

LISTA 11

1. Se $f(x, y) = e^{xy}$, $g(t) = \cos t$, $h(t) = \sin t$ e $F(t) = f(g(t), h(t))$, calcule $F'(0)$.
2. Calcule $\frac{\partial w}{\partial r}$ e $\frac{\partial w}{\partial t}$ para $w = xy + yz + xz$, $x = r$, $y = r \cos t$, e $z = r \sin t$.
3. Seja $z = xf\left(\frac{y}{x}\right) - g\left(\frac{y}{x}\right)$, onde f e g são de classe C^1 . Mostre que $z_x + \frac{y}{x} z_y = f\left(\frac{y}{x}\right)$.
4. Um ponto se desloca sobre a curva $x = 2 \sin t$, $y = 7 \cos t - 3$, $z = f(2 \sin t, 7 \cos t - 3)$, onde $f(x, y) = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$. Qual a componente vertical (em z) da velocidade no instante que suas coordenadas são $(2, -3, 6)$?

5. O que está errado com o seguinte argumento?

Suponha que $w = f(x, y)$ com $y = x^2$. Pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \implies \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + 2 \cdot x \cdot \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Assim, $0 = 2 \cdot x \cdot (\partial w / \partial y)$, de modo que $\partial w / \partial y = 0$.

6. Seja $w = x^2 + y^2 - z^2$, $x = \rho \sin \varphi \cos \theta$, $y = \rho \sin \varphi \sin \theta$ e $z = \rho \cos \varphi$. Calcule w_ρ , w_φ e w_θ .
7. Se $w = f(x, y)$, f derivável, $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, mostre que $w_x^2 + w_y^2 = w_r^2 + \frac{w_\theta^2}{r^2}$.
8. Se $u = x^m f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{z}, \frac{z}{x}\right)$, mostre que $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = mu$.
9. Sejam g e h funções de classe C^1 e $f(x, y) = (g(x, y))^{h(x, y)}$. Assuma que $g(1, 2) = 2$, $h(1, 2) = -2$, $g_x(1, 2) = -1$, $g_y(1, 2) = 3$, $h_x(1, 2) = 5$ e $h_y(1, 2) = 0$. Encontre $f_x(1, 2)$ e $f_y(1, 2)$.
10. Seja $w = \int_x^y e^{t^2} dt$, $x = rs^4$ e $y = r^4s$. Calcule $\frac{\partial w}{\partial r}$ e $\frac{\partial w}{\partial s}$.
11. Considere as funções f, g e h tais que $f(x, y) = (xy, x^2 + y, x - y)$, $g(u, v, w) = 2w \ln(uv)$ e $h(s) \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$. Seja $H(x, y) = (h \circ g \circ f)(x, y)$.
 - (a) Para ser possível calcular $\frac{\partial H}{\partial x}(1, 3)$, para que valor de s é preciso conhecer $h'(s)$?
 - (b) Supondo que para o valor de s do item anterior, $h'(s) = 5$, calcule $\frac{\partial H}{\partial x}(1, 3)$.
12. Mostre que a função $u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct)$, onde c é constante e F, G são de classe C^2 , é solução da equação da onda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.
13. A distribuição da temperatura de um disco com centro na origem é dada por $T(x, y)$. Sabe-se que $\frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x}(x, y) = 0$ e $\frac{\partial T}{\partial y}(x, y) = 2$. Calcule $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\rho, \theta)$, sendo $U(\rho, \theta) = T(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$.
14. Seja $g(u, v) = f(u + v, uv)$, f de classe C^1 , $x = u + v$, $y = uv$. Calcule $\frac{\partial g}{\partial u}(1, 1)$ e $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(1, 1)$, sabendo que $f_x(2, 1) = 3$, $f_y(2, 1) = -3$, $f_{xx}(2, 1) = 0$, $f_{xy}(2, 1) = f_{yx}(2, 1) = 1$, $f_{yy}(2, 1) = 2$.
15. Se a, b, c e k são constantes, mostre que $w = (a \cos cx + b \sin cx)e^{-kc^2t}$ satisfaz a equação do calor $\frac{\partial w}{\partial t} = k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.
16. Sejam $z = z(x, y)$, $x = e^u \cos v$ e $y = e^u \sin v$. Suponha que $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. Calcule $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.

17. Suponha que $f \in \mathcal{C}^2$, $c \neq 0$, c constante e $f(x, t)$ satisfaz a equação $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.
 Determine constantes m , n , p e q para que $g(u, v) = f(x, t)$, onde $x = mu + nv$, $mn \neq 0$ e $t = pu + qv$, $pq \neq 0$, satisfaça a equação $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$.

RESPOSTAS DA LISTA 11 (com indicação ou resumo de algumas resoluções)

- $F'(0) = 1$
- $w_r = r(2 \operatorname{sen} t + 2 \cos t + \operatorname{sen}(2t))$, $w_t = r^2(\cos t - \operatorname{sen} t + \cos 2t)$
- Aplicando a regra da cadeia e simplificando, $z_x = f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} \cdot f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} \cdot g'\left(\frac{y}{x}\right)$ e $z_y = f'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x} \cdot g'\left(\frac{y}{x}\right)$. Substituindo z_x e z_y na expressão do lado esquerdo da equação e simplificando, verifica-se que é igual à expressão do lado direito da equação.
- $\frac{dz}{dt}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{7}{2}$
- Não é possível “cortar” os termos $\frac{\partial w}{\partial x}$ que aparecem dos dois lados da equação pois, apesar de aparentemente serem iguais, têm significados diferentes. O termo do lado esquerdo é a derivada parcial da função composta e o do lado direito é a derivada parcial da função externa na composta.
- $w_\rho = -2\rho \cos(2\varphi)$; $w_\varphi = 2\rho^2 \operatorname{sen}(2\varphi)$; $w_\theta = 0$.
- Aplicando a regra da cadeia, $w_r = w_x \cdot \cos \theta + w_y \cdot \operatorname{sen} \theta$ e $w_\theta = w_x \cdot (-r \operatorname{sen} \theta) + w_y \cdot (r \cos \theta)$. Substituindo w_r e w_θ na expressão do lado direito da equação e usando simplificação trigonométrica, verifica-se que é igual à expressão do lado esquerdo da equação.
- Seja $r = \frac{y}{x}$; $s = \frac{x}{z}$; $t = \frac{z}{x}$ e $v = f(r, s, t)$. Aplicando a regra da cadeia para calcular as derivadas parciais, multiplicando-as pelos termos indicados na expressão do lado esquerdo da equação e simplificando, obtém-se $x \frac{\partial u}{\partial x} = m x^m v + x^m \left(-\frac{y}{x} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{x}{z} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{z}{x} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}\right)$; $y \frac{\partial u}{\partial y} = x^m \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{\partial v}{\partial r}$; $z \frac{\partial u}{\partial z} = x^m \left(-\frac{x}{z} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{z}{x} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}\right)$. Somando e simplificando, verifica-se que é igual à expressão do lado direito da equação.
- $f_x(1, 2) = \frac{1 + 5 \ln 2}{4}$; $f_y(1, 2) = -\frac{3}{4}$.
- $w_r = -s^4 e^{r^2 s^8} + 4r^3 s e^{r^8 s^2}$; $w_s = -4r s^3 e^{r^2 s^8} + r^4 e^{r^8 s^2}$.
- (a) $s = -4 \ln 12$ (b) $\frac{\partial H}{\partial x}(1, 3) = -30 + 10 \ln 12$.
- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F''(x + ct)(c^2) + G''(x - ct)(c^2)$; $c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2(F''(x + ct) + G''(x - ct))$. São iguais.
- $-2\rho \operatorname{sen} \theta - (\rho \cos \theta) \cdot \frac{\partial T}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta) + (\rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta) \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta)$
- $\frac{\partial g}{\partial u}(1, 1) = 0$; $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(1, 1) = 1$
- $\frac{\partial w}{\partial t} = (a \cos cx + b \operatorname{sen} cx)(-kc^2)e^{-kc^2 t}$; $k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = k(-ac^2 \cos cx - bc^2 \operatorname{sen} cx)e^{-kc^2 t}$, comparando, são iguais.

16. $= 0$

17. Existem várias respostas, pois $mn + c^2pq = 0$ e $np + mq = 0$ são condições suficientes. Por exemplo, $m = n = 1$, $q = \frac{1}{c^2}$, $p = -\frac{1}{c^2}$.