Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 11 - 2012-1

Função vetorial de várias variáveis.
Função inversa e Teorema da Função Inversa.

1. Considere as funções $\begin{array}{rccl} f: & U\subset\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & f(U)\subset\mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longrightarrow & \left(\sqrt{\dfrac{u-v}{2}},\dfrac{u+v}{2}\right)\end{array}$ e $\begin{array}{rccl} g: & V\subset\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & g(V)\subset\mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longrightarrow & \left(y+x^2,y-x^2\right)\end{array}$

   onde $U=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2; u>v\right\}$ e $V=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x>0\right\}$.

   (a) Verifique que $(g\circ f)(u,v)=(u,v), \forall(u,v)\in U\subset\mathbb{R}^2$ e $(f\circ g)(x,y)=(x,y);\ \forall(x,y)\in V\subset\mathbb{R}^2$.
   O que se pode concluir sobre f e g ?

   (b) Determine $\mathbf{D}f(u,v)$ e $\mathbf{D}g(x,y)$.

   (c) Se $(x,y)=f(u,v)$ e $(u,v)=g(x,y)$ e I é a matriz identidade 2×2, faça os produtos nos lados esquerdos das igualdades a seguir e verifique que:
   $\mathbf{D}g(f(u,v))\times\mathbf{D}f(u,v)=I,\ \ \forall(u,v)\in U\subset\mathbb{R}^2$ e
   $\mathbf{D}f(g(x,y))\times\mathbf{D}g(x,y)=I,\ \ \forall(x,y)\in V\subset\mathbb{R}^2$.
   Sem calcular esses produtos, já era esperado que essas igualdades se verificassem. Por que?

2. Seja $(u,v,w)=f(x,y,z)$, $(x,y,z)\in U$, onde U é um conjunto aberto e f é de classe $\mathcal{C}^1$.

   Sabe-se que $(1,0,-1)\in U$, $f(1,0,-1)=(1,2,-3)$ e $Df(1,0,-1)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-2&0\\0&2&1\end{pmatrix}$.

   (a) Existe uma função f^{-1} inversa da função f definida em $f(V)$, onde V é uma vizinhança de $(1,0,-1)$, $f(V)$ é um conjunto aberto , $(1,2,-3)\in f(V)$ e f^{-1} é de classe $\mathcal{C}^1$.
   Porque é possível garantir que essa afirmação é verdadeira?

   (b) Encontre $\mathbf{D}f^{-1}(1,2,-3)$

   (c) Encontre $\mathbf{D}f^{-1}(1,2,-3)[(u,v,w)-(1,2,-3)]$, para $(u,v,w)\in f(V)$;

   (d) Encontre uma aproximação afim de $f^{-1}(u,v,w)$, para $(u,v,w)\in f(V)$.

3. Seja $\begin{array}{rccl} f: & U=\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & f(U)=\mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longrightarrow & (u,v,w)=\left(x,y^3,z^5\right)\end{array}$

   (a) Encontre explicitamente a inversa de f, que é uma função $\begin{array}{rccl} f^{-1}: & f(U)=\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & U=\mathbb{R}^3 \\ & (u,v,w) & \longrightarrow & (x,y,z)\end{array}$

   (b) Encontre o jacobiano $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ em qualquer (x,y,z)

   (c) Verifique que $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=0$ em qualquer $(x,0,z)$ e em qualquer $(x,y,0)$

   (d) Os itens (a) e (c) contradizem o Teorema da Função Inversa? Explique.

4. Seja $F(x,y)=(e^{x+y},e^{x-y})$ com domínio $U=\mathbb{R}^2$.

   (a) Mostre que F admite inversa numa vizinhança de qualquer $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

   (b) Determine $DF^{-1}\left(F(-1,-1)\right)$.

5. Seja $F(x,y,z) = \left(x - y^2, y - z^2, z - x^2\right)$

   (a) Mostre que F admite inversa numa vizinhança de qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $8xyz \neq 1$.

   (b) Verifique que $F(1,0,1) = (-1,-1,0)$, calcule $\left(F^{-1}\right)'(-1,-1,0)$ e obtenha a função afim que melhor aproxima f^{-1} na vizinhança de $(-1,-1,0)$.

6. A função $f(\rho,\theta,\phi) = (\rho\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \rho\cos\phi)$ está definida em $\forall(\rho,\theta,\phi) \in \mathbb{R}^3$. Em que pontos $(\rho_0,\theta_0,\phi_0) \in \mathbb{R}^3$ é possível garantir que esta função admite inversa numa vizinhança de (ρ_0,θ_0,ϕ_0)?

RESPOSTAS DA LISTA 11 (com indicação ou resumo de algumas resoluções)

2. **(a)** Essa é a tese do Teorema da Função Inversa e as hipóteses do teorema estão satisfeitas, pois as hipóteses do enunciado, a saber f de classe $\mathcal{C}_1$ e U é aberto, são justamente as hipóteses gerais do teorema. A hipótese específica do teorema, a saber $\det(Df(1,0,-1)) \neq 0$, também está satisfeita, pois $\det(Df(1,0,-1)) = -2$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} u-v-w-2 \\ 1-v/2 \\ 1+v+w \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} u-v-w-1 \\ 1-v/2 \\ v+w \end{pmatrix}$

3. **(a)** $f^{-1}: \quad f(U) = \mathbb{R}^3 \longrightarrow U = \mathbb{R}^3$
   $\qquad (u,v,w) \longrightarrow (x,y,z) = (u, \sqrt[3]{v}, \sqrt[5]{w})$

   (c) $15y^2z^4$

   (d) Não, pois a hipótese do teorema é $\det(Df(X_0)) \neq 0$, não afirma nada sobre $\det(Df(X_0)) = 0$. Na verdade, este exemplo mostra que pode existir inversa, mesmo quando $\det(Df(X_0)) = 0$, ou seja, o exemplo mostra que a recíproca do teorema não é válida.

4. **(a)** Como $DF(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \end{pmatrix}$ e os elementos dessa matriz, que são as derivadas parciais de F, são contínuas, então F é de classe $\mathcal{C}^1$. Também se verifica que o domínio $U = \mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto. Assim as hipóteses gerais do Teorema da Função Inversa estão satisfeitas. A hipótese $\det(DF(x,y)) \neq 0$ está satisfeita para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, pois $\det(DF(x,y)) = -2e^{2x} < 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   Logo, a tese do teorema é válida, a saber, F admite inversa numa vizinhança de (x,y), para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   (b) $\begin{pmatrix} \dfrac{e^2}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{e^2}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$

5. **(a)** Como $DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & -2y & 0 \\ 0 & 1 & -2z \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$ os elementos dessa matriz, que são as derivadas parciais de F, são contínuas, donde F é de classe $\mathcal{C}^1$. Também se verifica que o domínio $U = \mathbb{R}^3$ é um conjunto aberto. Assim as hipóteses gerais do Teorema da Função Inversa estão satisfeitas.

   Como $\det(DF(x,y,z)) = 1 - 8xyz$, a hipótese $\det(DF(x,y,z)) \neq 0$ está satisfeita para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $8xyz \neq 1$.

   Assim, podemos aplicar o Teorema da Função Inversa em F em todo ponto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $8xyz \neq 1$.

   (b) $\begin{pmatrix} u \\ -4u+v+2w-4 \\ -2u+w-2 \end{pmatrix}$

6. Como $\det(Df(\rho,\theta,\varphi)) = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$, os pontos estão no conjunto $\left\{(\rho,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3; \rho \neq 0 \quad \text{e} \quad \varphi \neq k\pi\right\}$.