denotado por $Im(f)$ e é definido como*

$$Im(f) = \{f(x) \in B; x \in A\}.$$

Assim, $Im(f) \subset B$, podendo ser conjuntos distintos, isto é $Im(f) \subsetneq B$.

O comportamento de uma função é rapidamente visualizado através de seu *gráfico*, que é o conjunto dos pares ordenados $\{(x, f(x)); x \in D(f)\}$. O esboço do gráfico no plano cartesiano nos fornece o comportamento da f, seu domínio sobre o eixo $0x$ e sua imagem sobre o eixo $0y$. Quando o $D(f)$ é um intervalo ilimitado, procuramos traçar uma parte do seu gráfico que contenha todas as suas propriedades interessantes, como raízes, pontos de mudança de crescimento, onde ocorrem saltos, entre outros, e tal que se tenha uma idéia do que ocorre no restante do gráfico. Confira os exemplos a seguir, que constituem alguns *tipos básicos de gráficos de funções* com os quais trabalharemos no restante do curso.

3.3 Alguns tipos básicos de gráficos de funções

1. $y = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes,. é dita uma *função afim.* O gráfico é uma reta horizontal se $a = 0$ ou uma reta inclinada , se $a \neq 0$.

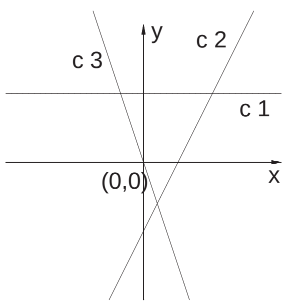


Figura 1: c_1 é a reta $y = 1$, c_2 é $y = 2x - 1$ e c_3 é $y = -3x$. Excetuando as retas horizontais (a=0), o conjunto imagem é toda a reta $\mathbb{R}$.

2. $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. O gráfico é uma parábola.

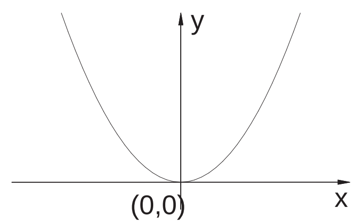


Figura 2: O conjunto imagem é $[0, +\infty)$.

3. $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. .

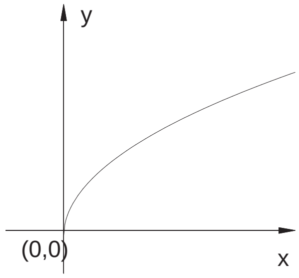


Figura 3: O conjunto imagem é $[0, +\infty)$.

4. $y = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$. O gráfico é uma hipérbole. O gráfico de qualquer potência *ímpar negativa* de x tem o mesmo aspecto desse gráfico .

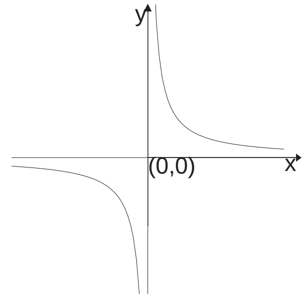


Figura 4: O conjunto imagem é $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

5. $y = \dfrac{1}{x^2}$, $x \neq 0$. O gráfico de qualquer. potência *par negativa* de x tem o mesmo aspecto desse gráfico .

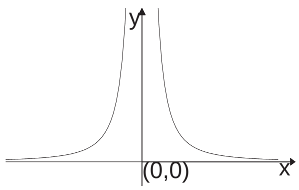


Figura 5: O conjunto imagem é $(0, +\infty)$.

6. $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leq x \leq r$, onde $r > 0$. O gráfico é uma semicircunferência centrada na origem de raio r.

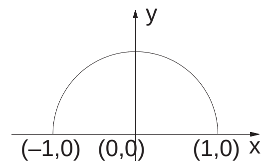


Figura 6: Gráfico do caso $r = 1$. O conjunto imagem é $[0, 1]$.

7. $y = x^3$, $x \in \mathbb{R}$. O gráfico de qualquer. potência inteira $n \geq 3$ *ímpar* de x tem o mesmo aspecto desse gráfico .

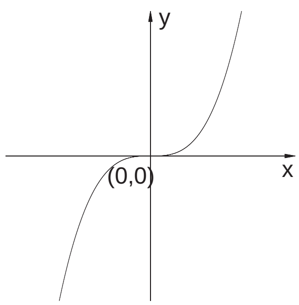


Figura 7: O conjunto imagem é $\mathbb{R}$.

8. $y = x^4$, $x \in \mathbb{R}$. O gráfico de qualquer potência $n \geq 2$ *par* de x tem o mesmo aspecto desse gráfico .

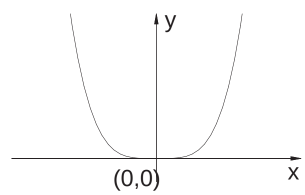


Figura 8: O conjunto imagem é $[0, +\infty)$.

9. $y = \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$. O gráfico de qualquer raiz de índice *ímpar* de x tem o mesmo aspecto desse gráfico .

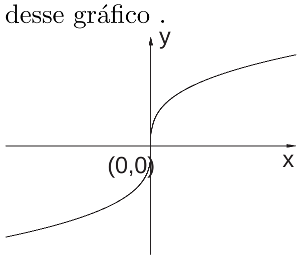


Figura 9: O conjunto imagem é $\mathbb{R}$.

10. $y = \sqrt[4]{x}$, $x \geq 0$. O gráfico de qualquer raiz de índice *par* de x tem o mesmo aspecto desse gráfico.

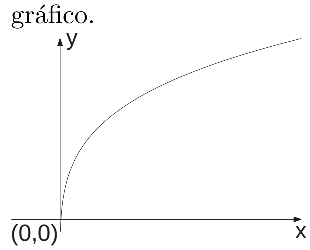


Figura 10: O conjunto imagem é $[0, +\infty)$.

Algumas funções são definidas por partes, isto é, podem envolver várias expressões, como mostram os próximos exemplos.

11. $y = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.
Nesse caso, $y = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0; \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$ Portanto, o gráfico da função valor absoluto coincide com a semi-reta $y = x$, para $x \geq 0$ e com a semi-reta $y = -x$, se $x < 0$.

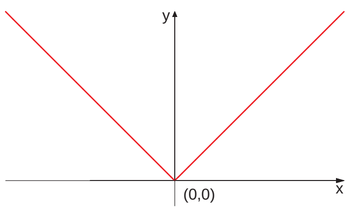


Figura 11: O conjunto imagem é $[0, +\infty)$.

12. $y = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}, & \text{se } x \geq 2; \\ 1 - x, & \text{se } -1/2 \leq x < 2. \end{cases}$

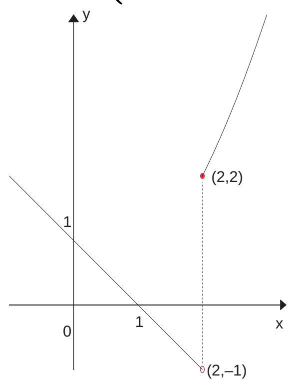


Figura 12: O conjunto imagem é $(-1, 3/2] \cup [2, +\infty)$.

Assim, o gráfico de uma função real a uma variável real é uma curva no plano. Mas, será que toda curva no plano é gráfico de uma função ?! A resposta é $N\tilde{A}O$! Veja a curva a seguir, chamada de Lemniscata.

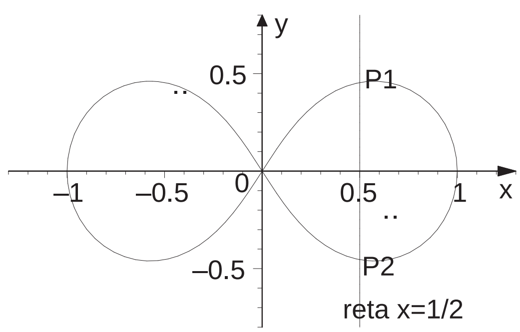


Figura 13: A Lemniscata não é gráfico de uma única função de x (nem de y)!

Observe que à abscissa $x = 1/2$, estão associados dois valores $y = y_0$ e $y = -y_0$. Isto é, a reta vertical $x = 1/2$ intersecta a curva em dois pontos, a saber $P_1 = (1/2, y_0)$ e $P_2 = (1/2, -y_0)$. Portanto, a curva não representa o gráfico de uma função. Note que o mesmo acontece para qualquer valor de $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Este é o chamado *teste da reta vertical.*

Teste da reta vertical: ***Uma curva no plano xoy é gráfico de uma (única) função de x, se e só se, toda reta vertical tiver no máximo um ponto de interseção com a curva.***

Exemplos:
1. A curva $y^2 - x = 0$ é uma parábola invertida, como mostra o gráfico abaixo. Não é gráfico de uma função de x, mas podemos descrevê-la usando duas funções, $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, que descreve a parte superior e $y = -\sqrt{x}$, $x \geq 0$, que descreve a parte inferior.

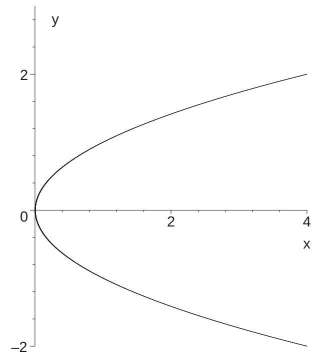


Figura 14: A parábola invertida $y^2 - x = 0$.

2. A circunferência $x^2 + y^2 = r^2$, onde $r > 0$ é o raio, também não é gráfico de uma função de x, mas podemos descrevê-la usando duas funções, $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$, que descreve a parte superior e $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$, que descreve a parte inferior.

Dependendo da situação, também podemos usar a variável y como variável independente. Nesse caso, podemos formular o *Teste da reta horizontal* para verificar se uma curva é gráfico de uma função de y.

Teste da reta horizontal:* *Uma curva no plano xoy é gráfico de uma (única) função de y, se e só se, toda reta horizontal tiver no máximo um ponto de interseção com a curva.

Observe que, no exemplo 1 acima, a curva pode ser descrita por uma (única) função de y, a saber $x = y^2$, $y \in \mathbb{R}$. Porém, no exemplo 2, tal não acontece.

Exercício:
Considere a curva $x^2 + y^2 = 1$, para $-1 \leq y \leq 1$ e $0 \leq x \leq 1$.

a) Como posso descrevê-la usando x como variável?

b) Como posso descrevê-la usando y como variável?

3.4 Funções definidas verbalmente

Algumas fuções podem ser apresentadas verbalmente, isto é, usando apenas palavras, sem expressões matemáticas. Nesse caso, devemos encontrar a expressão matemática que define a função descrita verbalmente, esse processo é um exemplo simples do que chamamos de modelagem matemática. Para isso, fazemos um esboço do problema, através de desenhos, listagem das variáveis envolvidas e em muitos casos encontramos uma ou mais equações matemáticas que relacionem as variáveis.

Exercícios:

1. Um retângulo tem área igual a $25m^2$.

- **a)** Expresse seu perímetro como função do comprimento de um de seus lados.
- **b)** Determine o comprimento dos lados do retângulo, cujo perímetro é igual a $25m$.
- **c)** Determine o menor valor do perímetro que um retângulo com a área dada pode ter.

2. Considere uma janela normanda, cujo formato é de um retângulo em cima do qual se coloca um semicírculo.

- **a)** Se o perímetro da janela for de $8m$, expresse sua área como função da largura.
- **b)** Determine as dimensões que a janela deve ter para que sua área assuma o maior valor possível.

3. Uma partícula move-se ao longo da curva $y = \sqrt{x}$. Determine a distância da partícula à origem em função de: a)x , b)y.
Em que ponto estará a partícula, quando sua distância à origem for igual a $\sqrt{6}$ unidades?

4. Uma escada com $3m$ de comprimento está apoiada num parede vertical. Se a base da escada desliza, afastando-se da parede, determine a distância da base da escada à parede em função da distância da base da parede ao topo da escada.

5. Um tanque de água tem o formato de um cone invertido, com base de raio $2m$ e altura de $4m$. Suponha que água esteja sendo bombeada no tanque. Expresse o volume da água no tanque em função da profundidade.

3.5 Exercícios Complementares

1. Encontre o conjunto dos números reais x, tais que o gráfico da reta $y = 2$ intersecta $y = |x|$. Esboce.

2. Encontre o conjunto dos números reais x, tais que o gráfico da reta $y + x = 2$ intersecta $y = x^2$. Esboce.

3. Determine o conjunto de valores reais que a constante a pode assumir, para que a parábola $y = x^2$ intersecte a reta $y - x = a$ em exatamente 2 pontos. Esboce. Quais são as outras possibilidades?

4. Resolva a equação e dê uma interpretação em termos de gráficos de funções. Esboce.

1. $\dfrac{1}{x^2} = 8x$
2. $|x| = 1 - x^2$

5. Resolva a inequação e dê uma interpretação em termos de gráficos de funções. Esboce.

1. $\dfrac{1}{x} < x$
2. $|x| \leq 1 - x^2$
3. $\dfrac{1}{x} < \dfrac{x^2 - 2x}{9}$

6. Pinte a região no 1^{o} quadrante limitada pelo eixo $0x$, a reta $x + y = 9$ e $y = \sqrt{x}$. Encontre as interseções.

7. Esboce a região limitada pela parábola invertida $x = y^2$ e a reta $x + 2y = 3$.

Referências

[1] Stewart, J., *Cálculo*, Thomson Learning, 2006.

[2] Thomas, G. B., *Cálculo*, Pearson, 11ª edição, 2008.