Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 14 - 2006-2
Crescimento e decrescimento de funções
Máximos e mínimos relativos
Máximos e mínimos absolutos

OBS.: Os exercícios 1. e 2. são apenas para a disciplina Cálculo Aplicado I.

1. Seja $f(x) = \arctan x$.
   (a) Determine o polinômio de Taylor de grau 7 de $f(x)$ em torno de $x = 0$;
   (b) Usando (a), calcule $\arctan(0,3)$ e estime o erro;.
   (c) Determine o polinômio de Taylor de grau 14 de $g(x) = \arctan x^2$ em torno de $x = 0$. (Sugestâo: use o polinômio de Taylor de $f(x) = \arctan x$.)

2. Prove que se f é uma função par, então o polinômio de Taylor de grau n em torno de $x = 0$ contém apenas potências pares de x. (Sugestão: prove que f par $\Longrightarrow f'$ ímpar $\Longrightarrow f''$ par $\Longrightarrow f'''$ ímpar $\Rightarrow \cdots \Longrightarrow f^{(2k)}$ par $\Longrightarrow f^{(2k+1)}$ ímpar.)

Nos exercícios 3. a 5. dê os intervalos em que a função é crescente e em que é decrescente.

3. $f(x) = x + \dfrac{3}{x^2}$
4. $g(t) = \dfrac{3t^2 + 4t}{1 + t^2}$
5. $F(u) = \dfrac{u^2 - u + 1}{2(u - 1)}$

6. Seja f uma função tal que $f(0) = 0$ e $f'(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mostre que $0 < f(x) < x, \forall x > 0$.

7. Mostre que $\operatorname{sen} x < x$, $\forall x > 0$.
   (Sugestão: para $x \geq \pi/2$, use propriedades da trigonometria, para $0 < x < \pi/2$, use derivada)

8. Prove a desigualdade $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$, $x \neq 0$.
   (Sugestão: prove para $x > 0$ e depois use o fato de que as funções de ambos os lados são pares)

9. Prove, para $x > 0$, a desigualdade $x - \dfrac{x^3}{6} < \operatorname{sen} x$.

10. Mostre que: (a) $e^x > x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (b) $e^x > \dfrac{x^2}{2}$, $\forall x \geq 0$

Nos exercícios 11. a 13. localize os pontos onde ocorrem os extremos absolutos das funções nos intervalos dados.

11. $f(x) = x^3 - 3x^2$, $x \in [-1, 3]$
12. $f(x) = 2\cos x + \operatorname{sen} 2x$, $x \in [0, 4\pi]$
13. $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^3}{3} + 2$, $x \in [-2, 2]$

14. Mostre que $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ tem máximo absoluto em $x = e$. Conclua que $\pi^e < e^\pi$.

15. Ache a inclinação máxima da curva $y = x^3 - 3x + 3$ no intervalo $\left[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$.

16. Mostre que $p(x) = x^3 - 3x^2 + 6$ <u>tem exatamente uma</u> raiz real e localize-a em um intervalo de amplitude máxima 1.

17. Mostre que $f(x) = x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos x$ tem <u>exatamente duas</u> raízes reais e localize-as em intervalos de amplitude máxima $\pi/2$.

18. Prove que para todo $x > 0$ vale a seguinte desigualdade: $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$.

    (Sugestão: estude o crescimento da expressão do lado esquerdo e determine o mínimo absoluto dessa expressão no intervalo dado).

19. A concentração C de certa substância química no fluxo sangüínio em t horas após ter sido injetado no músculo é dada por $C = \dfrac{3t}{54 + t^3}$. Em que instante a concentração é máxima? Qual é a concetração máxima?

RESPOSTAS

1. (a) $\arctan x = x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{1}{7}x^7$ (b) $\arctan(0,3) \cong 0,291454757$ erro $\leq 10^{-4}$

   (c) $\arctan x^2 = x^2 - \dfrac{1}{3}x^6 + \dfrac{1}{5}x^{10} - \dfrac{1}{7}x^{14}$

2. Primeiro vamos provar duas afirmações gerais sobre funções:

   (i) F é par $\Longrightarrow F'$ é ímpar. De fato, se F é par então $F(-x) = F(x)$, derivando os dois lados dessa equação, obtemos $F'(-x) \cdot (-1) = F'(x)$, ou ainda $F'(-x) = -F'(x)$, que significa que F' é ímpar.

   (ii) F é ímpar $\Longrightarrow F'$ é par. De fato, se F é ímpar então $F(-x) = -F(x)$, derivando os dois lados dessa equação, obtemos $F'(-x) \cdot (-1) = -F'(x)$, ou ainda $F'(-x) = F'(x)$, que significa que F' é par.

   Agora, considere o polinômio de Taylor $P_n(f(x)) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}x^1 + \dfrac{f''(0)}{21!}x^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

   De (i) e (ii) temos f par $\Longrightarrow f'$ ímpar $\Longrightarrow f''$ par $\Longrightarrow f'''$ ímpar $\Rightarrow \cdots \Longrightarrow f^{(2k)}$ par $\Longrightarrow f^{(2k+1)}$ ímpar. Assim, quando f é par, todas as derivadas de ordem ímpar é uma função ímpar, isto é, $f^{2k+1}(-x) = -f^{2k+1}(x)$. Quando $x = 0$, obtemos $f^{2k+1}(0) = -f^{2k+1}(0)$. Mas o único número igual ao seu simétrico é o número zero, logo $f^{2k+1}(0) = 0$, isto é, todos os termos de ordem ímpar do polinômio de Taylor são nulos. Concluímos que o polinômio de Taylor só terá termos de ordem par.

3. Crescente em $(-\infty, 0) \cup \left(\sqrt[3]{6}, \infty\right)$, decrescente em $\left(0, \sqrt[3]{6}\right)$.

4. Crescente em $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$, decrescente em $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (2, \infty)$.

5. Crescente em $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, decrescente em $(0, 1) \cup (1, 2)$.

6. Primeiro vamos mostrar que $f(x) > 0,\ \forall x > 0$.

   (i) $f'(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^2} > 0,\ \forall x \neq 0 \Longrightarrow f$ é crescente em $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$;

   (ii) A função f é contínua em $\mathbb{R}$ pois f é diferenciável em $\mathbb{R}$.

   Por (i) e (ii) concluímos: f é crescente em $(0, \infty)$ e contínua em $[0, \infty) \Longrightarrow f(x) > f(0),\ \forall x > 0$.

   Finalmente, como por hipótese $f(0) = 0$, concluímos que $f(x) > 0,\ \forall x > 0$.

   Agora vamos mostrar que $f(x) < x,\ \forall x > 0$. Mas $f(x) < x,\ \forall x > 0 \Longleftrightarrow x - f(x) > 0,\ \forall x > 0$. Considerando $F(x) = x - f(x)$ temos que provar que $F(x) > 0,\ \forall x > 0$. Provando:

   (i) $F'(x) = 1 - \dfrac{x^2}{1 + x^2} = \dfrac{1}{1 + x^2} > 0,\quad x \neq 0 \Longrightarrow f$ é crescente em $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$;

   (ii) A função F é contínua em $\mathbb{R}$ pois é a diferença de funções contínuas em $\mathbb{R}$.

   Por (i) e (ii) concluímos: F é crescente em $(0, \infty)$ e contínua em $[0, \infty) \Longrightarrow F(x) > F(0),\ \forall x > 0$.

   Como $F(0) = 0 - f(0) = 0$, concluímos que $F(x) > 0,\ \forall x > 0$.

7. Para $x \geq \dfrac{\pi}{2}$. Como $1 < \dfrac{\pi}{2}$ e $\operatorname{sen} x \leq 1$, temos que $\operatorname{sen} x \leq 1 < \dfrac{\pi}{2} \leq x$. Logo $\operatorname{sen} x < x$.

   Para $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Como $\operatorname{sen} x < x \Longleftrightarrow x - \operatorname{sen} x > 0$, considere $F(x) = x - \operatorname{sen} x$.

   Como F é a soma de funções contínuas em $\mathbb{R}$, concluímos que F é contínua em $\mathbb{R}$. (*)

   $F'(x) = 1 - \cos x$ e sabemos que $\cos x < 1,\ \forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Logo $F'(x) = 1 - \cos x > 0\ \forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

   Assim concluímos que F é crescente em $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. (**)

   Pelas conclusões (*) e (**), temos que $F(x) = x - \operatorname{sen} x > F(0) = 0,\ \forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

8. Como $\forall x > 0,\ \cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2} \iff \forall x > 0,\ (\cos x) - 1 + \dfrac{x^2}{2} > 0$, considere $F(x) = (\cos x) - 1 + \dfrac{x^2}{2}$.
   Como $F(0) = 1 - 1 + 0 = 0$, se provarmos que (i) F é contínua em $[0, \infty)$ e (ii) F é crescente em $(0, \infty)$ concluíremos que $F(x) > F(0) = 0,\ \forall x > 0$. Provando (i) e (ii):
   (i) F é contínua em $\mathbb{R}$ pois é a soma, diferença e quociente de funções contínuas em $\mathbb{R}$.
   (ii) Para provar que F é crescente em $(0, \infty)$ basta provar que $F'(x) > 0,\ \forall x > 0$. Mas $F'(x) = -\operatorname{sen} x + x$. Logo basta provar que $-\operatorname{sen} x + x > 0,\ \forall x > 0$, isto é, $\operatorname{sen} x < x,\ \forall x > 0$, já provado no exercício 5.
   Agora, seguindo a sugestão, $x < 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow F(-x) > 0$ (provado acima). Mas $F(-x) = (\cos(-x)) - 1 + \dfrac{(-x)^2}{2} = F(x)$. Logo $\forall x < 0,\quad F(x) = F(-x) > 0$.

9. Considere $G(x) = (\operatorname{sen} x) - x + \dfrac{x^3}{6}$. Temos $G'(x) = (\cos x) - 1 + \dfrac{x^2}{2}$. Esta é a função F do exercício 6. e já provamos que $(\cos x) - 1 + \dfrac{x^2}{2} > 0,\quad \forall x > 0$. Assim, concluímos que G é crescente em $(0, \infty)$. (*)
   Como G é a soma de funções contínuas em $\mathbb{R}$, concluímos que G é contínua em $\mathbb{R}$. (**)
   Pelas conclusões (*) e (**), temos que $G(x) = (\operatorname{sen} x) - x + \dfrac{x^3}{6} > G(0) = 0,\ \forall x > 0$.

10. (a) Vamos analisar cada possibilidade.
    (i) Supondo $x < 0$. Sabemos que $e^x > 0,\ \forall x$, em particular quando $x < 0$ temos que $e^x > 0 > x$.
    (ii) Supondo $x \geq 0$. Para $x = 0$, $e^0 = 1 > 0$. Considere a função $f(x) = e^x - x$, contínua em $[0, \infty)$. Derivando, $f'(x) = e^x - 1$. Mas $x > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ é estritamente crescente em $[0, \infty)$ $\Rightarrow f(x) > f(0) = e^0 - 0 = 1 > 0 \Rightarrow f(x) = e^x - x > 0 \Rightarrow e^x > x$.
    (b) Considere a função $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$, contínua em $[0, \infty)$. Derivando $f'(x) = e^x - x$. Foi mostrado no item anterior que $e^x > x, \forall x$, logo $f'(x) > 0$. Mas $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ é estritamente crescente em $[0, \infty) \Rightarrow f(x) > f(0) = e^0 - 0 = 1 > 0 \Rightarrow f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2} > 0 \Rightarrow e^x > \dfrac{x^2}{2}$.

11. A função polinomial $f(x) = x^3 - 3x^2$ é contínua no intervalo fechado e limitado $[-1, 3]$, logo f satisfaz as hipóteses do Teorema dos Valores Extremos (é o teorema de Weierstrass). Aplicando esse teorema, comparamos os valores $f(-1)$ e $f(3)$ com os valores de f nos pontos críticos que estão no interior de $[-1, 3]$. Concluímos que: $\text{mín } f = f(-1) = f(2) = -4$ e $\text{máx } f = f(0) = f(3) = 0$.

12. A função $f(x) = 2\cos x + \operatorname{sen} 2x$ é contínua em $\mathbb{R}$ pois é a soma de produto e composta de funções contínuas em $\mathbb{R}$, logo f é contínua no intervalo fechado e limitado $[0, 4\pi]$. Assim, pelo Teorema de Weierstrass, comparamos os valores $f(0)$ e $f(4\pi)$ com os valores de f nos pontos críticos que estão em $(0, 4\pi)$. Concluímos: $\text{mín } f = f(5\pi/6) = (17\pi/6) = -3\sqrt{3}/2$ e $\text{máx } f = f(\pi/6) = (13\pi/6) = 3\sqrt{3}/2$.

13. A função polinomial $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^3}{3} + 2$ é contínua no intervalo fechado e limitado $[-2, 2]$. Assim, pelo Teorema dos Valores Extremos, comparamos os valores $f(-2)$ e $f(2)$ com os valores de f nos pontos críticos que estão em $(-2, 2)$. Concluímos: $\text{mín } f = f(-2) = -\dfrac{26}{15}$ e $\text{máx } f = f(2) = \dfrac{86}{15}$.

14. Domínio de $f = (0, \infty)$. Derivando, $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$. Analisando o sinal de $f'(x)$, temos $f'(x) > 0$ quando $0 < x < e$; $f'(x) < 0$ quando $x > e \Rightarrow f$ é crescente quando $0 < x < e$; f é decrescente quando $x > e$. Logo f tem um máximo relativo no único ponto crítico $x = e$. Como f é contínua em $x = e$, concluímos que f tem um máximo absoluto em $x = e$.
    Provando a desigualdade: f tem máximo absoluto em $x = e \Rightarrow f(\pi) < f(e) = \dfrac{\ln e}{e} = \dfrac{1}{e} \Rightarrow f(\pi) = \dfrac{\ln \pi}{\pi} < \dfrac{1}{e}$. Como $e > 0$ e $\pi > 0$, temos: $e \ln \pi < \pi$. Aplicando a propriedade de logaritmo de potência, temos $e \ln \pi = \ln \pi^e$, logo $\ln \pi^e < \pi$. Sabemos que a função exponencial é estritamente crescente, logo $e^{\ln \pi^e} < e^\pi$. Sabemos que $e^{\ln x} = x, \forall x > 0$, em particular $e^{\ln \pi^e} = \pi^e$. Logo, $\pi^e < e^\pi$.

15. Máx $f' = f'(5/2) = 63/4$.

16. Estudando o crescimento de f e aplicando o Teorema do Valor Intermediário, conclui-se que a única raiz está em $(-2, -1)$.

17. Idem anterior, uma raiz está em $(-\pi/2, 0)$ e a outra em $(0, \pi/2)$.

18. No intervalo $(0, \infty)$, o mínimo absoluto de $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ é igual a $f(1) = 2$. Logo $f(x) \geq f(1) = 2$.

19. No instante $t = 3$. A concentração máxima é $\dfrac{1}{9} = 0,1111... = 0,\overline{1}$.