

Nos exercícios 1. a 15. calcule cada limite, quando possível. Caso conclua que o limite não existe, justifique.

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^n - x^{n-1})$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{(2x-2)^2}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^5 + x^2}$

6. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2\sqrt{6x} - 3\sqrt{4x}}{4x^2 - 4x + 1}$

7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$

8. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8}$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) + \sin(3x) + \sin(5x)}{\tan(2x) + \tan(4x) + \tan(6x)}$

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin(ax))(x + \tan(bx))}{1 - \cos(cx)}, \quad a, b, c \neq 0$

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin x \cos x}$

12. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{1 - x^2}$

13. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\tan x)}{\tan x}$

14. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) - 1}{x \cos x}$

15. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x}}\right)$

16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$

17. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \sin(x) - 1}{x^3 + 1}$

18. Achar as constantes a e b de modo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(ax + b - \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} \right) = 0$.

19. Calcule os limites laterais de $f(x) = \frac{g(x)}{\sin x}$ em $x = 0$, se $g(x) = \begin{cases} \cos(x) + 3 & , \quad x < 0 \\ x^2 - 9 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$

Nos exercícios 18. e 19. verifique se a função é contínua no ponto indicado. Justifique a resposta.

20. $f(x) = \begin{cases} x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{em } x = 0$

21. $f(t) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{t}}{1 - \sqrt[3]{t}} & \text{se } t \neq 1 \\ 3/2 & \text{se } t = 1 \end{cases} \quad \text{em } t = 1$

22. Verifique se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 1 + ax & , \quad x \leq 0 \\ x^4 + 2a & , \quad x > 0 \end{cases}$ seja contínua em \mathbb{R} .

23. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $x \sin x \leq f(x) \leq x^2 \cos^2 x, \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Verifique se f é contínua em $x = 0$.

Para cada função dos exercícios 24. a 26. determine um intervalo de amplitude 1, no qual está localizado pelo menos um zero dessa função.

24. $f(x) = x^3 + x - 1$ 25. $f(x) = x^3 + 3x - 5$ 26. $f(x) = 1 + x \cos \frac{\pi x}{2}$

27. Mostre que os gráficos de $y = 1$ e $y = x^2 \tan x$ têm interseção em pelo menos um ponto do intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

28. Dê um exemplo de uma função tal que em dois pontos distintos $x = a$ e $x = b$ a função tem sinais contrários, f não é contínua no intervalo $[a, b]$ e a tese do Teorema do Valor Intermediário é verdadeira.

29. Dê um exemplo de uma função tal que em dois pontos distintos $x = a$ e $x = b$ a função tem sinais contrários, f não é contínua no intervalo $[a, b]$ e a tese do Teorema do Valor Intermediário é falsa.

30. Se uma função f muda de sinal quando x varia de um ponto $x = x_1$ para o ponto $x = x_2$, existirá obrigatoriamente um ponto entre x_1 e x_2 onde a função f se anula? Justifique sua resposta.

RESPOSTAS

1. Se n for par, \nexists pois a função $\rightarrow +\infty$
e se n for ímpar, \nexists pois a função $\rightarrow -\infty$

2. -1

3. 1

4. \nexists pois se $x \rightarrow 1^-$ a função $\rightarrow -\infty$
(ou se $x \rightarrow 1^+$ a função $\rightarrow +\infty$)

5. 10

6. \nexists pois se $x \rightarrow \frac{1}{2}^-$ a função $\rightarrow -\infty$
(ou se $x \rightarrow \frac{1}{2}^+$ a função $\rightarrow -\infty$)

7. $\frac{49}{24}$

12. $\frac{\pi}{2}$

8. $\frac{1}{144}$

13. 1

9. $\frac{3}{4}$

14. 0

10. $\frac{2(1-a)(1+b)}{c^2}$

15. 0

11. $\frac{3}{2}$

16. 1

19. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

20. Não, pois $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$

21. Sim, pois $\lim_{t \rightarrow 1} f(t) = \frac{3}{2} = f(1)$

22. $\frac{1}{2}$

23. Sim

24. $f(0) = -1 < 0 < 1 = f(1)$,
 f é contínua em $[0, 1]$.

Pelo Teorema do Valor Intermediário (TVI), existe um c ; $0 < c < 1$; $f(c) = 0$, isto é, existe um zero da função no intervalo $[0, 1]$.

25. Idem ao 22. para o intervalo $[1, 2]$

26. Idem ao item 22. para o intervalo $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

27. Aplicando o TVI em $f(x) = -1 + x^2 \tan x$ no intervalo $[0, \pi/3]$, mostra-se que f tem um zero no intervalo $[0, \pi/3]$.

Isto é, $\exists c; c \in [0, \pi/3]; f(c) = 0$.

Como $[0, \pi/3] \subset (-\pi/2, \pi/2)$, temos que

$\exists c; c \in (-\pi/2, \pi/2); -1 + c^2 \tan c = f(c) = 0$.

Isto é, $\exists c; c \in (-\pi/2, \pi/2); c^2 \tan c = 1$.

28. $f(x) = \frac{(x+1)^2}{1-x}$ em $[-2, 2]$;

29. $f(x) = \frac{1}{x}$ em $[-1, 1]$

30. Não. Ver exemplo 29.