LISTA 16

1. Calcule $\displaystyle\iint_R (x+y)\ dx\,dy$, onde R é o paralelogramo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$ e $(3,1)$. (sugestão: faça a mudança de variáveis $x = u+v$, $y = v$)

2. Considere a transformação do plano uv no plano xy definida por $T(u,v) = (x,y) = \left(u+v, u^2 - v\right)$. Seja R_{uv} a região do plano uv limitada pelos eixos u e v e pela reta $u+v=2$. Seja $R_{xy} = T\left(R_{uv}\right)$, a imagem de R_{uv} por T.
   (a) Esboce R_{xy} (b) Calcule $\displaystyle\iint_{R_{xy}} \frac{dx\,dy}{\sqrt{1+4x+4y}}\ dx\,dy$

3. Considere a mudança de variáveis $T(u,v) = (x,y)$, onde $x = u^2 - v^2$ e $y = 2uv$.
   (a) Verifique que se S_{uv} é a região contida no 1º quadrante do plano uv, limitada pelas retas $u = v$, $v = 4u$ e pela hipérbole $uv = 1$, então a fronteira de $S_{xy} = T(u,v)$ é o triângulo no plano xy de vértices $(0,0)$, $(0,2)$, $(-15/4, 2)$.
   (b) Calcule $\displaystyle\iint_{S_{uv}} 4e^{uv}\left(u^2+v^2\right)\ du\,dv$

4. Calcule $\displaystyle\iint_R x\ dx\,dy$, onde R é a região limitada pelas retas $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$ e pela parábola $y = 1 + x^2$. (sugestão: faça a mudança de variáveis $x = u$, $y = v\left(1+u^2\right)$)

5. Calcule $\displaystyle\iint_R x\ dx\,dy$, onde R é a região limitada pelas retas $x - 2y = 2$, $x - 2y = 3$, $x + 2y = 1$ e $x + 2y = 4$.

6. Se A é a área da elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ prove que $A = \pi ab$.

7. Se V é o volume do elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ prove que $V = \dfrac{4}{3}\pi abc$.

8. Encontre a massa da lâmina na forma da região limitada pela parábola $x^2 = 8y$ pela reta $y = 2$ e pelo eixo y, sabendo que a densidade de massa varia proporcionalmente com a distância à reta $y = -1$.

9. Se uma lâmina L é simétrica em relação a um dos eixos coordenados e se a densidade é integrável e simétrica em relação ao mesmo eixo prove que o centro de massa da lâmina L está nesse eixo.

10. Calcule o centro de massa da lâmina $L = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + 4y^2 \le 1,\ y \ge 1\right\}$ se a densidade é proporcional à distância de (x,y) ao eixo x.

Algumas observações sobre definições e nomenclaturas da Física:

Obs.1 Diz-se que a lâmina delgada é homogênea quando a densidade de massa ρ é constante.

Obs.2 Centróide é o centro de massa da lâmina delgada homogênea.

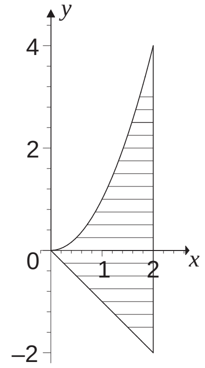
Obs.3 Sabe-se que o momento de inércia I de uma partícula de massa m em relação a um eixo E ou a um ponto P é dado pela fórmula $I = mr^2$, sendo r a distância da partícula ao eixo E ou ao ponto P. Usando Soma de Riemann, é possível provar que para uma lâmina delgada L que tem densidade de massa contínua, o momento de inércia I de L em relação aos eixos coordenados e a origem O são calculados pelas fórmulas, em relação:
ao eixo x, $I_x = \displaystyle\iint_L y^2\rho(x,y)\ dx\,dy$; ao eixo y, $I_y = \displaystyle\iint_L x^2\rho(x,y)\ dx\,dy$; à origem O, $I_O = I_x + I_y$.

11. Ache o centróide da semi-circunferência de raio a.

12. Ache os momentos de inércia I_x, I_y e I_0 para uma lâmina ocupando a região $R : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2-x$, se a função de densidade de masssa é dada por $\rho(x,y) = x + 2y$ gramas por centímetro quadrado.

RESPOSTAS DA LISTA 16 (com indicação ou resumo de algumas resoluções)

1. 4

2. (a) 

(b) 2

3. (a) $T\left(\{(u,v);\ v=u,\ 0\le u\le 1\}\right)=\{(x,y);\ x=0,\ 0\le y\le 2\}$
$T\left(\{(u,v);\ v=4u,\ 0\le u\le 1/2\}\right)=\{(x,y);\ 8x+15y=0,\ 0\le y\le 2\}$
$T\left(\{(u,v);\ uv=1,\ 1/2\le u\le 1\}\right)=\{(x,y);\ y=2,\ -15/4\le x\le 0\}$
Logo a transformada da fronteira de S_{uv} é o triângulo de vértices $(0,0),\ (0,2),\ (-15/4,2)$. Como a transformada da fronteira de S_{uv} também é a fronteira de S_{xy}, concluímos que a fronteira de S_{xy}é o triângulo de vértices $(0,0),\ (0,2),\ (-15/4,2)$.
(b) $\dfrac{15}{2}$

4. $\dfrac{99}{4}$

5. $\dfrac{15}{8}$

6. Faça a mudança de variáveis $u=ax$ e $v=by$ e use coordenadas polares.

7. Idem anterior.

8. $\dfrac{176}{15}$

9. Sem perda de generalidade, suponha a simetria em relação ao eixo y. A região de integração R é união de duas regiões R_1 e R_2 simétricas em relação ao eixo y e a densidade ρ satisfaz $\rho(-x,y)=\rho(x,y)$. Precisamos mostrar que $\overline{x}=0$.

$$\overline{x}=\frac{\displaystyle\iint_R x\rho(x,y)\ dxdy}{\displaystyle\iint_R \rho(x,y)\ dxdy}=\frac{\displaystyle\iint_{R_1} x\rho(x,y)\ dxdy+\iint_{R_2} x\rho(x,y)\ dxdy}{\displaystyle\iint_R \rho(x,y)\ dxdy}=$$

$$=\frac{\displaystyle\iint_{R_1} x\rho(x,y)\ dxdy-\iint_{R_2} (-x)\rho(x,y)\ dxdy}{\displaystyle\iint_R \rho(x,y)\ dxdy}=\frac{\displaystyle\iint_{R_1} x\rho(x,y)\ dxdy-\iint_{R_2} (-x)\rho(-x,y)\ dxdy}{\displaystyle\iint_R \rho(x,y)\ dxdy}=$$

$$=\frac{\displaystyle\iint_{R_1} x\rho(x,y)\ dxdy-\iint_{R_1} (x)\rho(x,y)\ dxdy}{\displaystyle\iint_R \rho(x,y)\ dxdy}=0$$

10. $\left(0,\dfrac{3\pi}{32}\right)$

11. A semi-circunferência de raio a e base $2a$ tem o centróide situado no raio perpendicular à base a uma distância $\dfrac{4a}{3\pi}$ dessa base.

12. $I_x=\dfrac{56}{15};\ \ I_y=\dfrac{8}{3};\ \ I_O=\dfrac{32}{5}$