LISTA 18

1. Calcule $\displaystyle\iiint_U z\,dx\,dy\,dz$, onde U é o tetraedro de vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ e $(1,0,1)$.

   Nos exercícios 2. e 3. cada integral iterada representa uma integral tripla numa região R. Descreva R e calcule as integrais.

2. $\displaystyle\int_1^2\int_y^{y^2}\int_0^{\ln x} ye^z\,dz\,dx\,dy$

3. $\displaystyle\int_0^1\int_{2x}^{1+x}\int_z^{x+z} x\,dy\,dz\,dx$

   Use coordenadas cilíndricas para calcular as integrais dos exercícios 4. e 5.

4. $\displaystyle\iiint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dV$, onde $S=\{(x,y,z);\ x^2+y^2\le 9,\ 0\le z\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$

5. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$

   Use coordenadas esféricas para calcular as integrais dos exercícios 6. e 7.

6. $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}}\int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$

7. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \left(x^2+y^2+z^2\right)\,dz\,dy\,dx$

8. Calcule $\displaystyle\iiint_S z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, $S=\{(x,y,z);\ (x-1)^2+y^2\le 1,\ 0\le z\le 4\}$.

9. Exprima a integral $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^2\int_{-r^2}^4 \frac{zr^3}{4+r\,\mathrm{sen}\,\theta}\,dz\,dr\,d\theta$ como integral iterada em coordenadas retangulares.

10. Exprima a integral $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_{3\pi/4}^{\pi}\int_0^1 \rho^5\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$ como integral iterada em coordenadas retangulares.

11. Exprima a integral $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^5\int_0^{\sqrt{25-r^2}} r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,dz\,dr\,d\theta$ como integral iterada em coordenadas esféricas.

12. Calcule, usando coordenadas esféricas, $\displaystyle\iiint_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$, onde S é o sólido acima do cone $z=-\sqrt{3x^2+3y^2}$ e interior à esfera $x^2+y^2+z^2=4$.

13. Calcule a integral de $f(x,y,z)=z$ sobre a região limitada pelo cone $z=\sqrt{2x^2+2y^2}$ e pelo semi-hiperbolóide $z=\sqrt{x^2+y^2+1}$.

14. Calcule $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_1^{\sqrt{2-x^2-y^2}} \frac{z}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\,dz\,dy\,dx$.

15. Calcule $\displaystyle\int_1^2\int_0^x\int_0^{x^2+y^2} \frac{z}{(x^2+y^2)^2}\,dz\,dy\,dx$.

16. Calcule $\displaystyle\iiint_S \cos\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\,dV$, $S=\{(x,y,z),\ 1\le x^2+y^2+z^2\le 36\}$.

17. Calcule $\displaystyle\iiint_S \operatorname{sen} z \, dV$, $S = \left\{(x,y,z);\ 0 \le z \le 4x^2+4y^2,\ 0 \le x \le y \le \sqrt{1-x^2},\ x \le \sqrt{2}/2\right\}$.

Nos exercícios 18. e 19. exprima a integral dada em coordenadas cilíndricas e em coordenadas esféricas.

18. $\displaystyle\iiint_S \sqrt{81-x^2-y^2-z^2}\, dx\, dy\, dz$, S é o sólido interior ao cilindro $x^2+y^2=4$, entre $z=0$ e $z = 6-\sqrt{x^2+y^2}$.

19. $\displaystyle\iiint_S \sqrt[3]{x^2+y^2-1}\, dx\, dy\, dz$, $S = \left\{(x,y,z);\ z \le \sqrt{(x^2+y^2)/3},\ x^2+y^2+z^2 \le 12\right\}$.

20. Sejam $0 < k < R$ constantes. Calcule o volume da porção da esfera $\left\{(x,y,z);\ k \le z \le \sqrt{R^2-x^2-y^2}\right\}$.

21. Use a mudança de variáveis $x = au,\ y = bv,\ z = cw,\quad a,b,c$ constantes positivas, para provar que o volume do elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ é igual a $\frac{4}{3}\pi abc$.

22. Sejam T a transformação linear $T(u,v,w) = (2u+v-2w, u+2v+2w, 2u-v+w) = (x,y,z)$, R_{uvw} uma região do espaço no sistema uvw, $R_{xyz} = T\left(R_{uvw}\right)$ e f uma função real integrável. Calcule $\displaystyle\iiint_{R_{uvw}} f\ du\, dv\, dw$, sabendo-se que $\displaystyle\iiint_{R_{xyz}} f\ dx\, dy\, dz = 3$.

23. Encontre a massa do sólido limitado pelos cilindros $z=\sqrt{x}$ e $y=x^2$ e pelos planos $x=1,\ y=0$ e $z=0$ cuja densidade varia com o produto das distâncias aos três planos coordenados.

24. Determine o centro de massa de um cone (o sólido) circular reto de base R e altura h, cuja densidade é proporcional à distância até a base do cone.

Algumas observações sobre definições e nomenclaturas da Física:

Obs.1 Diz-se que um corpo sólido é homogêneo quando a densidade de massa ρ é constante.

Obs.2 Centróide é o centro de massa de um corpo sólido homogêneo.

Obs.3 Sabe-se que o momento de inércia I de uma partícula de massa m em relação a um eixo E ou a um ponto P é dado pela fórmula $I = mr^2$, sendo r a distância da partícula ao eixo E ou ao ponto P. Usando Soma de Riemann, é possível provar que para um corpo sólido S que tem densidade de massa contínua, o momento de inércia I de S em relação aos eixos coordenados e a origem O são calculados pelas fórmulas, em relação:

ao eixo x, $\displaystyle I_x = \iiint_S (y^2+z^2)\,\rho(x,y)\ dx\, dy\, dz$; ao eixo y, $\displaystyle I_y = \iiint_S (x^2+z^2)\,\rho(x,y)\ dx\, dy\, dz$;

ao eixo z, $\displaystyle I_z = \iiint_S (x^2+y^2)\,\rho(x,y)\ dx\, dy\, dz$; à origem O, $I_O = \dfrac{1}{2}(I_x+I_y+I_z)$.

25. Calcule, em função da massa M, o momento de inércia do cubo homogêneo em relação a um eixo que contém uma das arestas.

26. Considere o cilindro homogêneo S de massa M, onde $S = \left\{(x,y,z);\quad (x-a)^2+y^2 \le a^2,\quad 0 \le z \le h\right\}$.
    (a) Calcule o momento de inércia em relação à reta $x=a, y=0$.
    (b) Calcule o momento de inércia em relação ao eixo z. (Dê as respostas em função de M)

27. Calcule o centróide do tetraedro limitado pelos planos $x=0,\ \ y=0,\ \ z=0$ e $x+y+z=1$.

28. Calcule o centróide da região limitada pela esfera $\rho = a$ e pelo cone $\varphi = a$.

RESPOSTAS DA LISTA 18

1. $1/24$
2. $47/24$
3. $1/12$
4. 18π
5. $\pi/30$
6. π
7. $16\pi/5$
8. $256/9$
9. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-x^2-y^2}^{4}\frac{z\left(x^2+y^2\right)}{4+y}dz\,dy\,dx$
10. $\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{-\sqrt{x^2+y^2}} x\left(x^2+y^2+z^2\right)dz\,dy\,dx.$
11. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^5 \rho^3\,\mathrm{sen}^2\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta\;\; d\rho\,d\varphi\,d\theta.$
12. $8\pi+4\pi\sqrt{3}$
13. $\pi/4$
14. $\pi/24$
15. $3/4$
16. $\dfrac{4\pi}{3}(\,\mathrm{sen}\,(216)-\,\mathrm{sen}\,(1))$
17. $\dfrac{\pi}{8}\left(1-\dfrac{\mathrm{sen}\,(4)}{4}\right)$
18. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{6-r} r\sqrt{81-r^2-z^2}\;dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\arctan\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\frac{6}{\mathrm{sen}\,\varphi+\cos\varphi}} f\;d\rho\,d\varphi\,d\theta\;+$
$\displaystyle+\int_0^{2\pi}\int_{\arctan\left(\frac{1}{2}\right)}^{\pi/2}\int_0^{2\csc\varphi} f\;d\rho\,d\varphi\,d\theta,\qquad f=\rho^2\sqrt{81-\rho^2}\,\mathrm{sen}\,\varphi$
19. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{-\sqrt{12-r^2}}^{r/\sqrt{3}} r\sqrt[3]{r^2-1}\;dz\,dr\,d\theta+\int_0^{2\pi}\int_3^{2\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{12-r^2}}^{\sqrt{12-r^2}} r\sqrt[3]{r^2-1}\;dz\,dr\,d\theta\;=$
$\displaystyle\int_{\pi/6}^{2\pi}\int_0^3\int_0^{2\sqrt{3}}\sqrt[3]{\rho^2\,\mathrm{sen}2\varphi-1}\;\rho^2\,\mathrm{sen}\,\varphi\;d\rho\,d\varphi\,d\theta$
20. $\dfrac{2\pi}{3}\left(R^3-2kR^2+k^3\right)$
22. $\dfrac{1}{7}$
23. $\dfrac{k}{28}$
24. $\left(0,0,\dfrac{3h}{5}\right)$
25. $\dfrac{2a^2}{M}$
26. (a) $\dfrac{Ma^2}{2}$ (b) $\dfrac{3Ma^2}{2}$
27. $\dfrac{1}{4}(1,1,1)$
28. $\dfrac{3a}{8}\;(0,0,1+\cos a)$