

**UFF** Universidade Federal Fluminense  
 EGM - Instituto de Matemática  
 GMA - Departamento de Matemática Aplicada

**LISTA 4 - 2012-1**  
 Derivadas parciais de ordem superior

1. Calcule todas as derivadas parciais de terceira ordem da função de produção  $Q = 4K^{3/4}L^{1/4}$ . Use o teorema de Schwarz para acelerar o processo.
2. Uma função  $z = f(x_1, \dots, x_n)$  é *harmônica* se ela satisfaz a *equação de Laplace*  $\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} = 0$ . Mostre que a função  $z = f(x, y) = x^3 - 3xy^2$  é harmônica.

Quais das funções dos exercícios 3. a 8. satisfazem a equação de Laplace?

3.  $z = f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$
4.  $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ .
5.  $z = f(x, y) = y^3 + 3x^2y$ .
6.  $z = f(x, y, z) = e^x \sin y + e^y \sin z$ .
7.  $z = f(x, y) = \arctan(x/y)$
8.  $z = f(x, y) = \ln(x/y)$ .
9. Verifique que  $v = \sin(kx) \cdot \sin(akt)$  satisfaz a *equação da onda*  $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ .
10. No estudo da penetração da geada em uma rodovia, a temperatura  $T$  no instante  $t$  e à profundidade  $x$  pode ser dada aproximadamente por  $T = T_0 e^{-\lambda x} \sin(\omega t - \lambda x)$ , em que  $T_0$ ,  $\omega$  e  $\lambda$  são constantes. Mostre que  $T$  satisfaz a *equação unidimensional do calor*:  $\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ , com  $k = 2\lambda^2/w$ .

**EXERCÍCIO OPCIONAL**

11. O objetivo deste exercício é examinar uma função de classe  $C^1$  para a qual a tese do teorema de Schwarz falha: as derivadas parciais mistas não são iguais. Seja

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Prove que  $f$  se anula sobre os eixos  $x$  e  $y$ . Conclua então que  $(\partial f/\partial x)(0, 0)$  e  $(\partial f/\partial y)(0, 0)$  são iguais a zero.
- (b) Calcule  $\partial f/\partial x$  e  $\partial f/\partial y$  para pontos  $(x, y) \neq (0, 0)$  e conclua que  $(\partial f/\partial x)(0, y) = -y$  e  $(\partial f/\partial y)(x, 0) = x$ .
- (c) Mostre que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y - 0} = -1$ .
- (d) Mostre que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x - 0} = +1$  e conclua que as derivadas parciais mistas de  $f$  não são iguais em  $(0, 0)$ .
- (e) Calcule  $(\partial^2 f/\partial x \partial y)(x, y)$  para  $(x, y) \neq (0, 0)$ .
- (f) Use o item anterior para mostrar que  $(\partial^2 f/\partial x \partial y)(x, x) = 0$  para  $x > 0$ .
- (g) Conclua que  $(\partial^2 f/\partial x \partial y)(x, y)$  é descontínua na origem  $(0, 0)$  e assim  $f$  não é uma função de classe  $C^2$ . Logo a hipótese do teorema de Schwarz (a saber,  $f$  é uma função de classe  $C^2$ ) não se verifica.

**RESPOSTAS DA LISTA 4**

1.  $Q_K = 3K^{-1/4}L^{1/4}$ ;  $Q_L = K^{3/4}L^{-3/4}$ ;  $Q_{KK} = -(3/4)K^{-5/4}L^{1/4}$ ;  $Q_{LL} = -(3/4)K^{3/4}L^{-7/4}$ ;  $Q_{KKK} = (15/16)K^{-9/4}L^{1/4}$ ;  $Q_{LLL} = (21/16)K^{3/4}L^{-11/4}$ ;  $Q_{KL} = Q_{LK} = (3/4)3K^{-1/4}L^{-3/4}$ ;  $Q_{KLK} = Q_{LKK} = Q_{KKL} = -(3/16)3K^{-5/4}L^{-3/4}$ ;  $Q_{KLL} = Q_{LKL} = Q_{LLK} = -(9/16)3K^{-1/4}L^{-7/4}$
3. Sim      4. Sim      5. Não      6. Sim      7. Sim      8. Não