Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 2 - 2011-1

Números reais:
propriedades algébricas
propriedades de ordem

1. Nas afirmações a seguir considere $x, y \in \mathbb{R}$. **Essas afirmações são falsas**. Para cada uma apresente um exemplo em que a implicação não se verifica, isto é, um **contra-exemplo** que justifica a implicação ser falsa.

   (a) $3x(x^2-1) = 6x^2 \Longrightarrow x^2 - 1 = 2x$
   (b) $(x-1)^2 = (2x-3)^2 \Longrightarrow x = 1$
   (c) $xy^2 > x(y+1) \Longrightarrow y^2 > y+1$
   (d) $\dfrac{x^2-1}{5x+7} < 0 \Longrightarrow x^2 - 1 < 0$
   (e) $\dfrac{x-1}{x-2} > \dfrac{4}{x-2} \Longrightarrow x - 1 > 4$

2. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Diga se as implicações ou as equivalências a seguir são verdadeiras ou se são falsas. Para as verdadeiras, redija uma justificativa. Para as falsas, apresente um contra-exemplo.

   (a) $x^5 > 0 \Longleftrightarrow x > 0$.
   (b) $x^6 = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
   (c) $x > 2 \Longrightarrow x \geq 3$.
   (d) $x + y > 0 \Longrightarrow x > 0$ e $y > 0$.
   (e) $x - y > 0 \Longrightarrow x > 0$.
   (f) $xy > 0 \Longrightarrow x > 0$ e $y > 0$.
   (g) $xy^2 > 0 \Longrightarrow x > 0$.
   (h) $x^2y < 0 \Longrightarrow y < 0$.
   (i) $x^2y > 0 \Longrightarrow x, y > 0$.
   (j) $x^3y^5 < 0 \Longrightarrow x > 0$ e $y < 0$.
   (k) $x^2y \leq 0 \Longrightarrow y < 0$.
   (l) $xy \geq 0 \Longrightarrow x, y \geq 0$ ou $x, y \leq 0$.
   (m) $x^{218} \geq 0 \Longrightarrow x \geq 0$.
   (n) $x \in \{3\} \Longrightarrow x \in \{3, \pi\}$.
   (o) $x = 3 \Longrightarrow x = 3$ ou $x = \pi$.

3. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Diga quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras. Para as falsas, apresente um contra-exemplo. Para as verdadeiras, redija justificativas para sua resposta e diga se a recíproca é verdadeira.

   (a) $a^5 < 0 \Longrightarrow a < 0$.
   (b) $a > 2 \Longrightarrow a \geq 2$.
   (c) $a^{111} \geq 0 \Longrightarrow a \geq 0$.
   (d) $a^2 = b^2 \Longrightarrow a = b$.
   (e) $a^3 = b^3 \Longrightarrow a = b$.
   (f) $a^4 = 16b^4 \Longrightarrow a = 2b$ ou $a = -2b$.
   (g) $a^2 + b^2 = 0 \Longrightarrow a = 0 = b$
   (h) $a^{218} \geq 0 \Longrightarrow a \geq 0$.
   (i) $a + b > 0 \Longrightarrow a > 0$ ou $b > 0$.

4. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Diga quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras. Redija justificativas para suas respostas.

   (a) $a > 0 \Longleftrightarrow a^2 > 0$.
   (b) $a < 0 \Longleftrightarrow a^3 < 0$.
   (c) $a^5 > 0 \Longleftrightarrow a > 0$.
   (d) $a^6 = 0 \Longleftrightarrow a = 0$.
   (e) $a \geq 2 \Longrightarrow a > 2$.
   (f) $a^2 - b^2 = 0 \Longleftrightarrow a^2 = b^2$.
   (g) $a^2 = b^2 \Longleftrightarrow a^4 = b^4$.
   (h) $a^2 > b^2 \Longrightarrow a > b$.
   (i) $a^3 > b^3 \Longrightarrow a > b$.
   (j) $a^2 + b^2 = 0 \Longleftrightarrow a = 0 = b$
   (k) $a^3 + b^3 = 0 \Longleftrightarrow a = 0 = b$
   (l) $a^2 = b^2 \Longrightarrow a^3 = b^3$
   (m) $a^3 = b^3 \Longrightarrow a^2 = b^2$
   (n) $a^2 = b^2 \Longrightarrow (a+1)^2 = (b+1)^2$
   (o) $a^4 + b^4 = 0 \Longleftrightarrow a = 0 = b$
   (p) $a^3 + b^4 = 0 \Longrightarrow a < 0$
   (q) $a^3 + b^4 = 0 \Longrightarrow a \leq 0$
   (r) $a^3 + b^4 = 0 \Longleftrightarrow a \leq 0$
   (s) $a^2 + b^4 = 0 \Longleftrightarrow a = 0 = b$

5. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Diga quais das afirmações a seguir são falsas e quais são verdadeiras. Redija justificativas para suas respostas.

   (a) $\forall a \neq 0$, temos que: $\dfrac{1}{a} < b \iff ab > 1$

   (b) $\forall b \neq 0$, temos que: $\dfrac{1}{b^2} < a \iff ab^2 > 1$

   (c) $\forall b < 0$, temos que: $\dfrac{1}{b^3} < a \iff ab^3 < 1$

   (d) $\dfrac{1}{a^2 + b^2} \geq 0 \quad \forall a \neq 0 \text{ e } b \neq 0.$

   (e) $\dfrac{1}{a^2 + b^2} > 0 \quad \forall a \neq 0 \text{ e } b \neq 0.$

   (f) $a > b \Longrightarrow \dfrac{1}{a^2 - b^2} \geq 0$

   (g) $a > b > 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{a^2 - b^2} \geq 0$

   (h) $\forall a \neq 0, b \neq 0$, temos $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b} \Longrightarrow b < a$

   (i) $\forall a > 0, b > 0$, temos $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b} \Longrightarrow b < a$

   (j) $\forall a > 0, b < 0$, temos $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b} \iff b < a$

6. Dê dois exemplos de afirmações cuja implicação é verdadeira e a recíproca é falsa.

7. Encontre o maior subconjunto dos reais em que cada identidade é verdadeira. Verifique que, de fato, a identidade é verdadeira nesse subconjunto.

   (a) $\dfrac{\dfrac{2}{x-2} - \dfrac{1}{x^2-1}}{\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2x-2}{x-2}} = \dfrac{1}{1-x}$

   (b) $\dfrac{x^5 - 1}{x^4 - 1} = \dfrac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$

8. Considere $x \in \mathbb{R}$, encontre o domínio(*) de cada equação ou inequação abaixo e resolva-a. Em qualquer resolução pense sempre na propriedade que está usando para resolver.

   (*) O domínio de uma equação ou inequação são todos os valores de x em que é possível calcular qualquer expressão contida na equação ou inequação.

   (a) $\left(x^3 - x\right)\left(32 + x^5\right) = 0$

   (b) $(x-1)(x+2) = 4$

   (c) $(x-1)^2(x^2 + 4x) = x^2 - x$

   (d) $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{x(x-1)}$

   (e) $x^2 + 4x + 5 > 0$

   (f) $x^3 - x^2 \geq x(x-1)$

   (g) $\dfrac{\dfrac{2}{x-2} - \dfrac{1}{x^2-1}}{\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2x-2}{x-2}} \geq 0$

   (h) $\dfrac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1} < 0$

9. Considere $x \in \mathbb{R}$ e analise o sinal(*) das expressões:

   (a) $E(x) = \dfrac{\left(x^2 + 4x + 5\right)\left(x^2 + 4x - 3\right)^3}{(4 - 15x)(2 - 9x)^2}$

   (b) $E(x) = \dfrac{4}{x-2} - \dfrac{8}{x-1}$

   (c) $E(x) = \dfrac{x}{(2x-1)^2} - \dfrac{3}{4x^2 - 1}$

   (d) $E(x) = 4 - x - \dfrac{1}{x-2}$

   (*) Lembre que analisar o sinal de uma expressão significa:

   - Encontrar o(s) intervalo(s) onde a expressão $E(x)$ pode ser calculada.
   - Encontrar o(s) valores de x onde a expressão $E(x) = 0$.
   - Encontrar o(s) intervalo(s) onde a expressão $E(x) > 0$.
   - Encontrar o(s) intervalo(s) onde a expressão $E(x) < 0$.