RESPOSTAS DA LISTA 1 - Noções de lógica

1. (a) Fechada, pois não há nenhuma variável a ser substituída para responder se é verdadeira ou falsa. A afirmação é verdadeira porque $100 = 5 \times 20$.
   (b) Fechada, pois não há nenhuma variável a ser substituída para responder se é verdadeira ou falsa. A afirmação é falsa porque 100 tem outros divisores além de 2, 5 e 10.
   (c) Fechada, pois não há nenhuma variável a ser substituída para responder se é verdadeira ou falsa. Verdadeira porque $100 = 50 \times 2$, $100 = 20 \times 5$, $100 = 10 \times 10$.
   (d) Aberta, pois é preciso atribuir algum valor para a variável $''a''$ para verificar se a afirmação verdadeira ou falsa.
   (e) Fechada, pois não há nenhuma variável a ser substituída para responder se é verdadeira ou falsa. Verdadeira porque $100 = 5 \times 20 = 5 \times a$.

2.

(a) V	(g) F	(m) V	(s) F	(y) F
(b) V	(h) F	(n) OBS	(t) V	(z) F
(c) F	(i) V	(o) F	(u) V	
(d) V	(j) V	(p) F	(v) F	
(e) F	(k) V	(q) V	(w) V	
(f) V	(l) V	(r) V	(x) F	

OBS.: Não é possível atribuir V nem F porque essa operação não deixa claro por onde começar, por $(p \wedge q)$ ou por $(q \vee r)$. Em alguns casos, não faz diferença porque os dois resultados são iguais, como nos itens (i) e (j), os dois são verdadeiros. Mas nem sempre os dois conduzem ao mesmo valor. Um exemplo onde não são iguais é:

s	t	u	$(s \wedge t) \vee u$	$s \wedge (t \vee u)$
F	V	V	V	F

É interessante comparar com as regras das operações soma e multiplicação de números naturais, inteiros, racionais ou reais. Por exemplo $2 \cdot 3 + 4 = 6 + 4 = 10$. Aqui, não tivemos dúvida por onde começar porque existe uma regra que diz que multiplicações são prioritárias, isto é, devemos começar sempre pela multiplicação.

Não existe uma regra análoga para os conectivos $\wedge$ e $\vee$.

Assim, quando quisermos usar os conectivos $\wedge$ e $\vee$ com três ou mais afirmações será preciso colocar os parênteses para indicar por onde começar.

3. (a) David pesa $50\,kg$ ou menos de $50\,kg$ ou mede $1,55m$ ou mais de $1,55m$.
   (b) $x^2 \leq 3$ ou $x^2 + 4x + 3 > 0$
   (c) a é tal que (i) $a \leq 10$ e (i) $a \geq 5$

4. (a) Verdadeiro. Uma justificativa é: existe sim, $a = 6$ é um número natural, $6 < 10$ e $6 > 5$.
   (é claro que tem outras justificativas, basta substituir 6 por 7, 8 ou 9)
   (b) Falso. Justificativa: $a \in \mathbb{N}$ e $a < 10$ temos que $a \in A = \{1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Mas $a > 9$ temos que $a \in B = \{10, 11, 12, \ldots\}$. Como A e B não têm nenhum elemento em comum, não existe a pertencente simultaneamente aos dois conjuntos A e B.
   (c) Verdadeiro. Na justificativa serão citadas as propriedades do enunciado do exercício.
   $\forall x \in \mathbb{R} \overset{(P1)}{\Longrightarrow} x + 1 \in \mathbb{R} \overset{(P2)}{\Longrightarrow} (x+1)^2 \geq 0$
   $\forall x \in \mathbb{R} \overset{(P2)}{\Longrightarrow} x^2 \geq 0 \overset{(P3)}{\Longrightarrow} 4x^2 \geq 0$
   $(x+1)^2 \geq 0$ e $4x^2 \geq 0 \overset{(P4)}{\Longrightarrow} (x+1)^2 + 4x^2 \geq 0.$
   (d) Falso.
   Contra-exemplo: quando $x = 2$ temos que $(2+1)^2 - 4(2)^2 = 3^2 - 4 \cdot 4 = 9 - 16 = -7 < 0.$

(e) Verdadeiro. Existe, por exemplo $a = 3$ e $b = 5$, temos que $3 \cdot 5 = 15$ é ímpar, isto é, não é par. Na verdade, qualquer exemplo com a e b ímpares, o produto ab será ímpar, porque?

(f) Falso. Para justificar vamos provar que a seguinte afirmação é verdadeira: $\forall a \in \mathbb{Z}$, se a é par então a^2 é par, isto é, $\nexists a \in \mathbb{Z}; a$ é par e a^2 é ímpar.

Provando: a é par, então $a = 2k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Logo $a^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$, donde conclui-se que a^2 é par (pois é um múltiplo de 2).

5. (a) Não existe um número natural a tal que $a < 10$ e $a > 5$.
Outra resposta possível: Todo número natural é tal que $a \geq 10$ ou $a \leq 5$.
(b) Não existe um número natural a tal que $a < 10$ e $a > 9$.
Outra resposta possível: Todo número natural a é tal que $a \geq 10$ ou $a \leq 9$.
(c) $\exists x \in \mathbb{R}; \quad (x+1)^2 + 4(x^2) < 0$.
(d) $\exists x \in \mathbb{R}; \quad (x+1)^2 - 4(x^2) < 0$.
(e) $\nexists\, a, b \in \mathbb{Z}$; o produto ab não é par. Outra resposta: $\forall\, a, b \in \mathbb{Z}$; o produto ab é par.
(f) $\nexists a \in \mathbb{Z}$; a é par e a^2 é ímpar. Outra resposta: $\forall a \in \mathbb{Z}$; a é ímpar ou a^2 é par.

6. (a) $\forall a \in \mathbb{R}, \quad a \cdot 0 = 0$.
(b) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a > 0$ e $b > 0$ temos $a \cdot b > 0$.
(c) $\exists n \in \mathbb{R}; \quad n^2$ é um número primo.
(d) $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que x é solução da equação $x^3 - 3x^2 + 3x + 2 = 1$.
(e) Para toda equação polinomial de grau ímpar $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que x é solução dessa equação.

7. (a) $a, b \in \mathbb{Z}$; a e b consecutivos $\Longrightarrow$ (a é par e b é ímpar) ou (a é ímpar e b é par).
(b) $a, b, c \in \mathbb{Z}$; a, b, c são consecutivos $\Longrightarrow (a + b + c)$ é múltiplo de 3.
(c) Dado $a \in \mathbb{Z}$, a é par $\Longleftrightarrow a + 1$ é ímpar.
(d) $a, b \in \mathbb{R}$; $a < 0$ e $b < 0 \Longrightarrow a \cdot b > 0$.
(e) $a, b \in \mathbb{R}$; $a < 0$ e $b < 0 \Longrightarrow a \cdot b > 0$.
(f) Definição (divisor)
Dados $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$, diz-se que b é divisor de $a \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}; \; a = kb$.
(g) $\forall a \in \{x \in \mathbb{R}; x > 1 \;\} \Longrightarrow \dfrac{1}{1 - a^2} < 1$.
(h) (média = nota final $\geq 6,0$ (seis)) e (frequência mínima na disciplina é de 75%) $\Longrightarrow$ o aluno da UFF é aprovado em uma disciplina.
(i) (média = nota final $\geq 4,0$ (quatro)) e (nota da VS $\geq 6,0$ (seis)) e (frequência mínima na disciplina é de 75%) $\Longrightarrow$ o aluno da UFF é aprovado em uma disciplina.
(j) frequência do aluno $< 75\% \Longrightarrow$ o aluno é reprovado em disciplina da UFF.
Outra resposta: aluno aprovado em disciplina da UFF $\Longrightarrow$ frequência $\geq 75\%$.

8. Não poderia ter aplicado a propriedade porque neste caso a hipórese ($a < b$) da propriedade é falsa, isto é, $-5 < -7$ é falsa.

9. Nada se pode concluir sobre a tese quando a hipótese é falsa, isto é, quando a hipótese é falsa, a tese tanto pode resultar verdadeira, quanto pode resultar falsa.