## LISTA 8

Nos exercícios 1. a 8. determine as derivadas parciais da função dada.

1. $f(x,y) = \left(x^3 + y^3\right)(x - y)$
2. $f(x,y) = \text{sen}\,(x+y) + \cos(x-y)$
3. $f(x,y) = \text{arcsen}\left(\dfrac{x^2}{y^2}\right)$
4. $f(x,y) = \displaystyle\int_x^y \cos t\; dt$
5. $f(x,y) = \displaystyle\int_x^y e^{-t^2}\; dt$
6. $f(x,y,z) = \dfrac{e^x}{e^y - e^z}$
7. $w = f(x,y,z) = (y^2 + z^2)^x$.
8. $w = f(r,s,v) = (2\,r + 3\,s)^{\cos(v)}$.
9. Mostre que se $w = x^2y + y^2z + z^2x$ então $\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = (x+y+z)^2$.
10. Calcule as derivadas parciais de $f$ no ponto $(3, \pi/4)$, onde $f(x,y) = \ln(x \tan y)$.
11. Seja $f(x,y) = \sqrt{14 - x^2 - y^2}$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,3)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,3)$ e interprete geometricamente.
12. Dada a função $z = \displaystyle\int_x^{x^2+y^2} e^t\; dt$, calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,2)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,2)$.
13. Na figura (**??**) encontram-se os gráficos de três funções de duas variáveis:

$$f, \quad \partial f/\partial x \quad \text{e} \quad \partial f/\partial y.$$

Em (c) está o gráfico de $f$. Identifique os outros dois gráficos.

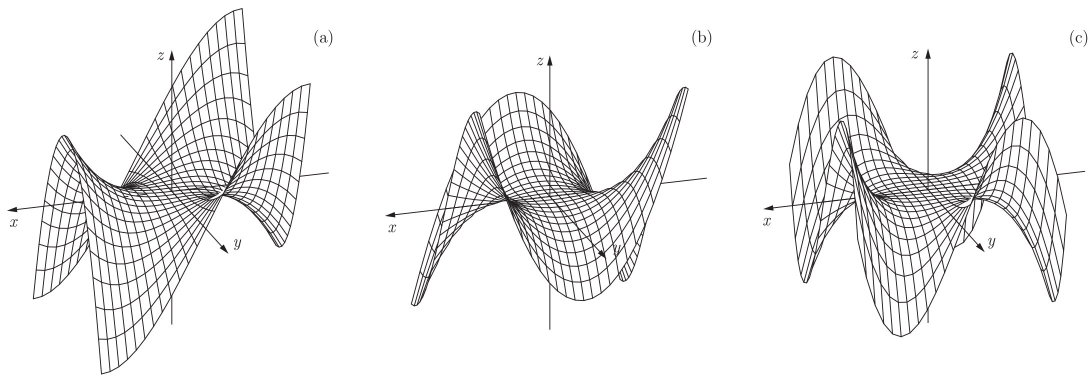



Figura 1: Os gráficos de $f$, $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$.

14. A função $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é de classe $C^1$? Justifique.
15. A função $f(x,y,z) = \ln(1 - x - y - z)$ é de classe $C^1$? Justifique.
16. Se $f(x,y) = \arctan(x - 2y)$, determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de $f$ no ponto $(2, 1, f(2,1))$.
17. Seja $f(x,y) = x \cos \dfrac{x}{y}$. Mostre que os planos tangentes ao gráfico de $f$ contém a origem.
18. Determine a equação de um plano que seja paralelo ao plano $z = 2x + 3y$ e tangente ao gráfico da função $f(x,y) = x^2 + xy$.

19. Seja $z = xe^{x^2-y^2}$.
(a) Calcule um valor aproximado para a variação $\Delta z$ em $z$, quando se passa de $x = 1$ e $y = 1$ para $x = 1,01$ e $y = 1,002$.
(b) Calcule um valor aproximado para $z$ correspondente a $x = 1,01$ e $y = 1,002$.

20. Use uma função apropriada e calcule um valor aproximado para $\sqrt{(0,01)^2 + (3,98)^2 + (2,99)^2}$.

21. A energia consumida em um resistor elétrico é dada por $P = \dfrac{V^2}{R}$. Se $V = 100$ volts e $R = 10$ ohms, calcule o valor aproximado para a variação $\Delta P$, quando $V$ decresce de $0,2$ volts e $R$ aumenta de $0,01$ ohms.

22. Em um setor circular, o ângulo central é $80°$ e o raio é 20 cm. Reduzindo-se o ângulo de $1°$, qual deve ser o acréscimo no raio para que a área fique aproximadamente inalterada?
Lembrete: área do setor circular $= \dfrac{\theta r^2}{2}$, $\theta$ em radianos.

23. Determine o erro relativo máximo (aproximado) no cálculo do período $T$ de um pêndulo simples, através da fórmula $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, sendo o erro relativo en $l$ igual a $1\,\%$ e em $g$ igual a $3\,\%$.

## EXERCÍCIOS OPCIONAIS

24. A análise de certos circuitos eletrônicos envolve a fórmula

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + L^2 \cdot \omega}},$$

em que $I$ é a corrente, $V$ a voltagem, $R$ a resistência, $L$ a indutância e $\omega$ uma constante positiva. Calcule e interprete $\partial I/\partial R$ e $\partial I/\partial L$.

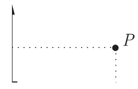
25. Em um dia claro, a intensidade da luz solar às $t$ horas após o nascente e à profundidade oceânica de $x$ metros, pode ser aproximada por

$$I(x,t) = I_0\, e^{-k\,x}\ \mathrm{sen}^3(\pi\, t/D),$$

com $I_0$ a intensidade da luz solar ao meio-dia, $D$ a quantidade horas do dia com luz solar e $k$ uma constante positiva. Se $I_0 = 1000$, $D = 12$ e $k = 0.10$, calcule e interprete as derivadas parciais $\partial I/\partial t$ e $\partial I/\partial x$ quando $t = 6$ horas e $x = 5$ metros.

26. Quando um poluente tal como óxido nítrico é emitido por uma chaminé de $h$ metros de altura, a concentração $C(x,y)$ (em $\mu/\mathrm{m}^3$) do poluente em um ponto $P$ situado a $y$ metros acima do chão e cuja projeção ortogonal sobre o chão está a $x$ quilômetros da base da chaminé pode ser representada por $C(x,y) = \dfrac{a}{x^2}\left(e^{-b\,(y-h)^2/x^2} + e^{-b\,(y+h)^2/x^2}\right)$

em que $a$ e $b$ são constantes positivas que dependem das condições atmosféricas e da taxa de emissão do poluente (veja a figura).




Suponha que $C(x,y) = \frac{200}{x^2}\left(e^{-0.02\,(y-10)^2/x^2} + e^{-0.02\,(y+10)^2/x^2}\right)$.

Calcule e interprete $\partial C/\partial x$ e $\partial C/\partial y$ no ponto $P = (2,5)$.

RESPOSTAS DA LISTA 8 (Com indicação ou resumo de algumas resoluções)

1. $\begin{cases} f_x = 4x^3 + y^3 - 3x^2y \\ f_y = -x^3 + 3y^2x - 4y^3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} f_x = \cos(x+y) - \operatorname{sen}(x-y) \\ f_y = \cos(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) \end{cases}$
3. $f_x = \dfrac{2x}{\sqrt{y^4 - x^4}}, \quad f_y = \dfrac{-2x^2}{y\sqrt{y^4 - x^4}}$
4. $f_x = -\cos x, \quad f_y = \cos y$
5. $f_x = -e^{-x^2}, \quad f_y = e^{-y^2}$
6. $f_x = \dfrac{e^x}{e^y - e^z}, \quad f_y = \dfrac{-e^{x+y}}{(e^y - e^z)^2}, \quad f_z = \dfrac{e^{x+z}}{(e^y - e^z)^2}$
7. $w_x = \left(y^2 + z^2\right)^x \ln\left(y^2 + z^2\right)$
   $w_y = 2xy\left(y^2 + z^2\right)^{x-1}, \quad w_z = 2xz\left(y^2 + z^2\right)^{x-1}$
8. $w_r = 2\cos(v)(2r + 3s)^{\cos(v)-1}$
   $w_s = 3\cos(v)(2r + 3s)^{\cos(v)-1}$
   $w_v = -\operatorname{sen}(v)\ln(2r + 3s)(2r + 3s)^{\cos(v)}$
9. Calculando as derivadas parciais, somando e simplificando, chega-se ao termo do lado direito da equação.
10. $f_x(x,y) = \dfrac{1}{x}$; $f_x(3, \pi/4) = 1/3$; $f_y(x,y) = \dfrac{\tan y}{x \sec^2 y}$; $f_y(3, \pi/4) = 2$
11. $f_x(x,y) = \dfrac{-x}{\sqrt{14 - x^2 - y^2}}$; $f_x(1,3) = -\dfrac{1}{2}$; $f_y(x,y) = \dfrac{-y}{\sqrt{14 - x^2 - y^2}}$; $f_y(1,3) = -\dfrac{3}{2}$
    Seja $r$ a reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(1,3)$, $r$ no plano $y = 3$. Como $f_x(1,3) < 0$, o ângulo entre $r$ e o semi-eixo positivo $Ox$ é maior que $90°$.
    Seja $s$ a reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(1,3)$, $s$ no plano $x = 1$. Como $f_y(1,3) < 0$, o ângulo entre $r$ e o semi-eixo positivo $Oy$ é maior que $90°$.
12. $z_x(x,y) = 2xe^{x^2+y^2} - e^x$; $z_x(1,2) = -e + 2e^5$; $z_y(x,y) = 2ye^{x^2+y^2}$; $z_y(1,2) = 4e^5$.
13. (a) $\partial f/\partial y$ (b) $\partial f/\partial x$
14. Não, pois $\nexists f_x(0,0,0)$ (ou $\nexists f_y(0,0,0)$ ou $\nexists f_z(0,0,0)$) $\overset{\text{teorema}}{\Rightarrow}$ $f$ não é de classe $C^1$ em $(0,0,0)$.
15. Sim, pois $f$ é composta de funções de classe $C^1$.
16. Plano tangente: $z = (x-2) - 2(y-1)$. Reta normal: $(x,y,z) = (2,1,0) + \lambda(1,-2,-1), \lambda \in \mathbb{R}$.
17. A equação do plano tangente em $\forall\,(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, $y_0 \neq 0$ é
    $z = \left(-\dfrac{x_0}{y_0} \operatorname{sen} \dfrac{x_0}{y_0} + \cos \dfrac{x_0}{y_0}\right) x + \left(\dfrac{x_0^2}{y_0^2} \operatorname{sen} \dfrac{x_0}{y_0}\right) y$, que é satisfeita por $(x,y,z) = (0,0,0)$.
18. $z = -3 + 2(x-3) + 3(y+4)$.
19. (a) 0,026 (b) 1,026
20. Sendo $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, então
    $\sqrt{(0.01)^2 + (3.98)^2 + (2.99)^2} = f(0 + 0.01,\ 4 - 0.02,\ 3 - 0.01) \simeq 4,978.$
21. -5
22. $0,125$ cm
23. 2 %
24. $\dfrac{\partial I}{\partial R} = \dfrac{-RV}{\sqrt{\left(R^2 + L^2 w\right)^3}}$, representa a taxa da variação da corrente $I$ em relação a variação da resistência $R$.
    $\dfrac{\partial I}{\partial L} = \dfrac{-2wLV}{\sqrt{\left(R^2 + L^2 w\right)^3}}$, representa a taxa da variação da corrente $I$ em relação a variação da indutância $L$.
25. $\dfrac{\partial I}{\partial x}(5,6) = -100e^{-0.5}$ e representa a taxa de variação da intensidade de luz solar em relação à variação da profundidade no nível de profundidade 5 metros, após 6 horas do amanhecer.
    $\dfrac{\partial I}{\partial t}(5,6) = 0$ e representa a taxa de variação da intensidade de luz solar em relação à variação do tempo após 6 horas do amanhecer, no nível de profundidade 5 metros.

26. $\dfrac{\partial C}{\partial x}(2,5) = -12.5\left(3.5\,e^{-0.125} - 0.5\,e^{-1.125}\right) \simeq -36.5801$ e representa a taxa de variação da concentração do poluente em relação à variação da distância $x$, quando $x = 2$ quilômetros e a altura é 5 metros.
    $\dfrac{\partial C}{\partial y}(2,5) = -2.5\left(e^{-0.125} - 3\,e^{-1.125}\right) \simeq -0.2287$ e representa a taxa de variação da concentração do poluente em relação à variação da altura $y$, quando $x = 2$ quilômetros e a altura é 5 metros.