LISTA 14

1. Verifique as hipóteses do Teorema da Função Implícita no ponto $P_0 = (1, 1)$ e calcule $y'(1)$ e $y''(1)$ para $\ln(xy) - 2xy + 2 = 0$.

2. Considere a equação $y(x - 2)^3 + xe^{y-1} = 0$. É possível, pelo Teorema da Função Implícita, garantir que esta equação define implicitamente uma única função $y = f(x)$, com x numa vizinhança de x_0 e y numa vizinhança de y_0, quando (x_0, y_0) é

   (a) $(1, 1)$? (b) $(0, 0)$? (c) $(2, 1)$?

3. Seja $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $z = F(x, y) = (y - x)^4$.

   (a) Faça um esboço das curvas de nível de F associadas aos níveis $z = 0$, $z = 1$ e $z = 16$.

   (b) Faça um esboço do gráfico de F.

   (c) Mostre que $P = (0, 0)$ pertence à curva de nível

   $$\mathcal{F}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; F(x, y) = 0\}$$

   de F associada ao nível $z = 0$.

   (d) Mostre que $F_x(0, 0) = 0$ e $F_y(0, 0) = 0$.

   (e) Mostre que a curva de nível $\mathcal{F}_0$ pode ser representada como o gráfico de uma função $y = f(x)$, com $x \in \mathbb{R}$.

   (f) Este exercício constitui um contra-exemplo para o teorema da função implícita para $\mathbb{R}^2$? Justifique cuidadosamente sua resposta.

4. A equação $y^3 + xy + x^3 = 4$ define implicitamente uma função de classe C^1 $y = f(x)$ cujo gráfico está na vizinhaça do ponto $(0, \sqrt[3]{4})$? Em caso afirmativo, expresse $\dfrac{dy}{dx}$ em termos de x e y.

5. Mostre que a equação $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z$ define implicitamente uma função de classe C^1 $z = f(x, y)$ cujo gráfico está na vizinhança do ponto $(1, 1, 1)$. Expresse $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ em termos de x, y e z.

Nos exercícios 6. e 7. obtenha f_x e f_y para $z = f(x, y)$ definida pela equação dada.

6. $\ln(xyz) + e^z = 1$

7. $xz^2 - 3yz + \cos z = 0$

8. Seja uma função $z = f(x, y)$ de classe C^1, cujo gráfico está contido na superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Sabe-se que $f(0.5, 0.5) > 0$. Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de f no ponto $(0.5,\ 0.5, f(0.5, 0.5)\,)$.

9. Considere a função $\quad w = f(x, y, z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}, \quad$ onde a, b e c são constantes positivas.

   Como vimos, o elipsóide é a superfície de nível de f associada ao nível $w = 1$:

   $$\mathcal{F}_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}.$$

   (a) Mostre que em todos os pontos $P = (x^*, y^*, z^*)$ do elipsóide $\mathcal{F}_1$ tem-se que $\nabla f(P) \neq \vec{0}$.

   (b) Se $a = 2$, $b = 3$ e $c = 4$, encontre a equação do plano tangente ao elipsóide no ponto $P = (2\sqrt{3}/3, 3\sqrt{3}/3, 4\sqrt{3}/3)$ do elipsóide $\mathcal{F}_1$.

   (c) Encontre a equação do plano tangente ao elipsóide em um ponto $P = (x^*, y^*, z^*)$ do elipsóide $\mathcal{F}_1$.

10. Sabendo que a equação $x^2 + z^3 - z - xy \operatorname{sen} z = 1$ define implicitamente uma função $z = f(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^1$ cujo gráfico está numa vizinhança do ponto $(1, 1, 0)$, determine $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$, para (x, y) na vizinhança de $(1, 1)$ e encontre a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1, 0)$.

11. Seja $y = y(x)$ uma função dada implicitamente pela equação $x = F\left(x^2 + y, y^2\right)$, onde F é de classe C^1. Expresse $\dfrac{dy}{dx}$ em termos de x, y e das derivadas parciais de F.

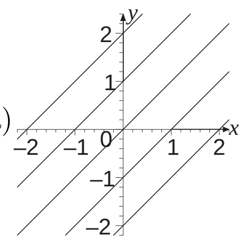
12. A função de classe C^1 $z = z(x, y)$ é dada pela equação $f\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{z}{x^\lambda}\right) = 0$ ($\lambda \neq 0$ é um real fixo), onde $f(u, v)$ é de classe C^1 e $\dfrac{\partial f}{\partial v}(u, v) \neq 0$. Verifique que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \lambda z$.

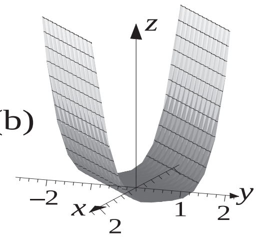
13. Sabendo que a equação $e^{x+y+z} + xyz = 1$ define implicitamente uma função $z = f(x, y)$ de classe C^1, cujo gráfico está na vizinhança do ponto $(0, 0, 0)$, determine a taxa de variação de f no ponto $(0, 0)$ na direção e sentido do vetor $(1, 1)$.

RESPOSTAS DA LISTA 14 (com indicação ou resumo de algumas resoluções)

1. Hipóteses satisfeitas: $F(x, y) = \ln(xy) - 2xy + 2)$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$ no conjunto aberto $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy > 0\right\}$ que contém $(1, 1)$, pois $F_x(x, y) = \dfrac{1}{x} - 2y$ e $F_y(x, y) = \dfrac{1}{y} - 2x$ são contínuas em A e ainda i) $F(1, 1) = 0$; ii) $F_y(1, 1) = -1 \neq 0$. $y'(1) = -1$ e $y''(1) = 2$.

2. $F(x, y) = y(x - 2)^3 + xe^{y-1}$ é de classe $\mathcal{C}^1$ no aberto $A = \mathbb{R}^2$, que contém qualquer (x_0, y_0), pois $F_x(x, y) = 3y(x - 2)^2 + e^{y-1}$ e $F_y(x, y) = (x - 2)^3 + xe^{y-1}$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$, logo essa hipótese é válida nos três casos. Nas outras duas: i) $F(1, 1) = 0$; $F(0, 0) = 0$; $F(2, 1) \neq 0$ e ii) $F_y(1, 1) = 0$; $F_y(0, 0) = -8$; $F_y(2, 1) = 1 \neq 0$. A hipótese i) falha no ponto $(2, 1)$, logo é impossível encontrar uma função f tal que $f(2) = 1$. A hipótese ii) falha no ponto $(1, 1)$, neste caso nada se pode afirmar sobre a possibilidade da equação definir uma função $y = f(x)$ tal que $f(1) = 1$. As hipóteses i) e ii) são satisfeitas no ponto $(0, 0)$, logo o Teorema da Função Implícita é aplicável apenas neste ponto.

3. (a) 

(b) 

(c) $F(0, 0) = 0$ (e) $y = f(x) = x$

(f) Não é um contra-exemplo.
Não contradiz pois a condição $F_y(0, 0) \neq 0$ é uma condição suficiente, mas não é necessária para a existência de uma função implícita $y = f(x)$.

4. Sim, pois as hipóteses do Teorema da Função Implícita estão satisfeitas, a saber: $F(x, y) = y^3 + xy + y^3$ é de classe $\mathcal{C}^1$ no aberto $A = \mathbb{R}^2$, que contém $\left(0, \sqrt[3]{4}\right)$, pois $F_x(x, y) = y + 3x^2$ e $F_y(x, y) = x + 3y^2$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$ e ainda i) $F\left(0, \sqrt[3]{4}\right) = 4$ e ii) $F_y\left(0, \sqrt[3]{4}\right) = 6\sqrt[3]{2} \neq 0$. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y + 3x^2}{x + 3y^2}$.

5. $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - x - y - z$ é de classe $\mathcal{C}^1$ no aberto $A = \mathbb{R}^3$, que contém $(1, 1, 1)$, pois $F_x(x, y, z) = 3x^2 - 1$, $F_y(x, y, z) = 3y^2 - 1$ e $F_z(x, y, z) = 3z^2 - 1$ são contínuas em $\mathbb{R}^3$. E ainda i) $F(1, 1, 1) = 0$ e ii) $F_z(1, 1, 1) = 2 \neq 0$. Logo as hipóteses do Teorema da Função Implícita estão satisfeitas, o que garante que a equação define implicitamente uma função $z = z(x, y)$ definida numa vizinhança de $(x_0, y_0) = (1, 1)$, cuja imagem está numa vizinhança de $z_0 = 1$, logo o gráfico estará numa vizinhança de $(1, 1, 1)$. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{3x^2 - 1}{3z^2 - 1}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{3x^2 - 1}{3z^2 - 1}$.

6. $f_x = \dfrac{-z}{x(1+ze^z)}$; $f_y = \dfrac{-z}{y(1+ze^z)}$

7. $f_x = \dfrac{-z^2}{2xz - 3y - \operatorname{sen} z}$; $f_y = \dfrac{3z}{2xz - 3y - \operatorname{sen} z}$

8. Reta tangente: $x + y + \sqrt{2}z = 2$; reta normal: $(x, y, z) = \big(1/2, 1/2, \sqrt{2}/2\big) + \lambda(1, 1, \sqrt{2})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

9. (a) $\nabla f(P) = \left(\dfrac{2x^*}{a^2} + \dfrac{2y^*}{b^2} + \dfrac{2z^*}{c^2}\right) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x^* = y^* = z^* = 0$. Substitua esses valores na equação do elipsóide e verifique que não é satisfeita.

   (b) $6x + 4y + 3z = 12\sqrt{3}$

   (c) $\dfrac{x^*x}{a^2} + \dfrac{y^*y}{b^2} + \dfrac{z^*z}{c^2} = 1$

10. $z = x - 1$

11. $$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x\dfrac{\partial F}{\partial u}\left(x^2 + y, y^2\right)}{\dfrac{\partial F}{\partial u}\left(x^2 + y, y^2\right) + 2y\dfrac{\partial F}{\partial v}\left(x^2 + y, y^2\right)}$$

12. Considere $F(x, y, z) = f(u, v)$. Sabendo-se que $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$, aplicando essas equações no lado esquerdo da equação a ser demonstrada e simplificando-a, obtém-se: $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-1}{\frac{\partial F}{\partial z}}\left(x\dfrac{\partial F}{\partial x} + y\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)$. Aplicando a regra da cadeia em $f(u, v)$ para determinar $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial F}{\partial z}$, substituindo e simplificando, $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x^\lambda}{\frac{\partial f}{\partial v}}\left(x \cdot \dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial u} - \dfrac{\lambda z}{x^\lambda} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial v} - \dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial u}\right) = \lambda z$.