LISTA 5

Nos exercícios 1. a 12., use a definição para verificar se a integral inprópria converge ou diverge. Calcule o valor das integrais impróprias que convergem.

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}\,dx$

2. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2-3x+2}$

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$

5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x-8)^{\frac{2}{3}}}$

6. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2-1}\,dx$

7. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}\operatorname{sen} t\,dt$

8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx$

9. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

10. $\displaystyle\int_1^{3} \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}\,dx$

11. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^4}\,dx$

12. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st}\operatorname{senh} t\,dt,\quad s>1$

13. Calcule, se possível, a área da região R limitada pela curva $4y^2 - xy^2 - x^2 = 0$ e sua assíntota, situada à direita do eixo y.

14. Calcule, se possível, a área da região R situada no primeiro quadrante e abaixo da curva de equação $y = e^{-x}$.

Nos exercícios 15. a 23. discuta a convergência da integral $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)$ para a função f dada.

15. $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$

16. $f(x) = e^{-x}\ln x$

17. $f(x) = \dfrac{1}{x+e^x}$ (compare com $\dfrac{1}{e^x}$)

18. $f(x) = \dfrac{|\operatorname{sen} x|}{x^2}$

19. $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^3+x^2+1}$

20. $f(x) = \dfrac{2+\operatorname{sen} x}{x}$ (compare com $\dfrac{1}{x}$)

21. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1+x^2}$

22. $f(x) = e^x \ln x$

23. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}$ (compare com $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x^3}}$)

24. Discuta a convergência de $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{dx}{x^s\ln x}$ (Sugestão: Para $s>1$, compare com $\dfrac{1}{x^s}$; para $s=1$, calcule a integral; para $s<1$, compare com $\dfrac{1}{x\ln x}$)

Nos exercícios 25. a 30. discuta a convergência das integrais impróprias.

25. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^8+x^6+2}}\,dx$ (compare com $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^8}}$)

26. $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^s}$ (calcule a integral)

27. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x\ln x}$ (compare com $\dfrac{1}{x+x\ln x}$)

28. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$ (faça $u=\sqrt{x}$ e calcule a integral)

29. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x\operatorname{sen} x}$ (compare com $\dfrac{1}{x}$)

30. $\displaystyle\int_2^{3} \frac{x^2+1}{x^2-4}\,dx$ (calcule a integral)

RESPOSTAS DA LISTA 5

1. 2
2. diverge (∞)
3. $\ln 2$
4. 0
5. diverge (∞)
6. $\dfrac{\ln 3}{2}$
7. $\dfrac{1}{2}$
8. 2
9. 1
10. $\dfrac{2\sqrt{26}}{3}$
11. diverge (∞)
12. $\dfrac{1}{s^2-1}$
13. $2\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{4-x}}\,dx = \frac{64}{3}$
14. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$
15. divergente, pois $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \infty \neq 0$
16. convergente, pois $x \geq 1 \Rightarrow 0 \leq e^{-x}\ln x \leq e^{-x}x \Rightarrow 0 \leq \displaystyle\int_1^\infty e^{-x}\ln x\,dx \leq \int_1^\infty e^{-x}x\,dx = \frac{2}{e}$
17. convergente, pois $x \geq 1 > 0 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{e^x+x} < \dfrac{1}{e^x} \Rightarrow 0 < \displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{e^x+x}\,dx < \int_1^\infty \frac{1}{e^x}\,dx = \frac{1}{e}$
18. convergente, pois $\forall x \neq 0,\ 0 \leq \dfrac{|\operatorname{sen} x|}{x^2} \leq \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow 0 \leq \displaystyle\int_1^\infty \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2}\,dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1$
19. divergente, pois $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x^3+x^2+1} = 1 \neq 0$
20. divergente, pois $x \geq 1 > 0 \Rightarrow \dfrac{2+\operatorname{sen} x}{x} \geq \dfrac{1}{x} \geq 0 \Rightarrow \displaystyle\int_1^\infty \frac{2+\operatorname{sen} x}{x}\,dx \geq \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \infty$
21. convergente, pois $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow 0 \leq \displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+x^2}\,dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$
22. divergente, pois $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^x \ln x = \infty \neq 0$
23. divergente, pois $x \geq 1 > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} \geq \dfrac{1}{\sqrt[3]{2x^3}} > 0 \Rightarrow \displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}\,dx \geq \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{2x^3}}\,dx = \infty$
24. $s > 1$: convergente, pois $x \geq e \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{x^s \ln x} \leq \dfrac{1}{x^s} \Rightarrow 0 < \displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x^s\ln x}\,dx \leq \int_e^\infty \frac{1}{x^s}\,dx = \frac{e^{1-s}}{s-1}$

    $s = 1$: divergente, pois $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx = \infty$

    $s < 1$: divergente, pois $x \geq e > 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x^s\ln x} \geq \dfrac{1}{x\ln x} \Rightarrow \displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x^s\ln x}\,dx \geq \int_e^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx = \infty$
25. converge, pois $\forall x \neq 0 \Rightarrow 0 < \dfrac{x^2}{\sqrt{x^8+x^6+2}} < \dfrac{x^2}{\sqrt{x^8}} = \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow 0 < \displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2}{\sqrt{x^8+x^6+2}}\,dx < \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1$
26. $s \leq 1$: divergente, pois $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^s}\,dx = \infty$

    $s > 1$: convergente, pois $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^s}\,dx = \frac{1}{s-1}$
27. diverge: $x \geq 1 > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{1+x\ln x} \geq \dfrac{1}{x+x\ln x} > 0 \Rightarrow \displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{1+x\ln x}\,dx \geq \int_1^\infty \frac{1}{x+x\ln x}\,dx = \infty$
28. $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{0+\epsilon}^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\sqrt{\epsilon}}^1 e^{-u^2}\,du$. Não é possível aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo para calcular $\int_{\sqrt{\epsilon}}^1 e^{-u^2}\,du$ pois não é possível encontrar a primitiva da função e^{-u^2}, mas há um teorema que garante que toda função contínua definida em um intervalo fechado e limitado é integrável, isto é, o limite da Soma de Riemann existe e é finito. Aplicando esse teorema, a função e^{-u^2} é contínua no intervalo $[\sqrt{\epsilon}, 1]$, logo $\int_{\sqrt{\epsilon}}^1 e^{-u^2}\,du$ é um número finito. Assim, apesar de não podermos calcular a integral original, podemos concluir que é convergente.
29. divergente, pois $0 < x < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{x\operatorname{sen} x} > \dfrac{1}{x} > 0 \Rightarrow \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x\operatorname{sen} x}\,dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x}\,dx = \infty$
30. divergente, pois $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2+1}{x^2-4}\,dx = \int_2^3 \left(1 + \frac{5}{4(x-2)} - \frac{5}{4(x+2)}\right)\,dx = \infty$