LISTA 12

1. A figura 1 mostra uma porção de um mapa da região sul de Minas Gerais onde estão indicadas as curvas de nível da função altura h com relação ao nível do mar. Existe uma linha grossa para cada 100 m de elevação e uma linha fina em cada intervalo de 20 m. Considere os pontos A, B, C, D e E no mapa. As setas indicam o vetor gradiente de h no ponto indicado. Diga se as relações abaixo são verdadeiras ou não, marcando um "V" se a relação for verdadeira e um "F" se ela for falsa.

( ) $h(C) = h(E)$,	( ) $h(A) > h(C)$,
( ) $\dfrac{\partial h}{\partial x}(A) > 0$,	( ) $\dfrac{\partial h}{\partial y}(A) > 0$,
( ) $\dfrac{\partial h}{\partial x}(B) < 0$,	( ) $\dfrac{\partial h}{\partial y}(B) < 0$,
( ) $\dfrac{\partial h}{\partial x}(D) > 0$,	( ) $\dfrac{\partial h}{\partial y}(E) < 0$,
( ) $\dfrac{\partial h}{\partial x}(A) > \dfrac{\partial h}{\partial x}(E)$,	( ) $\dfrac{\partial h}{\partial x}(B) > \dfrac{\partial h}{\partial x}(D)$.

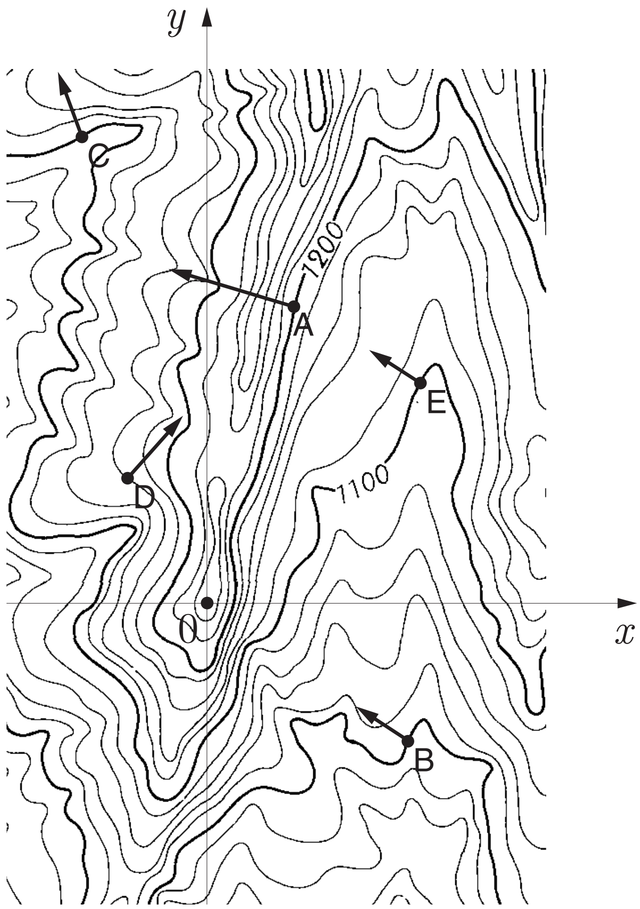

Figura 1: Mapa de contorno de uma região no sul de Minas Gerais.

2. Seja $f(x,y,z) = z - e^x \operatorname{sen} y$ e $P = (\ln 3, 3\pi/2, 2)$. Obtenha:
(a) $\nabla f(P)$ (b) A equação de S, a superfície de nível de f que contém P
(c) A equação da reta normal à S em P. (d) A equação do plano tangente à S em P.

3. Determine a equação do plano tangente e da reta normal à superfície $x^2 + xy^2 + y^3 + z + 1 = 0$, contendo o ponto $P = (2, -3, 4)$.

4. Determine a equação do plano tangente e da reta normal à superfície $\operatorname{sen}(xy) + \operatorname{sen}(yz) + \operatorname{sen}(xz) = 1$, contendo o ponto $P = \left(1, \frac{\pi}{2}, 0\right)$.

5. Descreva parametricamente a reta tangente à curva de interseção das superfícies $x^2+y^2+z^2 = 49$ e $x^2 + y^2 = 13$, no ponto $(3, 2, -6)$ (Sugestão: observe que essa é a reta de interseção dos planos tangentes aos gráficos das superfícies, em P).

6. Seja S_1 o gráfico da função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e S_2 a superfície de nível 0 de $F(x,y,z) = x^2 - y + z^2$. Seja $\mathcal{C} = S_1 \cap S_2$ e $P = (1,2,1) \in \mathcal{C}$. Determine a equação da reta tangente à $\mathcal{C}$ em P, sabendo que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 3$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 5$.

7. As curvas definidas a seguir se interceptam no ponto $(2\pi, \pi)$, formando um ãngulo de $\dfrac{\pi}{2}$ rad.

$$\gamma_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; xy - \cos(x - 2y) = 2\pi^2 - 1\right\} \quad \text{e} \quad \gamma_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = f(x)\right\}$$

(a) Encontre um valor possível para $f'(2\pi)$. Quantas soluções tem esse problema?
(b) Resolva o mesmo problema supondo que o ângulo é $\dfrac{\pi}{6}$ rad.
Sugestão: Nos dois casos encontre um vetor $\vec{u}$ perpendicular a curva γ_1 em $(2\pi, \pi)$, um vetor $\vec{v}$ tangente a curva γ_2 em $(2\pi, \pi)$ e use a fórmula do ângulo θ entre esses vetores, $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$.

RESPOSTAS DA LISTA 12

2. (a) $\nabla f(P) = (3, 0, 1)$ (b) $z - e^x \operatorname{sen} y = 5$ (c) $(x,y,z) = \left(\ln 3 + 3\lambda, \dfrac{3\pi}{2}, 2 + \lambda\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
(d) $3x + z = 2 + 3\ln 3$.

3. Reta normal: $(x,y,z) = (2 + 13\lambda, -3 + 15\lambda, 4 + \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, plano tangente: $13x + 15y + z = -15$.

4. Reta normal: $(x,y,z) = \left(1, \dfrac{\pi}{2}, \left(\dfrac{\pi}{2} + 1\right)\lambda\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, plano tangente: $z = 0$.

5. $(x,y,z) = (3 + 2\lambda, 2 - 3\lambda, -6)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

6. $(x,y,z) = (1 - 9\lambda, 2 + 8\lambda, 1 + 13\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

7. (a) Uma solução: $f'(2\pi) = 2$
(b) Duas soluções: $f'(2\pi) = \dfrac{8 + 5\sqrt{3}}{11}$ e $f'(2\pi) = \dfrac{8 - 5\sqrt{3}}{11}$.