

UFF Universidade Federal Fluminense
 EGM - Instituto de Matemática
 GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 3 - 2008-1
 Limite e limites laterais
 Continuidade

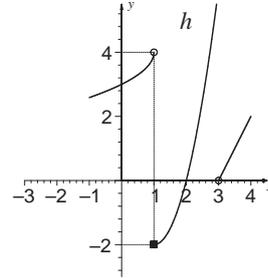
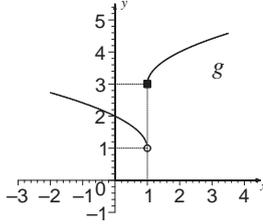
1. Os gráficos de g e h são dados. Ache os limites laterais de f no ponto indicado.

$$f(x) = g(x) \cdot h(x)$$

e

$$f(x) = (h \circ g)(x)$$

ambas no ponto $x = 1$



2. Dadas as funções $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{se } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$,

(i) Esboce o gráfico de f e g ;

(iii) Dê a expressão da função $F(x) = f(x) \cdot g(x)$

(ii) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$;

e verifique se existe $\lim_{x \rightarrow 1} F(x)$.

3. Dê um exemplo no qual $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)|$ existe, mas $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ não existe.

4. Se $f(x) > 0$ para todo $x \neq 2$ e $f(2) = -3$, verifique se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas. Caso seja verdadeira, apresente uma justificativa. Caso seja falsa, apresente um contra-exemplo.

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ não existe

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$

(c) Se existir, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ é positivo

5. Sabe-se que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ e f é definida em \mathbb{R} . Todas as afirmativas abaixo são falsas. Tente desenhar um contra-exemplo para cada uma delas.

(a) $f(x) > 0$ para $x \in (1, 3)$

(b) $f(2) = 5$

(c) $f(2)$ é positivo

Nos exercícios 6. a 11. calcule o limite, caso exista. Caso não exista, justifique.

6. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + 5x - 3}{2x^2 - 5x + 2}$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6} - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{x}$

7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(1-x^2) - 2(1-x^3)}{(1-x^3)(1-x^2)}$

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{1 + \sqrt[3]{3x-1}}$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2} - (x+1)}{x}$

11. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{|x-1|}$

Nos exercícios 12. a 14. verifique se a função dada é contínua nos pontos indicados. Justifique a resposta.

12. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & , \quad x \neq 1 \\ 2 & , \quad x = 1 \end{cases}$ em $x = 1$

14. $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)[|x|]$, para $-2 \leq x \leq 2$,

onde $[|x|]$ = maior inteiro que não supera x .

Pontos $x = 0$ e $x = 1$.

13. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^6+x^2+2}$ em qualquer $x \in \mathbb{R}$

(Sugestão: esboce o gráfico de f)

15. Para a função f definida por $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{2-x} & , \quad x < 1 \\ ax+b & , \quad 1 \leq x < 2 \\ |x^2-7x+12| & , \quad x \geq 2 \end{cases}$

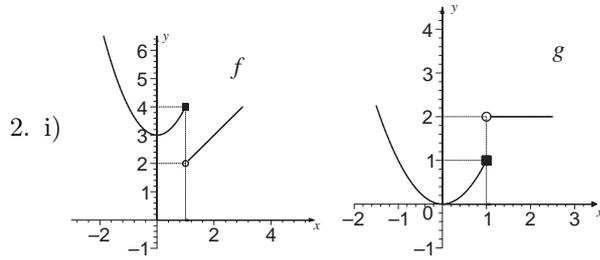
(a) Determine os valores de a e b para que f seja contínua em \mathbb{R}

(b) Esboce o gráfico de f .

16. Dê um exemplo com duas funções f e g tais que f seja contínua em $x = 0$, g seja descontínua em $x = 0$ e no entanto $f \cdot g$ seja contínua em $x = 0$.

RESPOSTAS

1. $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) \cdot h(x) = 4$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) \cdot h(x) = -6$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} (h \circ g)(x) = -2$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} (h \circ g)(x) = 0$



ii) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 2$
 iii) $F(x) = \begin{cases} (x^2 + 3)x^2 & , x \leq 1 \\ 2(x + 1) & , x > 1 \end{cases}$
 $\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = 4$

3. $f(x) = \frac{x}{|x|}$

4. (a) Falso (b) Falso (c) Falso. Contra-exemplo: $f(x) = \begin{cases} |x - 2| & \text{se } x \neq 2 \\ -3 & \text{se } x = 2 \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$

6. $-\frac{7}{3}$ 7. $\frac{1}{2}$ 8. -2 9. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4\sqrt{3}}$ 10. $\frac{1}{3}$

11. $f(x) \rightarrow 3$ se $x \rightarrow 1^-$ e $f(x) \rightarrow -3$ se $x \rightarrow 1^+$, portanto o limite não existe

12. Não, pois $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2} \neq 2 = f(1)$

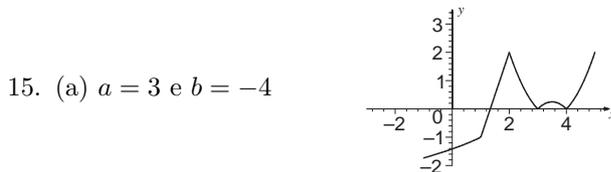
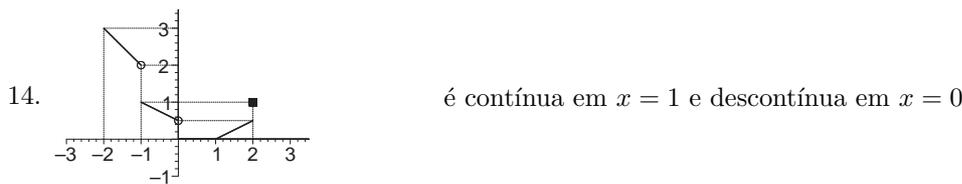
13. Sim, é contínua em \mathbb{R} .

O denominador nunca se anula pois $x^6 + x^2 \geq 0 \Rightarrow x^6 + x^2 + 2 \geq 2 > 0$. Analogamente, o radicando $y = x^2 + 1 > 0$. Logo o domínio de f é igual a \mathbb{R} .

Assim basta verificar se as funções do numerador e denominador são contínuas para todo $x \in \mathbb{R}$, pois sabemos que o quociente de funções contínuas é uma função contínua.

Verificando:

A função do denominador é contínua em \mathbb{R} pois é uma função polinomial (qualquer função polinomial é contínua em \mathbb{R}). A função do numerador é a composição de duas funções: a função raiz e uma função polinomial. Como a função raiz é contínua em $[0, \infty)$, em particular é contínua em $(0, \infty)$, isto é, neste caso $\forall x \in \mathbb{R}, y = x^2 + 1 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, y \in (0, \infty) \Rightarrow \sqrt{y}$ é contínua em $(0, \infty)$. Como a composta de contínuas é contínua, a função do numerador é contínua.



16. $f(x) = |x|$ e $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$