Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 8 - 2008-1

Aproximação linear
Diferencial
Derivada de ordem superior

1. Encontre a equação da reta que melhor aproxima o gráfico de $y = f(x) = x^{19/3}$ para valores de x próximos de -1. Usando a equação desta reta, encontre um valor aproximado para $(-1,06)^{19/3}$.

2. Calcule, por diferencial, o valor aproximado de: (a) $\sqrt{35,99}$ (b) $\dfrac{1}{3,09}$ (c) $\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right]^{1/3}$

3. A altura e o raio de um cilindro reto são iguais, de modo que o volume desse cilindro é dado por $V = \pi h^3$. O volume deve ser calculado com erro não maior que 1% em relação ao valor real. Determine, aproximadamente, o maior erro que pode ser tolerado na medida de h, expressando-o como porcentagem de h.

4. Calcule f'' para a função do ex. 8. da Lista 7.

5. Calcule f'' para a função do ex. 10. da Lista 7.

6. Calcule f'', f''' e seus respectivos domínios para $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

7. Seja $h(x) = \left|x^2 - 4\right|, \quad x \in \mathbb{R}$.
   (a) Dê os pontos onde h é duas vezes diferenciável e determine $h'(x)$ e $h''(x)$;
   (b) Esboce o gráfico de h.

8. Seja $y = u\cos^2 u^3$. (a) Calcule $\dfrac{dy}{du}$; (b) Se $u = u(x)$, calcule $\dfrac{dy}{dx}$ e $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

9. Prove: se $y = \cos\sqrt{x} - \operatorname{sen}\sqrt{x}$ então $4xy'' + 2y' + y = 0$.

10. Considere $g(x) = \cos x \times f^2(x)$, onde $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável, $f(0) = -1$ e $f'(0) = f''(0) = 2$. Calcule $g''(0)$.

RESPOSTAS

1. $y = \dfrac{19}{3}x + \dfrac{16}{3}$; valor aproximado $= -1,38$ 2. (a) $\cong 5,9992$ (b) $\cong 0,3233$

2. (c) como $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1/3} \cong 0,8333$, é uma aproximação grosseira, foi usado que $\dfrac{1}{2}$ está perto de 1;
$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1/3} \cong 0,79375$, é uma aproximação melhor, foi usado que $\dfrac{1}{2}$ está perto de $0,512 = (0,8)^3$

3. $\dfrac{1}{3}\%$ 4. $G''(r) = -\dfrac{16}{25}(2r+2)^{-9/5}$

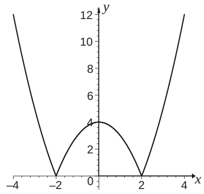
5. Para $x \neq 0$, $f''(x) = \left(6x - \dfrac{16}{x^7}\right)\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^4} - \dfrac{4}{x^3}\cos\dfrac{1}{x^4}$; $\nexists f''(0)$ pois f' não é contínua em $x = 0$.

6. dom f'' = dom $f''' = \mathbb{R} - \{0\}$; $\nexists f''(0)$ pois f' não é contínua em $x = 0$ e $\nexists f'''(0)$ pois $\nexists f''(0)$;
$f''(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)\cos\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$; $f'''(x) = -\dfrac{1}{x^4}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$.

7. (a) h é duas vezes diferenciável para $\forall x \in \mathbb{R}$; $x \neq -2$ e $x \neq 2$;

$$h'(x) = (2x)\frac{x^2-4}{|x^2-4|} = \begin{cases} -2x & \text{se } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{se } x < -2 \text{ ou } x > 2 \end{cases}$$

$$h''(x) = (2)\frac{x^2-4}{|x^2-4|} = \begin{cases} -2 & \text{se } -2 < x < 2 \\ 2 & \text{se } x < -2 \text{ ou } x > 2 \end{cases}$$

(b) 

8. (a) $\dfrac{dy}{du} = \cos^2 u^3 - 6u^3 \operatorname{sen} u^3 \cos u^3$ (b) $\dfrac{dy}{dx} = \left(\cos^2 u^3 - 6u^3 \operatorname{sen} u^3 \cos u^3\right)\dfrac{du}{dx}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\cos^2 u^3 - 6u^3 \operatorname{sen} u^3 \cos u^3\right)\frac{d^2u}{dx^2} + 6u^2\left(3u^3 \operatorname{sen}^2 u^3 - 4\operatorname{sen} u^3 \cos u^3 - 3u^3\cos^2 u^3\right)\left(\frac{du}{dx}\right)^2$$

9. Basta calcular y' e y'', substituir na expressão do lado esquerdo da equação e verificar que se anula.

10. 3