Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 15 - 2008-1

Esboço de gráficos

Nos exercícios 1. a 8. esboce o gráfico da função f e dê explicitamente o que se pede:

- domínio D de f; • paridade de f; • equações das assíntotas verticais e horizontais do gráfico;
- intervalos de D em que f é contínua; • pontos de D em que a tangente ao gráfico é vertical;
- intervalos de D onde f é crescente e onde f é decrescente;
- extremos relativos de f e os respectivos pontos de D onde ocorrem;
- intervalos onde a concavidade do gráfico é para cima, onde é para baixo e os seus pontos de inflexão;
- extremos absolutos de f e os respectivos pontos de D onde ocorrem; • imagem de f.

1. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2}{x}$
2. $f(x) = \dfrac{16 - x^2}{(x-2)^2}$
3. $f(x) = (x-1)x^{2/3}$
4. $f(x) = \dfrac{3x+1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$
5. $f(x) = \dfrac{3x^2}{4 - 4x + x^2}$
6. $f(x) = -1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$
7. $f(x) = x + \operatorname{sen} x$
8. $f(x) = x - 5\arctan x$

9. Seja $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável e tal que
   - $f(x) \neq 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^*, \ \ f(-1) = -2$ e $f(1) = 3$;
   - $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty, \ \ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0, \ \ \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty, \ \ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0,$
   - $f''(x) < 0$ se $\{x \neq 0$ e $x < 2\}$, $f''(x) = 0$ se $x = 2$, $f''(x) > 0$ se $x > 2$;
   - o gráfico de f' está dado ao lado.

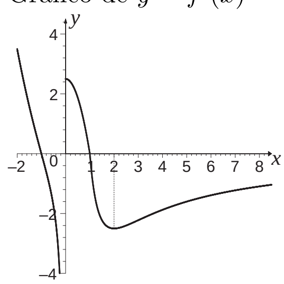
   Nestas condições,

   (a) prove que $f(x) > 0, \ \forall x > 0$

   (b) prove que $f(x) < 0, \ \forall x < 0$

   (c) esboce um possível gráfico de f.

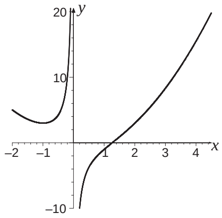
Gráfico de $y = f'(x)$



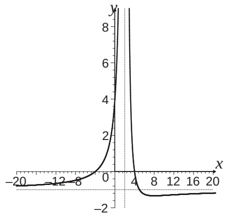
Esboce os gráficos dos exercícios 10. a 16.

10. $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$
11. $f(x) = \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$
12. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$
13. $f(x) = x^2 \ln x$
14. $f(x) = e^{-x^2}$
15. $f(x) = xe^{-x}$
16. $f(x) = \pi^{x^3}$

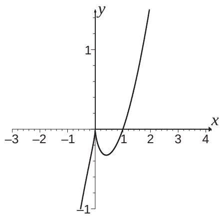
RESPOSTAS

1. 

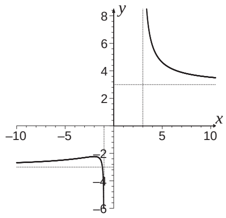
$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; nem par, nem ímpar; contínua em D; assíntota vertical: $x = 0$, não tem assíntota horizontal; não tem reta tangente vertical; crescente em $(-1, 0) \cup (0, \infty)$, decrescente em $(-\infty, -1)$; mínimo relativo $= f(-1) = 3$, não tem máximo relativo; concavidade para cima em $(-\infty, 0) \cup \left(\sqrt[3]{2}, \infty\right)$, para baixo em $\left(0, \sqrt[3]{2}\right)$, ponto de inflexão $= \left(\sqrt[3]{2}, f\left(\sqrt[3]{2}\right)\right) = \left(\sqrt[3]{2}, 0\right)$; não tem mínimo absoluto pois $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, não tem máximo absoluto pois $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \infty$; imagem $= (-\infty, \infty)$.

2. 

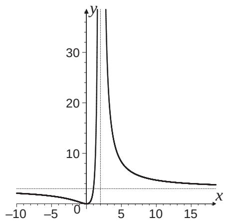
$D = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$; nem par, nem ímpar; contínua em D; assíntota vertical: $x = 2$, assíntota horizontal: $y = -1$; não tem reta tangente vertical; crescente em $(-\infty, 2) \cup (8, \infty)$; decrescente em $(2, 8)$; mínimo relativo $= f(8) = -4/3$, não tem máximo relativo; concavidade para cima em $(-\infty, 2) \cup (2, 11)$, para baixo em $(11, \infty)$, ponto de inflexão $= (11, f(11)) = (11, -35/27)$; mínimo absoluto $= f(8) = -4/3$, não tem máximo absoluto pois $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \infty$; imagem $= [-4/3, \infty)$.

3. 

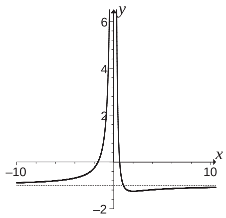
$D = (-\infty, \infty)$; nem par, nem ímpar; contínua em D; não tem assíntota vertical, não tem assíntota horizontal; reta tangente vertical: $x = 0$; crescente em $(-\infty, 0) \cup (2/5, \infty)$; decrescente em $(2, 2/5)$; mínimo relativo $= f(2/5) = \left(-3\sqrt[3]{20}\right)/25$, máximo relativo $= f(0) = 0$; concavidade para cima em $(-1/5, 0) \cup (0, \infty)$, para baixo em $(-\infty, -1/5)$, ponto de inflexão $= \left(-1/5, -6\sqrt[3]{5}/25\right)$; não tem mínimo absoluto pois $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, não tem máximo absoluto pois $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$; imagem $= (-\infty, \infty)$.

4. 

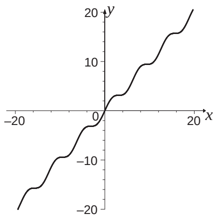
$D = (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$; nem par, nem ímpar; contínua em D; assíntotas verticais: $x = -1$ e $x = 3$, assíntotas horizontais: $y = -3$ e $y = 3$; não tem reta tangente vertical; crescente em $(-\infty, -2)$; decrescente em $(-2, -1) \cup (3, \infty)$; não tem mínimo relativo, máximo relativo $= f(-2) = -\sqrt{5}$; concavidade para cima em $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$, para baixo em $(-3, -1)$, ponto de inflexão $= \left(-3, -4\sqrt{3}/3\right)$; não tem mínimo absoluto pois $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$, não tem máximo absoluto pois $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \infty$; imagem $= \left(-\infty, -\sqrt{5}\right] \cup (3, \infty)$.

5. 

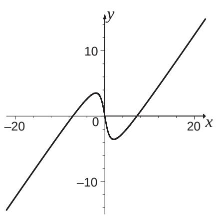
$D = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$; nem par, nem ímpar; contínua em D; assíntota vertical: $x = 2$, assíntota horizontal: $y = 3$; não tem reta tangente vertical; crescente em $(0, 2)$; decrescente em $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$; mínimo relativo $= f(0) = 0$, não tem máximo relativo; concavidade para cima em $(-1, 2) \cup (2, \infty)$, para baixo em $(-\infty, -1)$, ponto de inflexão $= (-1, 1/3)$; mínimo absoluto $= f(0) = 0$, não tem máximo absoluto pois $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \infty$; imagem $= [0, \infty)$.

6. 

$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$; nem par, nem ímpar; contínua em D; assíntota vertical: $x = 0$, assíntota horizontal: $y = -1$; não tem reta tangente vertical; crescente em $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$; decrescente em $(0, 2)$; mínimo relativo $= f(2) = -5/4$, não tem máximo relativo; concavidade para cima em $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$, para baixo em $(3, \infty)$, ponto de inflexão $= (3, -11/9)$; mínimo absoluto $= f(2) = -5/4$, não tem máximo absoluto pois $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$; imagem $= [-5/4, \infty)$.

7. 

$D = (-\infty, \infty)$; é ímpar; contínua em D; não tem assíntota vertical, não tem assíntota horizontal; não tem reta tangente vertical; crescente em D; não tem mínimo relativo, não tem máximo relativo; concavidade para cima em $(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, para baixo em $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, pontos de inflexão $(x, y) = (2k\pi, f(2k\pi)) = (2k\pi, 2k\pi)$ e $(x, y) = (\pi + 2k\pi, f(\pi + 2k\pi)) = (\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, não tem mínimo absoluto pois $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, não tem máximo absoluto pois $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$; imagem $= (-\infty, \infty)$.

8. 

$D = (-\infty, \infty)$; é ímpar; contínua em D; não tem assíntota vertical, não tem assíntota horizontal; não tem reta tangente vertical; crescente em $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$, decrescente em $(-2, 2)$; mínimo relativo $= f(2) = 2 - 5\arctan 2 \cong -3,55$, máximo relativo $= f(2) = -2 + 5\arctan 2 \cong 3,55$; concavidade para cima em $(0, \infty)$, para baixo em $(-\infty, 0)$, ponto de inflexão $= (0, 0)$; não tem mínimo absoluto pois $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, não tem máximo absoluto pois $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$; imagem $= (-\infty, \infty)$.

9. Primeiro observe que por hipótese, $\exists f''(x), \forall x \neq 0 \Longrightarrow \exists f'(x), \forall x \neq 0 \Longrightarrow f$ é contínua $\forall x \neq 0$.

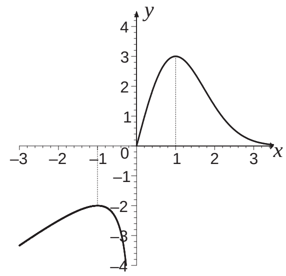
   O gráfico de $y = f'(x)$ e os outros dados conduzem ao seguinte quadro:

	$-\infty \leftarrow x$	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x \to 0^-$	$0^+ \leftarrow x$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x$	$x \to \infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$+$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	cresce	-2	decresce	$-\infty$	0	cresce	3	decresce	0

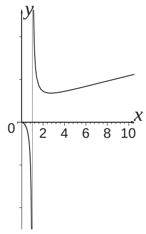
   (a) Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, f é crescente no intervalo $(0, 1)$, é contínua no intervalo $(0, 1]$, $f(1) = 3 > 0$, podemos concluir que $f(x) > 0$ no intervalo $(0, 1]$.
   Como $f(1) = 3 > 0$, f é contínua no intervalo $[1, \infty)$, decrescente no intervalo $(1, \infty)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, podemos concluir que $f(x) > 0$ no intervalo $[1, \infty)$.

   (b) Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, f é crescente no intervalo $(-\infty, -1)$, é contínua no intervalo $(-\infty, -1]$, $f(-1) = -2 < 0$, podemos concluir que $f(x) < 0$ no intervalo $(-\infty, -1]$.
   Como $f(-1) = -2 < 0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$, f é contínua no intervalo $[-1, 0)$, decrescente no intervalo $(-1, 0)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$, podemos concluir que $f(x) < 0$ no intervalo $[-1, 0)$.

   (c) Como $f'(1) = 0$, f é contínua no intervalo $(0, \infty)$, f é crescente no intervalo $(0, 1)$, f é decrescente no intervalo $(1, \infty)$, podemos concluir que f tem um máximo relativo em $x = 1$, onde o gráfico de f tem reta tangente horizontal.
   Como $f'(-1) = 0$, f é contínua no intervalo $(-\infty, 0)$, f é crescente no intervalo $(-\infty, -1)$, f é decrescente no intervalo $(-1, 0)$, podemos concluir que f tem um máximo relativo em $x = -1$, onde o gráfico de f tem reta tangente horizontal.
   Analisando a concavidade do gráfico:
   $f''(x) < 0$ se $x < 0$ ou $0 < x < 2 \Longrightarrow$ o gráfico é côncavo para baixo nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, 2)$.
   $f''(x) > 0$ se $x > 2 \Longrightarrow$ o gráfico é côncavo para cima no intervalo $(2, \infty)$.

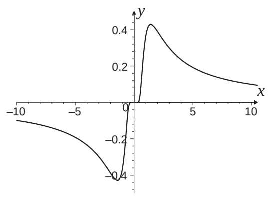


10.



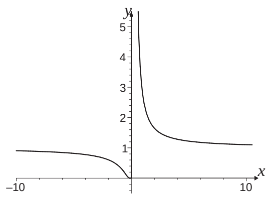
Mínimo relativo de f
$= f(e) = e$
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \infty$
Assíntota vertical: $x = 1$

11.



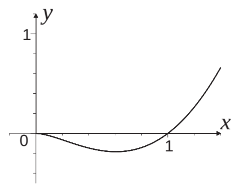
Mínimo absoluto de f
$= f\left(-\sqrt{e}\right) = -\dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}$
Máximo absoluto de f
$= f\left(\sqrt{e}\right) = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$
Assíntota horizontal $y = 0$

12.



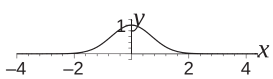
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$
Assíntota horizontal $y = 1$
Assíntota vertical $x = 0$

13.



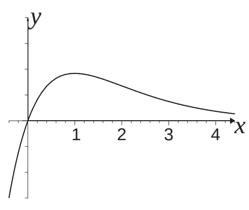
Mínimo absoluto de f
$= f\left(\frac{1}{e}\right) = -\dfrac{1}{e^2}$
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

14.



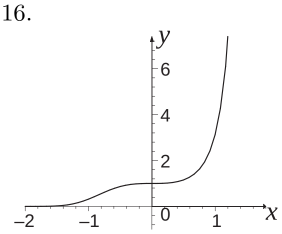
Máximo absoluto de f
$= f(0) = 1$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$
Assíntota horizontal: $y = 0$

15.



Máximo absoluto de f
$= f(1) = \dfrac{1}{e}$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$
Assíntota horizontal: $y = 0$

16.



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
Assíntota horizontal: $y = 0$