

LISTA 6

Nos exercícios 1. a 8. descreva e esboce o domínio da função real de duas ou de três variáveis, isto é, descreva analiticamente e represente geometricamente o maior subconjunto do \mathbb{R}^2 ou do \mathbb{R}^3 que torna a expressão que define a função, verdadeira em \mathbb{R} .

1. $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

5. $f(x, y) = \ln(xy - 1)$

2. $f(x, y) = \ln x + \ln y$

6. $f(x, y) = \arcsen(x - y)$

3. $f(x, y) = \sqrt{|x| - |y|}$

7. $f(x, y, z) = y + \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2}$

4. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

8. $f(x, y, z) = \frac{\sqrt{4 - x^2} + \sqrt{9 - y^2}}{\sqrt{1 - z^2}}$

9. Considere a função de duas variáveis

$$f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

definida em um subconjunto D de \mathbb{R}^2 . Faça um esboço do gráfico de f em cada um dos três casos abaixo.

(a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq +1 \text{ e } -1 \leq y \leq +1\}$.

(c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2/4 + y^2/9 \leq 1\}$.

10. Considere a função

$$z = f(x, y) = \ln(e^{x+y} - 1).$$

(a) Escreva a equação da curva de nível de f que passa pelo ponto $(8, 2)$ e da curva de nível que passa pelo ponto $(-2, 3)$.

(b) Mais geralmente, escreva a equação da curva de nível de f que passa pelo ponto (a, b) , com $b > -a$.

(c) Mostre que o valor de f sobre a reta $y = -x + 2$ é constante, isto é, que $y = -x + 2$ é uma curva de nível de f .

(d) Mostre que o valor de f sobre a reta $y = -x + 3$ é constante, isto é, que $y = -x + 3$ é uma curva de nível de f .

(e) Se, por um momento, f representasse um lucro e você fosse um empresário, sob qual reta você gostaria de estar: $y = -x + 2$ ou $y = -x + 3$? Justifique sua resposta.

Nos exercícios 11. a 18. esboce as curvas de nível e o gráfico da função dada.

11. $f(x, y) = 8 - 2x - y$

14. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

17. $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$

12. $f(x, y) = x^2 - y$

15. $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$

13. $f(x, y) = 2x^2 + y^2$

16. $f(x, y) = xy$

18. $f(x, y) = \frac{1}{y^2}$

19. Na figura (??) temos, respectivamente, o desenho das curvas de nível das seis funções a seguir. Faça a associação destas seis curvas de nível com cada um dos seis gráficos apresentados na figura (??).

- (a) $z = f_1(x, y) = \text{sen}(xy)/(xy),$
- (b) $z = f_2(x, y) = e^{-x^2} + e^{-4y^2},$
- (c) $z = f_3(x, y) = 15x^2y^2e^{-x^2-y^2}/(x^2 + y^2),$
- (d) $z = f_4(x, y) = (xy^3 - x^3y)/2,$
- (e) $z = f_5(x, y) = \text{sen}(\sqrt{x^2 + y^2}),$
- (f) $z = f_6(x, y) = (y^4 - 8y^2 - 4x^2)/21.$

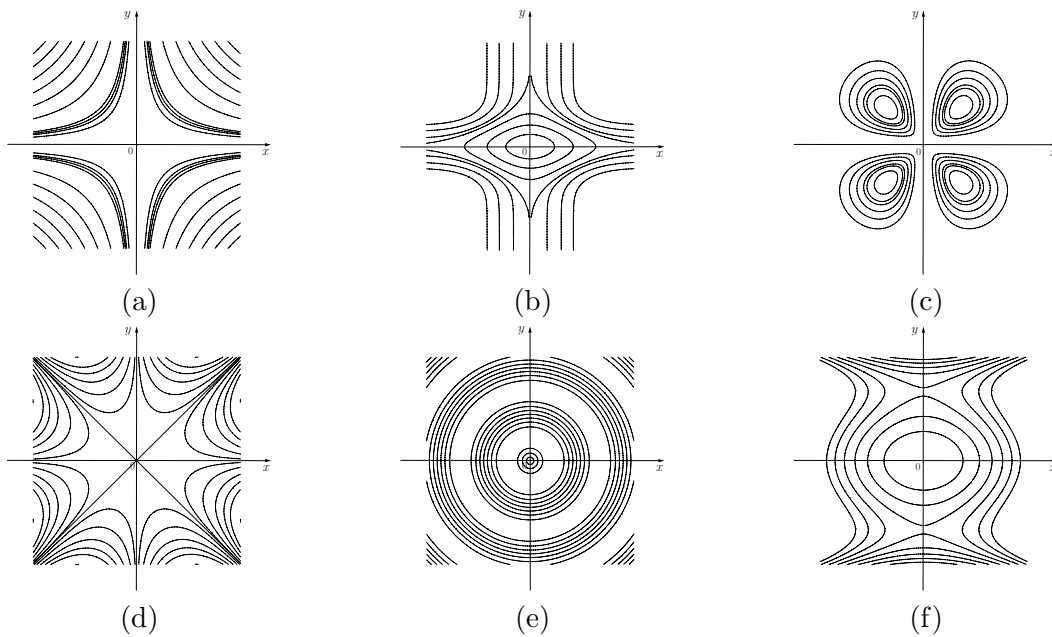


Figura 1: Curvas de nível de seis funções diferentes.

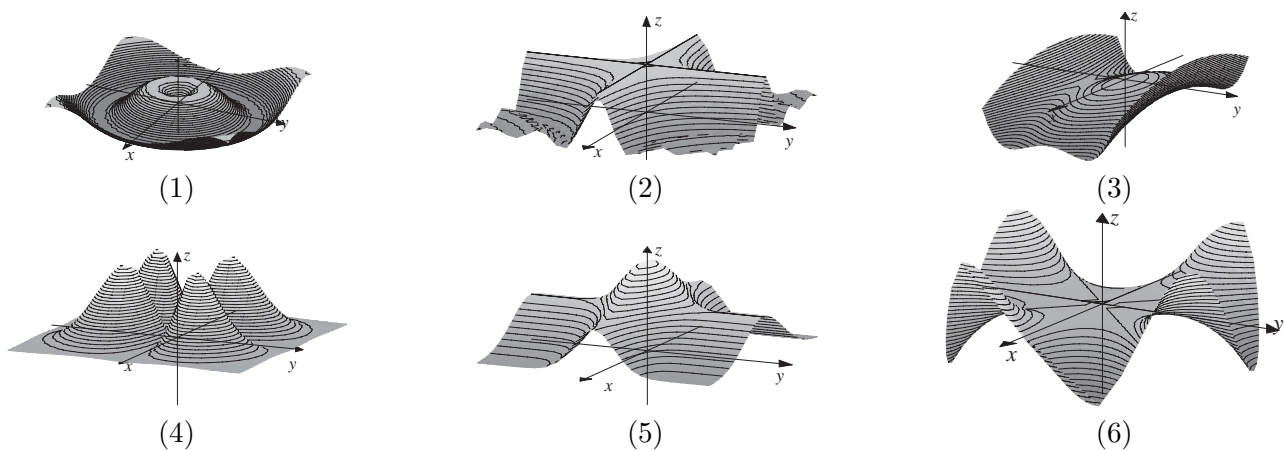


Figura 2: Gráfico de seis funções diferentes.

Nos exercícios 20. a 23. utilize os planos $x = k$, $y = k$ e $z = k$ para fazer um esboço da superfície de nível de cada uma das funções abaixo f associada ao nível $w = 0$. Se preciso, leia o comentário a seguir para resolver esses exercícios.

20. $w = f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$

21. $w = f(x, y, z) = x^2 - y$

22. $w = f(x, y, z) = x^2 + 2 - z$

23. $w = f(x, y, z) = |y| - z$

Comentário: **(Superfícies cilíndricas)** Todas estas superfícies de nível têm algo em comum: apesar de f depender de três variáveis, apenas *duas* aparecem na expressão algébrica que define f . Mais especificamente, temos

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{onde} \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(x, y, z) \mapsto w = f(x, y, z) = g(x, y),$$

para o caso onde é a variável “ z ” que está faltando na definição de f . Como você deve ter percebido, para desenhar uma superfície de nível $w = k$ de uma função deste tipo, basta desenhar a curva de nível $g(x, y) = k$ de g no plano xy e então, sobre cada ponto desta curva, desenhar uma reta perpendicular ao plano xy (veja a figura abaixo). Os casos onde a variável “ x ” ou a variável “ y ” estão faltando são tratados de maneira análoga. Estas superfícies de nível são denominadas *superfícies cilíndricas*.

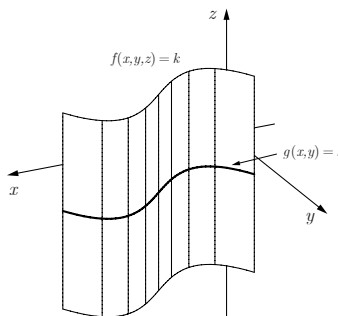


Figura 3: Uma superfície cilíndrica.

Em cada um dos exercícios 24. a 31. chame de n o nível da função dada e encontre todos os possíveis valores de n . Chame de $C_n(f)$ o conjunto de nível n de f e descreva analiticamente todos os possíveis conjuntos de nível n da função dada e ainda, se for possível, represente-os geometricamente.

24. $f(x, y) = \arcsen(xy)$

29. $f(x, y) = \frac{x}{y-1}$

25. $f(x, y) = x^2 + y^2 - z^2$

30. $f(x, y, z, w) = \frac{\sqrt{x-y}}{z-w}$

26. $f(x, y, z) = x + y + z$

31. $f(x, y) = y \sen x$

27. $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$

32. $f(x, y) = \arctan(x^2 + y^2)$

28. $f(x, y) = x^2 + y^2$

33. O desenho de uma esfera de centro em $(0, 0, 0)$ e raio 1 pode ser o gráfico de alguma função $z = f(x, y)$ de duas variáveis? Justifique sua resposta.

34. As superfícies de nível da função $w = f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$ associadas aos níveis $w = -2$, $w = 0$ e $w = 2$ podem se cortar? Justifique sua resposta!
35. Resolva as questões abaixo.
- (a) Considere a função $w = f(x) = x^2$. Determine os conjuntos de nível de f e faça um esboço de seu gráfico.
 - (b) Considere a função $w = g(x, y) = x^2$. Determine as curvas de nível de g e faça um esboço de seu gráfico.
 - (c) Considere a função $w = h(x, y, z) = x^2$. Determine as superfícies de nível de h .
 - (d) Suponha que você chegue em uma sala de aula onde a única sentença escrita no quadro é: "Faça um esboço do gráfico da função $w = x^2$ ". Que desenho você faria?
36. Resolva as questões abaixo.
- (a) Faça o gráfico da função $y = f(x) = x^2$. Escreva uma função $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ cuja curva de nível associada ao nível 0 seja igual ao gráfico de f .
 - (b) Mais geralmente, dada uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, escreva uma função $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ cuja curva de nível associada ao nível 0 seja igual ao gráfico de f . O que você pode dizer a respeito das curvas de nível de F para níveis diferentes de 0?
 - (c) Seja $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. Escreva uma função $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ cuja superfície de nível associada ao nível 0 seja igual ao gráfico de f .
 - (d) Mais geralmente, dada uma função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, escreva uma função $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ cuja superfície de nível associada ao nível 0 seja igual ao gráfico de f . O que você pode dizer a respeito das superfícies de nível de F para níveis diferentes de 0?

EXERCÍCIOS OPCIONAIS

37. Uma chapa plana de metal está situada no plano xy de modo que a temperatura T (em $^{\circ}\text{C}$) no ponto (x, y) é inversamente proporcional à distância da origem $(0, 0)$.
- (a) Descreva as *isotérmicas*, isto é, as curvas de nível de T que representam pontos onde a temperatura é constante.
 - (b) Se a temperatura no ponto $(4, 3)$ é 40°C , ache a equação da isotérmica para uma temperatura de 20°C .
38. O potencial elétrico V no ponto (x, y, z) é dado por

$$V = 6/(x^2 + 4y^2 + 9z^2)^{1/2}.$$

- (a) Descreva as *superfícies equipotenciais*, isto é, as superfícies de nível de V que representam pontos onde o potencial elétrico é constante.
 - (b) Ache a equação da superfície equipotencial $V = 120$.
39. De acordo com a *lei de gravitação universal* de Newton, se uma partícula de massa m_0 está na origem $(0, 0, 0)$ de um sistema de coordenadas xyz , então o módulo F da força exercida sobre uma partícula de massa m situada no ponto (x, y, z) é dada por

$$F = G \cdot \frac{m_0 \cdot m}{x^2 + y^2 + z^2},$$

onde G é a constante de gravitação universal. F depende de quantas variáveis? Se $m_0 = 1.99 \cdot 10^{30}$ kg e $m = 5.98 \cdot 10^{24}$ kg, descreva as superfícies de nível da função resultante. Qual é o significado físico dessas superfícies de nível?

40. De acordo com a *lei dos gases ideais*, a pressão P , o volume V e a temperatura T de um gás confinado estão relacionados pela equação

$$P \cdot V = k \cdot T,$$

para uma constante k . Expresse P como função de V e T e descreva as curvas de nível associadas a esta função. Qual é o significado físico dessas curvas de nível?

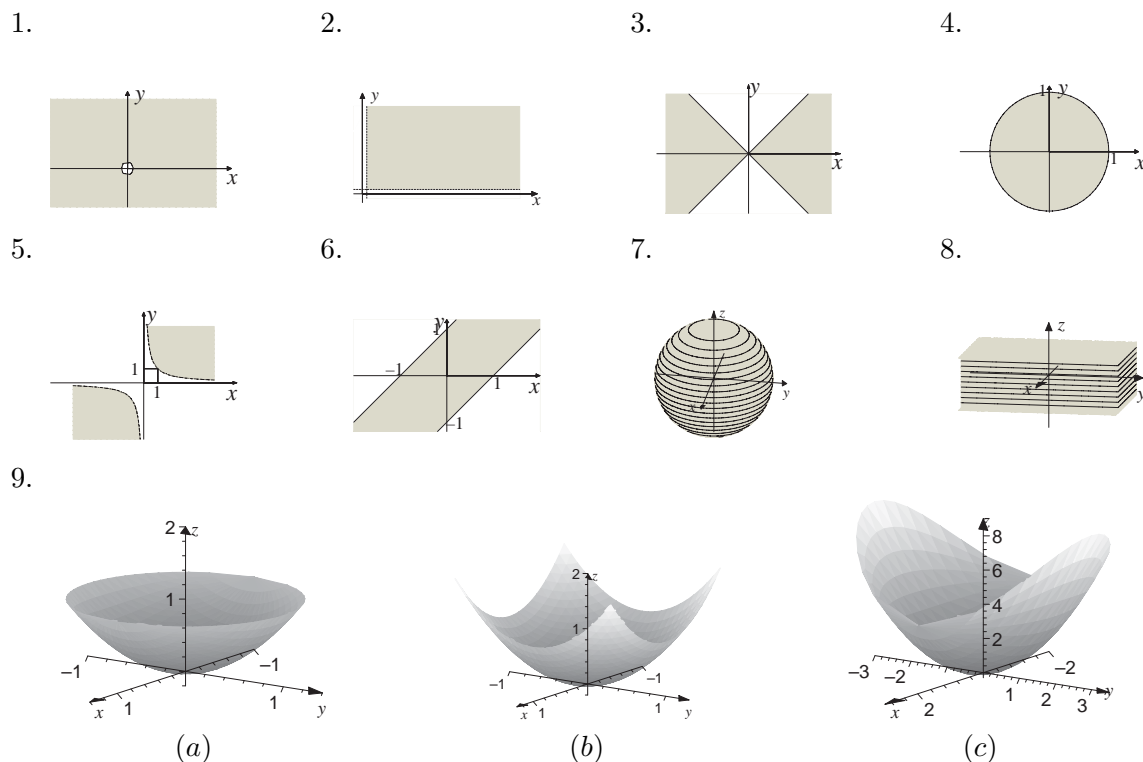
41. A pressão atmosférica nas proximidades do solo em uma certa região é dada por

$$p(x, y) = a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c,$$

com a, b e c constantes positivas. Descreva as isobáricas (curvas de nível de p) para pressões superiores a c .

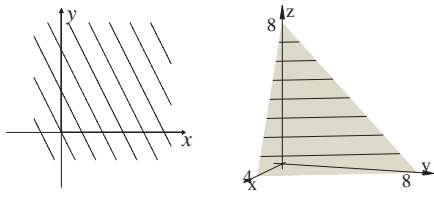
RESPOSTAS DA LISTA 6

- | | |
|--|--|
| 1. $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ | 5. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy > 1\}$ |
| 2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ e } y > 0\}$ | 6. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - 1 \leq y \leq x + 1\}$ |
| 3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; - x \leq y \leq x \}$ | 7. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 25\}$ |
| 4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ | 8. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \leq 2, y \leq 3, z < 1\}$ |

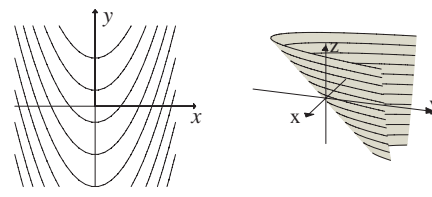


10. (a) pelo ponto $(8, 2)$, reta $x + y = 10$, pelo ponto $(-2, 3)$, reta $x + y = 1$
 (b) $x + y = a + b$
 (c) $y = 2 - x \Rightarrow f(x, y) = f(x, 2 - x) = \ln(e^{x+2-x} - 1) = \ln(e^2 - 1) = \text{constante}$
 (d) $y = 3 - x \Rightarrow f(x, y) = f(x, 2 - x) = \ln(e^{x+3-x} - 1) = \ln(e^3 - 1) = \text{constante}$
 (e) $y = -x + 3$. Podemos afirmar que $\ln(e^3 - 1) > \ln(e^2 - 1)$ pois as funções $F(t) = e^t$ e $G(t) = \ln t$ são estritamente crescentes.

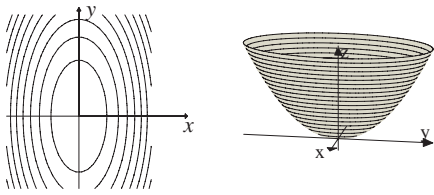
11.



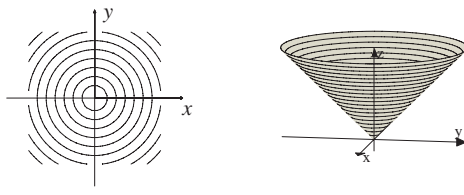
12.



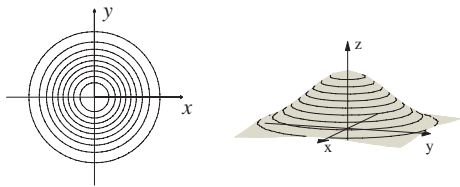
13.



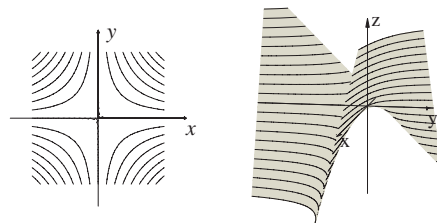
14.



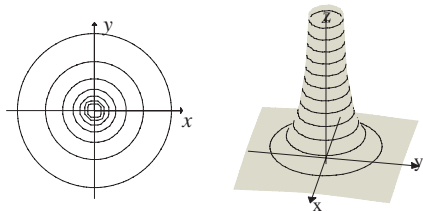
15.



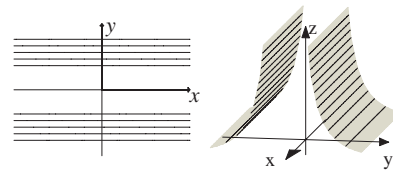
16.



17.



18.



19. (1)–(e)

(2)–(a)

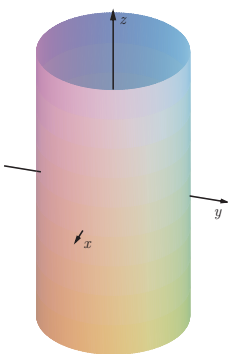
(3)–(f)

(4)–(c)

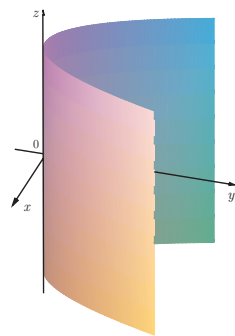
(5)–(b)

(6)–(d)

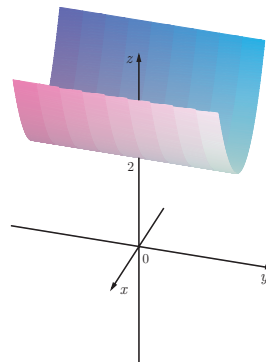
20.



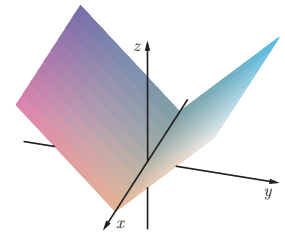
21.



22.

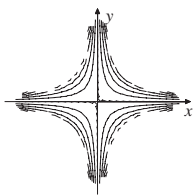


23.

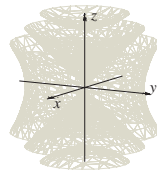


24. $C_n(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq xy \leq 1 \text{ e } xy = \text{sen } n\}$, $-\frac{\pi}{2} \leq n \leq \frac{\pi}{2}$, $n = 0$: retas $x = 0$ e $y = 0$; $n > 0$: hipérbolas com vértices na reta $y = x$; $n < 0$: hipérbolas com vértices na reta $y = -x$.
25. $C_n(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = z^2 + n\}$, $\forall n \in \mathbb{R}$, $n = 0$: cone de duas folhas, $n > 0$: hipérbolóide de uma folha, $n < 0$: hipérbolóide de duas folhas.
26. $C_n(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = n\}$, $\forall n \in \mathbb{R}$, planos paralelos.
27. $C_n(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 + y^2 + n\}$, $\forall n \in \mathbb{R}$, parabolóides com vértices no eixo z .
28. $C_n(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \neq 1 \text{ e } x = n(y - 1)\}$, $\forall n \in \mathbb{R}$, retas furadas e concorrentes em $(0, 1)$.
29. $C_n(f) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; x \geq y, z \neq w \text{ e } x - y = n^2(z - w)^2\}$ $\forall n \in \mathbb{R}$, não existe representação geométrica.
30. $C_n(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \text{sen } x = n\}$, $n \in \mathbb{R}$, $n = 0$: retas $y = 0$, $y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$; $n \neq 0$: gráfico de $y = n \text{csc } x$.
31. $C_n(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = \tan n\}$, $0 \leq n < \pi/2$, $n = 0$: $(0, 0)$, $n > 0$: circunferências de centro $(0, 0)$.

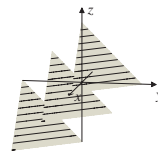
24.



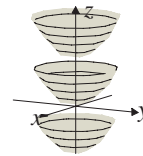
25.



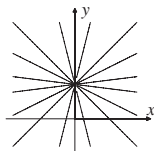
26.



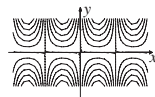
27.



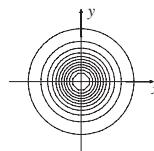
28.



30.



31.



36. (a) Circunferências de centro na origem
 (b) Circunferência de raio 10 com centro na origem

37. (a) As superfícies equipotenciais, de potências $k > 0$, são elipsóides de semi-eixos $a = \frac{6}{k}$, $b = \frac{3}{k}$ e $c = \frac{4}{k}$, nos eixos x , y e z , respectivamente.
 (b) $400x^2 + 1600y^2 + 3600z^2 = 1$

38. Depende de 4 variáveis, a saber, as coordenadas x , y e z do ponto onde está localizada a partícula e a sua massa m . As equações das superfícies de nível com força escalar constante e igual a k são esferas de centro na origem e raios $\frac{1}{k}(1.99)(5.98)10^{54}$.
39. As curvas de nível são semi-retas no sistema VOT , concorrentes na origem O , mas sem conter a origem ($V > 0$). As curvas de nível representam gases com mesma pressão e diz que quando os gases estão confinados sob pressão constante, o volume varia linearmente com a temperatura.
40. As isobáricas de pressão $k > c$ são elipses com centro na origem do sistema de eixos no plano e cujos semi-eixos são $a = \sqrt{\frac{k-c}{a}}$ e $b = \sqrt{\frac{k-c}{b}}$, sobre os eixos x e y , respectivamente.