Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 18 - 2006-2
Integral definida
Teorema Fundamental do Cálculo
Área de regiões planas

Calcule as integrais dos exercícios 1. a 10.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left((\sqrt[3]{t})^2 - 2 \right) dt$
2. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x - \sqrt{x}}{3}\, dx$
3. $\displaystyle\int_{1}^{3} \left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) dx$
4. $\displaystyle\int_{1}^{2} \sqrt{\frac{2}{x}}\, dx$
5. $\displaystyle\int_{0}^{2} (2 - s)\sqrt{s}\, ds$
6. $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x|\, dx$
7. $\displaystyle\int_{0}^{4} \left| x^2 - 4x + 3 \right| dx$
8. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x\, dx$
9. $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{x}{\sqrt{x-1}}\, dx$
10. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$

Derive as funções dos exercícios 11. a 15.

11. $f(x) = \displaystyle\int_{-x}^{1} \frac{t^2 - 2t}{t^2 + 4}\, dt$
12. $f(x) = \displaystyle\int_{-\operatorname{sen}^2 x}^{x^4} \cos t^3\, dt$
13. $f(x) = x^2 \displaystyle\int_{1}^{2\sqrt{x}} \sqrt{t^2 + 1}\, dt$
14. $F(x) = \displaystyle\int_{0}^{|\operatorname{sen} x|} \ln t\, dt$
15. $F(x) = \displaystyle\int_{0}^{\sqrt{x}} e^{t^2+1}\, dt$

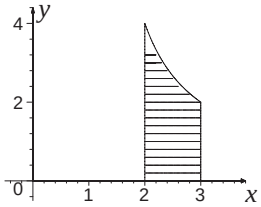
Calcule os limites dos exercícios 16. e 17.

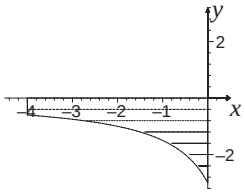
16. $\displaystyle\lim_{x \to \pi} \frac{\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{x}{2}} \cos(\operatorname{sen} t)\, dt}{(x - \pi)^3}$
17. $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{\displaystyle\int_{-x}^{1} e^{t^2}\, dt}{(x+1)^3}$

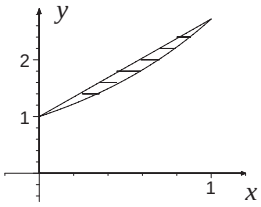
Calcule a área da região R dos exercícios 18. a 24.

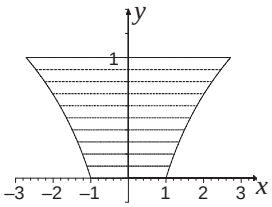
18. R é a região entre os gráficos de $y = x^2 - 1$ e $y = x + 5$.
19. R é limitada por $y = x^2 - 2x$, o eixo x e as retas $x = -2$ e $x = 4$.
20. R é a região entre a reta $x = 2$ e a curva $x = y^2 + 1$.
21. R é o conjunto dos pontos (x, y) tais que $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$.
22. R é a região entre os gráficos de $y = |x|$ e $y = x^2$, com $-3 \leq x \leq 3$.
23. R é a região delimitada pelas curvas $y = x$, $xy^2 = 1$ e $y = 2$.
24. R é a região delimitada pelas curvas $y = \operatorname{sen} x$ e $y = -\operatorname{sen} 2x$; $0 \leq x \leq \pi$.
25. Esboce e encontre a área da região entre o eixo x e a hipérbole $y = \dfrac{4}{x-1}$, para $2 \leq x \leq 3$.
26. Esboce e encontre a área da região delimitada por $y = \dfrac{3}{x-1}$, pelo eixo x, pelo eixo y e pela reta $x = -4$.
27. Esboce e encontre a área da região limitada pela curva $y = e^x$ e a reta que contém os pontos $(0, 1)$ e $(1, e)$.
28. Esboce e encontre a área da região situada acima do eixo x, abaixo da reta $y = 1$ e limitada por $y = \ln |x|$.
29. Determine m de modo que a área da região limitada por $y = mx$ e $y = 2x - x^2$ seja 36.
30. A reta $y = 1 - x$ divide a região compreendida entre as parábolas $y = 2x^2 - 2x$ e $y = -2x^2 + 2$ em duas partes. Mostre que as áreas assim obtidas são iguais e calcule o seu valor.
31. Calcule $\int_0^1 x f'(x)\, dx$, sabendo que $f(1) = 2$ e que $\int_0^1 f(t)\, dt$ é igual a área da região R entre o gráfico de $y = -x^2$ e as retas $y = 1$, $x = 0$ e $x = 1$. $\left(\text{sugestão: } \dfrac{d}{dx}(x f(x)) = f(x) + x f'(x) \right)$

RESPOSTAS

1. $-\frac{14}{5}$
2. $-\frac{1}{18}$
3. 0
4. $\left(4-2\sqrt{2}\right)$
5. $\frac{16}{15}\sqrt{2}$
6. 1
7. 4
8. $\frac{5}{12}\sqrt{2}$
9. $\dfrac{1}{3}\left(10\sqrt{2}-8\right)$
10. $\dfrac{1}{2}\operatorname{arcsen}\dfrac{1}{4}$
11. $f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^2+4}$
12. $f'(x)=4x^3\cos x^{12}+\operatorname{sen}2x\ \cos\left(\operatorname{sen}^6 x\right)$
13. $f'(x)=\sqrt{(4x+1)x^3}+2x\displaystyle\int_1^{2\sqrt{x}}\sqrt{t^2+1}\ dt$
14. $F'(x)=\dfrac{\operatorname{sen}x}{|\operatorname{sen}x|}(\cos x)\ln|\operatorname{sen}x|$
15. $F'(x)=\dfrac{e^{x+1}}{2\sqrt{x}}$
16. ∞
17. ∞
18. $\displaystyle\int_{-2}^{3}\left((x+5)-\left(x^2-1\right)\right)dx$
19. $\displaystyle\int_{-2}^{0}\left(x^2-2x\right)dx+\int_0^2-\left(x^2-2x\right)dx+$
$\displaystyle+\int_2^4\left(x^2-2x\right)dx=\frac{44}{3}$
20. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(2-\left(y^2+1\right)\right)dy=\frac{4}{3}$
21. $\displaystyle\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\frac{1}{3}$
22. $\displaystyle 2\int_0^1\left(x-x^2\right)dx+$
$\displaystyle+2\int_1^3\left(x^2-x\right)dx=\frac{29}{3}$
23. $\displaystyle\int_1^2\left(y-y^{-2}\right)dy=1$
24. $\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\left(\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}2x\right)\ dx+$
$\displaystyle+2\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}-\left(\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}2x\right)\ dx=\frac{5}{2}$
25. 

área $=4\ln 2$
26. 

área $=3\ln 5$
27. 

área$=\dfrac{3-e}{2}$
28. 

área $=2e-2$
29. $m=-4$
30. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left[\left(2-2x^2\right)-(1-x)\right]\ dx=$
$\displaystyle=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left[(1-x)-\left(2x^2-2x\right)\right]\ dx=\frac{9}{8}$
31. $\dfrac{2}{3}$