RESPOSTAS DA LISTA 2 - Números reais: propriedades algébricas e de ordem

Para facilitar a consulta, repetimos aqui os axiomas e as propriedades algébricas e de ordem listadas em aula. À medida que as propriedades forem usadas, será citada a numeração, é claro que não há necessidade de memorizar a numeração das propriedades.

Para $\forall\ a,b,c \in \mathbb{R}$ admitem-se verdadeiros os axiomas algébricos descritos a seguir.

	Axiomas da Soma	Axiomas do Produto
Lei do fechamento	$AS1:\ a+b\in\mathbb{R}$	$AP1:\ a\times b\in\mathbb{R}$
Lei associativa	$AS2:\ (a+b)+c=a+(b+c)$	$AP2:\ (a\times b)\times c=a\times(b\times c)$
Lei comutativa	$AS3:\ a+b=b+a$	$AP3:\ a\times b=b\times a$
Lei do elemento neutro	$AS4:\ \exists\ \ 0\in\mathbb{R};\ \ a+0=a$	$AP4:\ \exists\ \ 1\in\mathbb{R};\ \ a\times 1=a$
Lei do elemento simétrico	$AS5:\ \forall a,\ \ \exists\ -a\in\mathbb{R};\ \ a+(-a)=0$	$(diz-se:\ \ -a$ é o simétrico de $a)$
Lei do elemento inverso	$AP5:\ \forall a\neq 0,\ \exists\ \dfrac{1}{a}\in\mathbb{R};\ \ a\times\dfrac{1}{a}=1$	$(diz-se:\ \dfrac{1}{a}$ é o inverso de $a)$
	Axioma da Soma e Produto	
Lei distributiva	$ASP:\ a\times(b+c)=a\times b+a\times c$	

Propriedade PA 1 ***A igualdade não se altera quando soma-se ou multiplica-se o mesmo número nos dois lados da igualdade.***

Sejam $a,b,c\in\mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades:

i) $a=b\Longrightarrow a+c=b+c$ (preservação da igualdade na soma)

ii) $a=b\Longrightarrow a\cdot c=b\cdot c$ (preservação da igualdade no produto)

Propriedade PA 2 ***Unicidade do elemento neutro da soma***

Primeira propriedade de unicidade do 0:

Só existe um número real que satisfaz o axioma de existência de elemento neutro da soma.

Escrita em símbolos: O único elemento $b\in\mathbb{R}$ que satisfaz $a+b=a,\forall a\in\mathbb{R}$ é o elemento 0.

Segunda propriedade da unicidade do 0:

$a+b=a$ para algum $a\in\mathbb{R}\ \Longrightarrow\ b=0$.

Propriedade PA 3 ***Unicidade do elemento neutro do produto***

Primeira propriedade da unicidade do 1:

Só existe um número real que satisfaz o axioma de existência de elemento neutro do produto.

Escrita em símbolos: o único elemento $b\in\mathbb{R}, b\neq 0$ que satisfaz $a\cdot b=a,\forall a\in\mathbb{R}$ é o elemento 1.

Segunda propriedade da unicidade do 1:

$a\cdot b=a$, para algum $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0\ \Longrightarrow\ b=1$

Propriedade PA 4 $0+a=a,\ \ \forall a\in\mathbb{R}$.

Propriedade PA 5 $1\cdot a=a,\ \ \forall a\in\mathbb{R}$.

Propriedade PA 6 ***Unicidade do elemento simétrico***

Enunciado: Só existe um número real que satisfaz o axioma de existência de elemento simétrico.

Propriedade PA 7 ***Unicidade do elemento inverso***

Enunciado: Só existe um número real que satisfaz o axioma de existência de elemento inverso.

Propriedade PA 8 $-a+a=0,\ \ \forall a\in\mathbb{R}$.

Propriedade PA 9 $\dfrac{1}{a}\cdot a=1,\ \ \forall a\in\mathbb{R}\ e\ a\neq 0$.

Propriedade PA 10 $-(-a)=a,\ \ \forall a\in\mathbb{R}$ (leia-se: a é o simétrico de $-a$).

Propriedade PA 11 $\dfrac{1}{\frac{1}{a}}=a,\ \ \forall a\in\mathbb{R}\ e\ a\neq 0$ $\left(\text{leia-se: } a \text{ é o inverso de } \dfrac{1}{a}\right)$.

Propriedade PA 12 $(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a,\ \ \forall a,b,c\in\mathbb{R}$.

Propriedade PA 13 $a\cdot 0=0=0\cdot a,\ \ \forall a\in\mathbb{R}$.

Propriedade PA 14 $(-1)\cdot a=-a=a\cdot(-1),\ \ \forall a\in\mathbb{R}$.

Propriedade PA 15 $-(a\cdot b)=(-a)\cdot b=a\cdot(-b),\ \ \forall a,b\in\mathbb{R}$.

Propriedade PA 16 $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b,\ \ \forall a,b\in\mathbb{R}$.

Propriedade PA 17 $\dfrac{ab}{c}=a\dfrac{b}{c}=\dfrac{a}{c}b,\ \forall a,b,c\in\mathbb{R},\ c\neq 0$.

Propriedade PA 18 $-\dfrac{1}{a}=\dfrac{-1}{a}=\dfrac{1}{-a},\ \ \forall a\in\mathbb{R},\ \ a\neq 0$.

Propriedade PA 19 $\dfrac{1}{ab}=\dfrac{1}{a}\dfrac{1}{b},\ \ \forall a,b\in\mathbb{R},\ \ a\neq 0,\ \ b\neq 0$.

Propriedade PA 20 $\dfrac{ab}{cd}=\dfrac{a}{c}\dfrac{b}{d},\ \forall a,b,c,d\in\mathbb{R},\ c,\ d\neq 0$.

Propriedade PA 21 $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c},\ \ \forall a,b,c\in\mathbb{R},\ \ c\neq 0$.

Propriedade PA 22 $-(a+b)=-a-b,\ \ \ \forall a,b\in\mathbb{R}$.

Propriedade PA 23 $-\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{-a-b}{c},\ \forall a,b,c\in\mathbb{R},\ c\neq 0$.

Propriedade PA 24 $\dfrac{1}{\frac{a}{b}}=\dfrac{b}{a},\ \ \ \forall a,b\in\mathbb{R},\ \ a,b\neq 0$.

Propriedade PA 25 $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{a}{b}\,\dfrac{d}{c},$ $\forall a,b,c,d\in\mathbb{R},\ b,c,d\neq 0$.

Propriedade PA 26 ***Leis de cancelamento da soma e do produto (implicações)***

Sejam $a,b,c\in\mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades:

i) $a+c=b+c\Longrightarrow a=b$ (é a recíproca da preservação na soma)

ii) $a\cdot c=b\cdot c$ e $c\neq 0\Longrightarrow a=b$ (<u>não é</u> a recíproca da preservação no produto)

Propriedade PA 27 ***Lei de cancelamento da soma (equivalência)***

Sejam $a,b,c\in\mathbb{R}$. Temos que: $a=b\Longleftrightarrow a+c=b+c$.

Propriedade PA 28 ***Lei de cancelamento do produto (equivalência)***

Sejam $a,b,c\in\mathbb{R}$, $c\neq 0$. Temos que: $a=b\Longleftrightarrow a\cdot c=b\cdot c$.

Propriedade PA 29 ***Lei do anulamento do produto***

Para $a,b\in\mathbb{R}$, temos que: $a\cdot b=0\Longleftrightarrow a=0$ ou $b=0$.

Propriedade PA 30 Para $a,b\in\mathbb{R}$ vale a seguinte equivalência: $a\cdot c=b\cdot c\Longleftrightarrow a=b$ ou $c=0$.

Propriedade PA 31 ***Teste da igualdade de frações.***

Para $a,b,c,d\in\mathbb{R}, b,d\neq 0$, temos que: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Longleftrightarrow ad=bc$.

Propriedade PA 32 ***Simplificações em somas de frações (redução ao mesmo denominador).***

Para $a,b,c,d,p,q\in\mathbb{R}$, $b,d,p,q\neq 0$, valem as seguintes igualdades:

i) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad}{bd}+\dfrac{bc}{bd}=\dfrac{ad+bc}{bd}$

ii) $\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad}{bd}-\dfrac{bc}{bd}=\dfrac{ad-bc}{bd}$

iii) Quando m=bp=dq, $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ap}{bp}+\dfrac{cq}{dq}=\dfrac{ap+cq}{m}$

Propriedade PA 33 ***Principais produtos notáveis.***

Sejam $a,b\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$. Valem as seguintes igualdades.

i) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

ii) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

iii) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

iv) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

v) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

vi) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

vii) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

viii) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

Axioma da ordem 1. Dado $a \in \mathbb{R}$, uma e só uma das três possibilidades é verdadeira:
(i) a é positivo (ii) $a = 0$ (iii) $-a$ é positivo
Conhecido como ″propriedade de tricotomia da ordem″. Quando $-a$ é positivo, diz-se que a é negativo.

Axioma da ordem 2. Dados $a,\ b \in \mathbb{R}$ vale as afirmação: a é positivo e b é positivo $\implies$ $a+b$ é positivo e $a \cdot b$ é positivo.

Propriedade PO 1 Dado $a \in \mathbb{R}$, uma e só uma das três possibilidades é verdadeira: (i) $a > 0$ (ii) $a = 0$ (iii) $a < 0$
Também é conhecida por ″tricotomia da ordem″.

Propriedade PO 2 Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, vale a implicação: $a < b \Longrightarrow a + c < b + c$.
Conhecida como ″propriedade de monotonicidade da adição″ ou ″lei de preservação da ordem na adição″.

Propriedade PO 3 Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $c > 0$, vale a implicação: $a < b \Longrightarrow a \cdot c < b \cdot c$.
Conhecida como ″propriedade de monotonicidade do produto″ ou ″lei de preservação da ordem no produto″.

Propriedade PO 4 Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $c < 0$, vale a implicação: $a < b \Longrightarrow a \cdot c > b \cdot c$.
Conhecida como ″lei de inversão da ordem no produto″.

Propriedade PO 5 Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, vale a implicação: $a < b$ e $b < c \Longrightarrow a < c$.
Conhecida como ″propriedade transitiva da ordem″.

Propriedade PO 6 Dados $a, b \in \mathbb{R}$, uma e só uma das possibilidades é verdadeira: (i) $a < b$ (ii) $a = b$ (iii) $a > b$

Propriedade PO 7 Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, vale a equivalência: $a < b \Longleftrightarrow a + c < b + c$.

Propriedade PO 8 Dado $a \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$, valem as equivalências: (i) $a > 0 \Longleftrightarrow \dfrac{1}{a} > 0$ (ii) $a < 0 \Longleftrightarrow \dfrac{1}{a} < 0$

Propriedade PO 9 Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, vale a equivalência: $a < b \Longleftrightarrow ac < bc$.

Propriedade PO 10 Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c < 0$, vale a equivalência: $a < b \Longleftrightarrow ac > bc$.

Propriedade PO 11 Dados $a, b \in \mathbb{R}$, valem as equivalências:
(i) $a < 0 \Longleftrightarrow -a > 0$ (ii) $a > 0 \Longleftrightarrow -a < 0$ (iii) $a < b \Longleftrightarrow -a > -b$ (iv) $a > b \Longleftrightarrow -a < -b$.

Propriedade PO 12 Dados $a, b \in \mathbb{R}$, valem as equivalências:
(i) $ab > 0 \Longleftrightarrow (a > 0 \text{ e } b > 0)$ ou $(a < 0 \text{ e } b < 0)$ (ii) $ab < 0 \Longleftrightarrow (a > 0 \text{ e } b < 0)$ ou $(a < 0 \text{ e } b > 0)$

Propriedade PO 13 Dado $a \in \mathbb{R}$, vale a implicação: $a > 0 \Longrightarrow a^2 > 0$.
Outra forma de escrever essa propriedade é: para todo $a \in \mathbb{R}$; $a > 0$ temos que $a^2 > 0$.

Propriedade PO 14 Dado $a \in \mathbb{R}$, <u>não vale a recíproca</u> da propriedade anterior, isto é, $a^2 > 0 \not\Longrightarrow a > 0$.

Propriedade PO 15 Dado $a \in \mathbb{R}$, vale a implicação: $a < 0 \Longrightarrow a^2 > 0$.
Outra forma de escrever essa propriedade é: para todo $a \in \mathbb{R}$; $a < 0$ temos que $a^2 > 0$.

Propriedade PO 16 Dado $a \in \mathbb{R}$, vale a equivalência: $a \neq 0 \Longleftrightarrow a^2 > 0$.

Propriedade PO 17 Dado $a \in \mathbb{R}$, valem as equivalências: (i) $a > 0 \Longleftrightarrow a^3 > 0$ (ii) $a < 0 \Longleftrightarrow a^3 < 0$.

Propriedade PO 18 Vale a seguinte implicação: $a \in \mathbb{R} \Longrightarrow a^2 \geq 0$.

Respostas, com resolução. Cada questão pode ter muitas resoluções, pois podemos escolher propriedades diferentes em cada resolução.

1. (a) Contra-exemplo: $x = 0$.

   Testando a igualdade da hipótese, $3x\left(x^2 - 1\right) = 0 \cdot (-1) = 0$ e $6x^2 = 6 \cdot 0 = 0$

   Logo, neste exemplo a hipótese é verdadeira, isto é, $3x\left(x^2 - 1\right) = 6x^2$ é verdadeira quando $x = 0$.

   Testando a igualdade na tese, $x^2 - 1 = 0 - 1 = -1$ e $2x = 2 \cdot 0 = 0$.

   Logo nesse exemplo a tese é falsa, isto é, a igualdade $x^2 - 1 = 2x$ é falsa quando $x = 0$.

   Logo, para $x = 0$, a hipótese é verdadeira e a tese é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

   (b) Contra-exemplo: $x = 2$.

   Testando a primeira igualdade $(2-1)^2 = 1^2 = 1$ e $(2 \cdot 2 - 3)^2 = (4-3)^2 = 1^2 = 1$.

   Logo a igualdade $(x-1)^2 = (2x-3)^2$ é verdadeira para $x = 2$.

   Testando a segunda igualdade, $2 \neq 1$, logo a igualdade $x = 1$ é falsa quando $x = 2$.

   Logo, para $x = 2$, a hipótese é verdadeira e a tese é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

   (c) Contra-exemplo $x = -1$ e $y = 1$.

   Testando na primeira desigualdade: $-1\,(1)^2 = -\dfrac{1}{1} = -1$ e $-1(1+1) = -2$.

   $-1 > -2 \iff 1 < 2$, verdadeira, logo a primeira desigualdade é verdadeira nesse exemplo.

   Testando na segunda desigualdade: $(1)^2 = 1$ e $1 + 1 = 2$.

   Como $1 < 2$, a segunda desigualdade é falsa nesse exemplo.

   Logo, nesse exemplo, a hipótese (primeira desigualdade) é verdadeira e a tese (segunda desigualdade) é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

   (d) Contra-exemplo: $x = -2$.

   Testando na primeira desigualdade, $\dfrac{x^2-1}{5x+7} = \dfrac{4-1}{-10+7} = \dfrac{3}{-3} = -1 < 0$.

   Logo a hipótese é verdadeira para $x = -2$.

   Testando na segunda desigualdade, $x^2 - 1 = 4 - 1 > 0$.

   Logo a tese é falsa para $x = -2$.

   Logo, nesse exemplo, a hipótese (primeira desigualdade) é verdadeira e a tese (segunda desigualdade) é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

   (e) Contra-exemplo: $x = 0$.

   Testando na hipótese, $\dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{0-1}{0-2} = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{4}{x-2} = \dfrac{4}{0-2} = -2$.

   Como $\dfrac{1}{2} > -2$, concluímos que a hipótese é verdadeira para $x = -2$.

   Testando a tese, $x - 1 = -2 - 1 = -3$. Como $-3 < 4$, a tese $x - 1 > 4$ é falsa quando $x = -2$.

   Logo, nesse exemplo, a hipótese (primeira desigualdade) é verdadeira e a tese (segunda desigualdade) é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

2. Em todos os item $x, y \in R$.

   (a) <u>Verdadeiro</u>. Sabemos que $x^5 \overset{\text{potência}}{=} xxxxx \overset{\text{potência e AP1}}{=} x^2 \cdot x^3$. $(*)$

   $(\Longleftarrow)$ $x > 0 \overset{\text{PO 13 e PO17}}{\Longrightarrow} x^2 > 0$ e $x^3 > 0 \overset{\text{axioma de ordem 2}}{\Longrightarrow} x^2 \cdot x^3 > 0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} x^5 > 0$.

   $(\Longleftarrow)$ $x^5 > 0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} x^2 \cdot x^3 > 0 \overset{\text{axioma da ordem 1}}{\Longrightarrow} x^2 \cdot x^3 \neq 0 \overset{\text{PA 29}}{\Longrightarrow} x^2 \neq 0$ e $x^3 \neq 0 \overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} x^2 \neq 0$

   Por outro lado, por PO 18, $x^2 < 0$ é falso $\forall x \in \mathbb{R}$. Logo, por lógica, $\left(x^2 < 0 \text{ e } x^3 < 0\right)$ é falso . $(**)$.

   Voltando, $x^5 > 0 \Longrightarrow \left(x^2 > 0 \text{ e } x^3 > 0\right)$ ou $\left(x^2 < 0 \text{ e } x^3 < 0\right) \overset{\text{Lógica e }(**)}{\Longrightarrow} x^2 > 0$ e $x^3 > 0 \overset{\text{PA 18}}{\Longrightarrow}$ $x^2 > 0$ e $x > 0 \overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} x > 0$.

   (b) <u>Verdadeira</u>. Sabemos que $x^6 \overset{\text{potência}}{=} xxxxxx \overset{\text{potência e AP1}}{=} x^2 \cdot x^2 \cdot x^2$. $(*)$.

   $x = 0 \overset{\text{lógica}}{\Longleftrightarrow} x = 0$ e $x = 0 \overset{\text{PA 29}}{\Longleftrightarrow} x^2 = 0 \overset{\text{lógica}}{\Longleftrightarrow} x^2 = 0$ e $x^2 = 0 \overset{\text{lógica e PA 29}}{\Longleftrightarrow} x^2 \cdot x^2 = 0$ e $x^2 = 0 \overset{\text{PA 29}}{\Longleftrightarrow}$ $x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 = 0 \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} x^6 = 0$.

   (c) Falsa. Contra-exemplo: $x = 2,1$.

   Testando na primeira desigualdade: $x = 2,1$ e $2,1 > 2 \overset{\text{x no lugar do 2,1}}{\Longrightarrow} x > 2$ é verdadeira.

   Testando na segunda desigualdade: $x = 2,1$ e $2,1 < 3 \overset{\text{x no lugar do 2,1}}{\Longrightarrow} x < 3 \overset{\text{PO 6}}{\Longrightarrow} x \geq 3$ é falsa.

   Logo, nesse exemplo, a hipótese (primeira desigualdade) é verdadeira e a tese (segunda desigualdade) é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

(d) Falsa. Contra-exemplo: $x = 0; \quad y = 1$.
Testando na primeira desigualdade: $x + y = 0 + 1$ e $0 + 1 = 1 > 0 \Longrightarrow x + y > 0$ é verdadeira.
Testando na segunda desigualdade: $x = 0 \overset{\text{axioma da ordem 1}}{\Longrightarrow} x > 0$ é falso $\overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} x > 0$ e $y > 0 \Longrightarrow$ é falso.
Logo, nesse exemplo, a hipótese (primeira desigualdade) é verdadeira e a tese (segunda desigualdade) é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

(e) Falsa. Contra-exemplo: $x = -1; \quad y = -2$.
Temos que $x - y = -1 - (-2) = -1 + 2 = 1$ e $1 > 0 \Longrightarrow x - y > 0$, logo a hipótese é verdadeira.
Também $x = -1$ e $-1 < 0 \Longrightarrow x < 0 \overset{\text{axioma da ordem 1}}{\Longrightarrow}$ a tese $x > 0$, é falsa.
Logo, nesse exemplo, a hipótese é verdadeira e a tese é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

(f) Falsa. Contra-exemplo: $x = -1; \quad y = -2$.
Hipótese verdadeira, pois $xy = (-1)(-2) = 2 > 0$.
$x = -1$ e $-1 < 0 \overset{\text{transitividade}}{\Longrightarrow} x < 0 \Longrightarrow x > 0$ é falsa $\overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} x > 0$ e $y > 0$ é falsa, isto é, a tese é falsa.
Logo, nesse exemplo, a hipótese é verdadeira e a tese é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

(g) Verdadeira. Justificativa. Sabemos que $y^2 < 0$ é falsa para todo $y \in \mathbb{R}$. $(*)$
$xy^2 > 0 \overset{\text{PO 12 i)}}{\Longrightarrow} \big(x > 0 \text{ e } y^2 > 0\big)$ ou $\big(x < 0 \text{ e } y^2 < 0\big) \overset{\text{lógica e (*)}}{\Longrightarrow} \big(x > 0 \text{ e } y^2 > 0\big) \overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} x > 0$.

(h) Verdadeira. Justificativa. Sabemos que $x^2 < 0$ é falsa para todo $y \in \mathbb{R}$. $(*)$
$x^2y < 0 \overset{\text{PO 12 ii)}}{\Longrightarrow} \big(x^2 > 0 \text{ e } y < 0\big)$ ou $\big(x^2 < 0 \text{ e } y > 0\big) \overset{\text{lógica e (*)}}{\Longrightarrow} \big(x^2 > 0 \text{ e } y < 0\big) \overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} y < 0$.

(i) Falsa. Contra-exemplo: $x = -1, \quad y = 1$.
$x^2y = (-1)^2 \cdot 1 = 1 > 0 \Longrightarrow$ a hipótese é verdadeira nesse exemplo.
$x = -1$ e $-1 < 0 \overset{\text{transitividade}}{\Longrightarrow} x < 0 \overset{\text{axioma da ordem 1}}{\Longrightarrow} x > 0$ é falsa $\overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow}$ a tese $x > 0$ e $y > 0$ é falsa.
Logo, nesse exemplo, a hipótese é verdadeira e a tese é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

(j) Falsa. Contra-exemplo: $x = -1, \quad y = 1$.
$x^3y^5 = (-1)^3(1)^5 = (-1)(1) = -1$ e $-1 < 0 \overset{\text{transitividade}}{\Longrightarrow} x^3y^5 < 0$, a hipórese é verdadeira nesse exemplo.
$x = -1$ e $-1 < 0 \overset{\text{transitividade}}{\Longrightarrow} x < 0 \overset{\text{axioma da ordem 1}}{\Longrightarrow} x > 0$ é falsa $\overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow}$ a tese $x > 0$ e $y < 0$ é falsa.
Logo, nesse exemplo, a hipótese é verdadeira e a tese é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

(k) Falsa. Contra-exemplo: $x = 1$ e $y - 0$.
$x^2y = 1^2 \cdot 0 = 0 \overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} x^2y \geq 0 \Longrightarrow$ hipótese verdadeira.
$y = 0 \overset{\text{axioma da ordem 1}}{\Longrightarrow}$ a tese $y < 0$ é falsa.
Logo, nesse exemplo, a hipótese é verdadeira e a tese é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

(l) Verdadeira. Prova:
$xy \geq 0$, pela lógica, temos dois casos admissíveis e distintos: (i) $xy = 0$ (ii) $xy > 0$.
(i) $xy = 0 \overset{\text{lei do anulamento}}{\Longrightarrow} x = 0$ ou $y = 0$. $(*)$
(ii) $xy > 0 \overset{\text{PO 12 i)}}{\Longrightarrow} x, y > 0$ ou $x, y < 0$. $(**)$
Logo, $xy \geq 0 \overset{\text{(*) e (**)}}{\Longrightarrow} x = 0$ ou $y = 0$ ou $x, y > 0$ ou $x, y < 0 \overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} x, y \geq 0$ ou $x, y \leq 0$.

(m) Falsa. Contra-exemplo: $x = -1$.
$$(-1)^{218} \overset{\text{potência natural}}{:=} \underbrace{(-1) \times (-1) \times (-1) \times \cdots \times (-1)}_{218 \text{ vezes}} \overset{\text{potência natural e AP2}}{:=} \underbrace{(-1)^2 \times (-1)^2 \times \cdots \times (-1)^2}_{109 \text{ vezes}}$$
$$\overset{\text{PA 16}}{=} \underbrace{1 \times 1 \times \cdots \times 1}_{109 \text{ vezes}} \overset{\text{AP2 e AP4}}{=} 1.$$
Logo, $x^{218} = (-1)^{218} = 1$ e $1 > 0 \overset{\text{transitividade}}{\Longrightarrow} x^{218} > 0 \overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} x^{218} \geq 0 \Longrightarrow$ hipótese verdadeira.
$x = -1$ e $-1 < 0 \overset{\text{transitividade}}{\Longrightarrow} x < 0 \Longrightarrow$ tese $x \geq 0$ falsa.
Logo, nesse exemplo, a hipótese é verdadeira e a tese é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

(n) Verdadeira. Prova:
$x \in \{3\} \overset{\text{definição do conectivo ou}}{\Longrightarrow} x \in \{3\}$ ou $x \in \{\pi\} \overset{\text{união}}{\Longrightarrow} x \in \{3\} \bigcup \{\pi\} \Longrightarrow x \in \{3, \ \pi\}$

(o) Verdadeira. Prova:
$x = 3 \overset{\text{definição do conectivo ou}}{\Longrightarrow} x = 3$ ou $x = \pi$.

3. Em todos os itens $a, b \in \mathbb{R}$.

   (a) Verdadeira. Prova: sabemos que $a^5 \overset{\text{potência}}{=} aaaaa \overset{\text{potência e AP1}}{=} a^2 \cdot a^3.$ $(*)$

   $(\Longrightarrow)\ a^5 < 0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} a^2 \cdot a^3 < 0 \overset{\text{axioma da ordem 1}}{\Longrightarrow} a^2 \cdot a^3 \neq 0 \overset{\text{PA 29}}{\Longrightarrow} a^2 \neq 0 \text{ e } a^3 \neq 0 \overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} a^2 \neq 0$

   Por outro lado, por PO 18, $a^2 < 0$ é falso $\forall a \in \mathbb{R}$. Logo, por lógica, $\left(a^2 < 0 \text{ e } a^3 > 0\right)$ é falso . $(**)$.

   Voltando, $a^5 < 0 \overset{\text{PO 12 ii)}}{\Longrightarrow} \left(a^2 > 0 \text{ e } a^3 < 0\right)$ ou $\left(a^2 < 0 \text{ e } a^3 > 0\right) \overset{\text{Lógica e (**)}}{\Longrightarrow} a^2 > 0 \text{ e } a^3 < 0 \overset{\text{PA 18}}{\Longrightarrow}$
   $a^2 > 0 \text{ e } a < 0 \overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} a < 0.$

   (b) Verdadeira. Prova: $a > 2 \overset{\text{conectivo lógico ou}}{\Longrightarrow} a > 2 \text{ ou } a = 2 \overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} a \geq 2.$

   (c) Verdadeira. Prova:

   $a^{111} \overset{\text{potência}}{:=} \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{111\text{ vezes}} = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{110\text{ vezes}} \times a \overset{\text{(AS2)}}{=} \underbrace{a^2 \times a^2 \times \cdots \times a^2}_{55\text{ vezes}} \times a \overset{\text{(potência)}}{=} a^{110} \times a$ $(*)$

   $a^{111} \geq 0 \overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow}$ (i) $a^{111} = 0$ ou (ii) $a^{111} > 0$. Logo,

   (i) $a^{111} = 0 \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{111\text{ vezes}} = 0 \overset{\text{lei do anulamento}}{\Longleftrightarrow} \underbrace{a = 0 \text{ ou } a = 0 \text{ ou } \cdots \text{ ou } a = 0}_{111\text{ vezes}} \overset{\text{lógica}}{\Longleftrightarrow} a = 0$ $(**)$

   (ii) $a^{111} > 0 \overset{\text{axioma da ordem 1}}{\Longrightarrow} a^{111} \neq 0 \overset{(**)}{\Longrightarrow} a \neq 0 \overset{\text{PO 16}}{\Longrightarrow} a^2 > 0 \overset{\text{PO 12 i)}}{\Longrightarrow} a^{110} = \underbrace{a^2 \times a^2 \times \cdots \times a^2}_{55\text{ vezes}} > 0$

   $\overset{\text{axioma da ordem 1}}{\Longrightarrow} a^{110} < 0$ é falsa $\overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} \left(a^{110} < 0 \text{ e } a < 0\right)$ é falsa $(***)$

   Por outro lado, $a^{111} = a^{110} \times a > 0 \overset{\text{PO 12 i)}}{\Longrightarrow} \left(a^{110} > 0 \text{ e } a > 0\right)$ ou $\left(a^{110} < 0 \text{ e } a < 0\right)$
   $\overset{(***)}{\Longrightarrow} a^{110} > 0 \text{ e } a > 0 \overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} a > 0 \overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} a \geq 0.$

   (d) Falsa. Contra-exemplo: $a = 1$ e $a = -1$.

   $a^2 = 1^2 = 1$ e $b^2 = (-1)^2 = 1 \Longrightarrow a^2 = b^2 \Longrightarrow$ hipótese verdadeira

   $a = 1,\ b = -1,\ -1 \neq 1 \Longrightarrow a \neq b \Longrightarrow$ tese falsa.

   Logo, nesse exemplo, a hipótese é verdadeira e a tese é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

   (e) Verdadeira. Prova: $a^3 = b^3 \overset{\text{(PA 27, AS5, AS4)}}{\Longleftrightarrow} a^3 - b^3 = 0 \overset{\text{(PA 36 vi))}}{\Longleftrightarrow} (a-b)(a^2 + ab + b^2) = 0 \overset{\text{lei do anulamento}}{\Longleftrightarrow}$
   $a - b = 0 \text{ ou } a^2 + ab + b^2 = 0 \overset{\text{(PA 27, AS5, AS4)}}{\Longleftrightarrow} a = b \text{ ou } a^2 + ab + b^2 = 0.$

   Para provar que $a = b$ ou $a^2 + ab + b^2 = 0 \Longrightarrow a = b$, precisaremos provar que $a^2 + ab + b^2 \neq 0\ \ \forall a, b \in \mathbb{R};\ a \neq b$.

   Prova de que $a^2 + ab + b^2 \neq 0\ \ \forall a, b \in \mathbb{R};\ \ a \neq b$:

   Vamos separar em todas as hipóteses admissíveis e distintas da posição relativa entre a e b tal que $a \neq b$.

   caso: $a < b < 0$

   $a < 0 \text{ e } b < 0 \overset{\text{(PO 12 e PO 15)}}{\Longrightarrow} a^2 > 0,\ ab > 0,\ b^2 > 0 \overset{\text{(axioma da ordem 2)}}{\Longrightarrow} a^2 + ab + b^2 > 0 \overset{\text{(axioma da ordem 1)}}{\Longrightarrow}$
   $a^2 + ab + b^2 \neq 0.$

   caso: $a < b = 0$

   $a < 0 \text{ e } b = 0 \overset{\text{(PO 15 e PA 12)}}{\Longrightarrow} a^2 > 0,\ ab = 0,\ b^2 = 0 \Longrightarrow a^2 + ab + b^2 = a^2 + 0 + 0 = a^2 > 0$
   $\overset{\text{(axioma da ordem 1)}}{\Longrightarrow} a^2 + ab + b^2 \neq 0.$

   caso: $a < 0 < b$

   $a < 0 \text{ e } b > 0 \overset{\text{(PO 12)}}{\Longrightarrow} ab < 0, \overset{\text{PO 8}}{\Longrightarrow} -ab > 0.$ $(*)$

   Por outro lado, $a^2 + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - ab \overset{\text{produto notável}}{=} (a+b)^2 - ab$ $(**)$

   Por PO 18 e por $(*)$, temos que $-ab > 0$ e $(a+b)^2 \geq 0 \overset{\text{(PO 7)}}{\Longrightarrow} (a+b)^2 + (-ab) > 0 + (a+b)^2 \geq 0$
   $\overset{\text{transitividade}}{\Longrightarrow} (a+b)^2 - ab > 0 \overset{(**)}{\Longrightarrow} a^2 + ab + b^2 > 0 \overset{\text{(axioma da ordem 1)}}{\Longrightarrow} a^2 + ab + b^2 \neq 0.$

   caso: $a = 0 < b$

   $a = 0 \text{ e } b > 0 \overset{\text{(PO 15 e PA 12)}}{\Longrightarrow} a^2 = 0,\ ab = 0,\ b^2 > 0 \Longrightarrow a^2 + ab + b^2 = 0 + 0 + b^2 = b^2 > 0$
   $\overset{\text{(axioma da ordem 1)}}{\Longrightarrow} a^2 + ab + b^2 \neq 0.$

   caso: $0 < a < b$

   $a > 0 \text{ e } b > 0 \overset{\text{(PO 12 e PO 15)}}{\Longrightarrow} a^2 > 0,\ ab > 0,\ b^2 > 0 \overset{\text{(axioma da ordem 2)}}{\Longrightarrow} a^2 + ab + b^2 > 0 \overset{\text{(axioma da ordem 1)}}{\Longrightarrow}$
   $a^2 + ab + b^2 \neq 0.$

   (f) Verdadeira. Prova: $a^4 = 16b^4 \overset{\text{(PA27, AS4, AS5)}}{\Longrightarrow} a^4 - b^4 = 0 \overset{\text{produto notável}}{\Longrightarrow} \left(a^2 - 4b^2\right)\left(a^2 + 4b^2\right) = 0$
   $\overset{\text{produto notável}}{\Longrightarrow} (a - 2b)(a + 2b)\left(a^2 + 4b^2\right) = 0 \overset{\text{lei do anulamento}}{\Longrightarrow} a - 2b = 0 \text{ ou } a + 2b = 0 \text{ ou } \left(a^2 + 4b^2\right) = 0$

$\overset{\text{(PA 27, AS5, AS4)}}{\Longrightarrow} a = 2b$ ou $a = -2b$ ou $a^2 + 4b^2 = 0$.

Para provar que $a = 2b$ ou $a = -2b$ ou $a^2 + 4b^2 = 0 \Longrightarrow a = 2b$ ou $a = -2b$

precisamos provar que $a^2 + 4b^2 = 0 \Longrightarrow a = 2b$ ou $a = -2b$

Primeiro vamos provar que $a^2 + 4b^2 = 0 \Longrightarrow a = 0$ e $b = 0$. Vamos provar a contra recíproca, isto é, $a \neq 0$ ou $b \neq 0 \Longrightarrow a^2 + 4b^2 \neq 0$. $(*)$

Vamos ver todos os casos admissíveis e distintos (são 3):

$\underline{\text{caso } a \neq 0 \text{ e } b = 0}$ $\overset{\text{(PO 16, PA12)}}{\Longrightarrow} a^2 > 0$ e $4b^2 = 0 \overset{\text{AS4}}{\Longrightarrow} a^2 + 4b^2 = a^2 + 0 = a^2 > 0 \overset{\text{axioma da ordem}}{\Longrightarrow} a^2 + 4b^2 \neq 0$.

$\underline{\text{caso } a = 0 \text{ e } b \neq 0}$ $\overset{\text{(PO 16, PA12)}}{\Longrightarrow} a^2 = 0$ e $4b^2 > 0 \overset{\text{AS4}}{\Longrightarrow} a^2 + 4b^2 = 0 + 4b^2 = 4b^2 > 0 \overset{\text{axioma da ordem}}{\Longrightarrow} a^2 + 4b^2 \neq 0$.

$\underline{\text{caso } a \neq 0 \text{ e } b \neq 0}$ $\overset{\text{PO 16}}{\Longrightarrow} a^2 > 0$ e $4b^2 > 0 \overset{\text{axioma da ordem 2}}{\Longrightarrow} a^2 + 4b^2 > 0 \overset{\text{axioma da ordem 1}}{\Longrightarrow} a^2 + 4b^2 \neq 0$.

Logo, $a^2 + 4b^2 = 0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} a = 0,\ b = 0 \overset{\text{PA 13}}{\Longrightarrow} a = 0,\ 2b = 0,\ -2b = 0 \overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} a = 2b,\ a = -2b \overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} a = 2b$ ou $a = -2b$

(g) Verdadeira. Prova:
Análogo ao que foi provado no exercício anterior, isto é análogo a $a^2 + 4a^2 = 0 \Longrightarrow a = b = 0$.

(h) Igual ao execício 19 (m).

(i) Verdadeira. Prova. Vamos analisar dois casos admissíveis e distintos para um dado $b \in \mathbb{R}$, (dessa forma só há dois casos) .

$\underline{\text{Caso } b > 0}$ $\overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} a > 0$ ou $b > 0$.

$\underline{\text{Caso } b \leq 0}$ $a + b > 0$ e $b \leq 0 \overset{\text{PO 11}}{\Longrightarrow} a + b > 0$ e $-b \geq 0 \overset{\text{PO 2}}{\Longrightarrow} a + b - b > 0 - b$ e $-b \geq 0$

$\overset{\text{AS5, AS4}}{\Longrightarrow} a > -b$ e $-b \geq 0 \overset{\text{transitividade}}{\Longrightarrow} a > 0 \overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} a > 0$ ou $b > 0$.

4. (a) Falsa. Não vale a recíproca. Contra-exemplo: $a = -1$.
$a = -1$ e $(-1)^2 = 1 \Longrightarrow a^2 > 1 \Longrightarrow$ hipótese verdadeira
$a = -1$ e $-1 < 0 \Longrightarrow a < 1 \Longrightarrow$ tese falsa.
Logo, nesse exemplo, a hipótese é verdadeira e a tese é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

(b) Verdadeira. Veja resposta do exercício 16(ii).

(c) Verdadeira. Igual ao exercício 19(a), trocando x por a.

(d) Verdadeira. Igual ao exercício 19(b), trocando x por a.

(e) Falsa. Ccontra-exemplo (único): $a = 2$.
A hipótese é verdadeira mas a tese é falsa, logo a implicação é falsa.

(f) Verdadeira. Prova: $a^2 - b^2 = 0 \Longleftrightarrow a^2 - b^2 + b^2 = 0 + b^2 \Longleftrightarrow a^2 = b^2$.

(g) Verdadeira. Prova:

Para $\boxed{a = 0}$.

$(\Longrightarrow)$:

$a = 0$ e $a^2 = b^2 \Longrightarrow a^2 = 0$ e $a^4 = 0$ e $a^2 = b^2 \Longrightarrow a^4 = 0$ e $b^2 = 0 \Longrightarrow a^4 = 0$ e $b^4 = (b^2)^2 = 0$
$\Longrightarrow a^4 = b^4 = 0 \Longrightarrow a^4 = b^4$ e $b = 0$.

$(\Longleftarrow)$:

$a = 0$ e $a^4 = b^4 \Longrightarrow a^4 = 0$ e $a^4 = b^4 \Longrightarrow a^4 = 0$ e $b^4 = 0 \Longrightarrow a^4 = (a^2)^2 = 0$ e $b^4 = (b^2)^2 = 0$
$\Longrightarrow a^2 = 0$ e $b^2 = 0 \Longrightarrow a^2 = b^2$ e $b = 0$.

Para $a = 0$, acabamos de provar que vale a equivalência e em qualquer caso, $a^4 = b^4$ ou $a^2 = b^2$, temos $b = 0$.
Logo em qualquer caso, $a^4 = b^4$ ou $a^2 = b^2$, só resta a possibilidade $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Para $\boxed{a \neq 0}$

$a^4 = b^4 \Longleftrightarrow a^4 - b^4 = 0 \overset{\texttt{produto notável}}{\Longleftrightarrow} (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = 0 \Longleftrightarrow (a^2 - b^2) = 0$ ou $(\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2) = 0 \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} a^2 - b^2 = 0$.

$\overset{(*)}{\Longleftrightarrow}$: $a \neq 0$ e $b \neq 0$, temos que $a^2 > 0$ e $b^2 > 0$, logo $a^2 + b^2 > 0$ e $a^2 + b^2 \neq 0$.

(h) Falsa. Contra-exemplo: $a = -3$ e $b = -2$.

(i) Verdadeira. Prova.
Supondo $b = 0$ e $a^3 > b^3$.
$b = 0$ e $a^3 > b^3 \Longrightarrow b^3 = 0$ e $a^3 > b^3 \Longrightarrow b^3 = 0$ e $a^3 > 0 \Longrightarrow b = 0$ e $a > 0 \Longrightarrow a > b$.
Supondo $b \neq 0$ e $a^3 > b^3$.
$b \neq 0$ e $a^3 > b^3 \Longrightarrow b \neq 0$ e $a^3 - b^3 > 0 \Longrightarrow b \neq 0$ e $(a - b)(a^2 + ab + b^2) > 0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} a - b > 0 \Longrightarrow a > b$.

$\overset{(*)}{\Longrightarrow}$: Vamos provar que $a^2 + ab + b^2 > 0$, $\forall b \neq 0$.

Completando o quadrado nos dois primeiros termos,

$$a^2+ab+b^2 = a^2+ab+\frac{b^2}{4}+b^2-\frac{b^2}{4} = \left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}.$$

Sabemos que $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2 \geq 0$ e para $b \neq 0$, $\frac{3b^2}{4} > 0$. Logo a soma desses termos é positiva.

(j) Verdadeiro. Prova:

($\Longleftarrow$) $a=0$ e $b=0 \Longrightarrow a^2=0$ e $b^2=0 \Longrightarrow a^2+b^2=0+0=0$.

($\Longrightarrow$) $a^2+b^2=0$ e suponha, por absurdo, que $a\neq 0$.

$a\neq 0 \Longrightarrow a^2>0 \overset{+b^2}{\Longrightarrow} a^2+b^2>0+b^2 \Longrightarrow a^2+b^2>b^2$ e $b^2\geq 0 \Longrightarrow a^2+b^2>0 \Longrightarrow a^2+b^2\neq 0$. Contradição com a hipótese $a^2+b^2=0$.

Podemos fazer demonstração análoga, supondo, por absurdo que $b\neq 0$.

(k) Falso. Contra-exemplo: $a=1$ e $b=-1$.

Vamos verificar se a implicação ($\Longrightarrow$) é verdadeira nesse exemplo.

$a^3+b^3=(1)^3+(-1)^3=1+(-1)=0$, logo nesse exemplo a hipótese é verdadeira.

$a=1\neq 0$, logo nesse exemplo a tese é falsa.

Hipótese verdadeira e tese falsa significa que a implicação ($\Longrightarrow$) é falsa.

(l) Falso. Contra exemplo: $a=1$ e $b=-1$.

$a^2=1^2$ e $b^2=(-1)^2=1 \Longrightarrow a^2=b^2$, logo nesse exemplo a hipótese é verdadeira.

$a^3=1^3=1$ e $b^3=(-1)^3=-1 \Longrightarrow a^3\neq b^3$, logo nesse exemplo a tese é falsa.

Hipótese verdadeira e tese falsa significa que a implicação ($\Longrightarrow$) é falsa.

(m) Verdadeiro. Prova:

Caso 1: $b=0$.

$b=0$, $a^3=b^3 \Longrightarrow b^3=0^3=0$ e $a^3=0 \Longrightarrow a\cdot a\cdot a=0 \Longrightarrow a=0$ ou $a=0$ ou $a=0 \Longrightarrow a=b=0 \Longrightarrow$ $a=b \Longrightarrow a\cdot a=a\cdot b$ e $a\cdot b=b\cdot b \Longrightarrow a^2=ab$ e $ab=b^2 \Longrightarrow a^2=b^2$.

Caso 2: $b\neq 0$.

$a^3=b^3 \Longrightarrow a^3-b^3=0 \Longrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2)=0 \Longrightarrow a-b=0$ ou $a^2+ab+b^2=0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} a-b=0 \Longrightarrow$ $a=b \Longrightarrow a\cdot a=a\cdot b$ e $a\cdot b=b\cdot b \Longrightarrow a^2=ab$ e $ab=b^2 \Longrightarrow a^2=b^2$.

$(*)$ na prova do ex. 21.(i) já provamos que $\forall b\neq 0$ é verdadeiro que $a^2+ab+b^2>0 \Longrightarrow a^2+ab+b^2\neq 0$.

(n) Falso. Contra exemplo: $a=1$ e $b=-1$.

$a^2=1^2$ e $b^2=(-1)^2=1 \Longrightarrow a^2=b^2$, logo nesse exemplo a hipótese é verdadeira.

$(a+1)^2=(1+1)^2=4$ e $(b+1)^2=(-1+1)^2=0^2=0 \Longrightarrow (a+1)^2\neq(b+1)^2$, logo a tese é falsa.

Hipótese verdadeira e tese falsa significa que a implicação ($\Longrightarrow$) é falsa.

(o) Verdadeiro, Prova:

($\Longleftarrow$) $a=0$ e $b=0 \Longrightarrow a^4=0$ e $b^4=0 \Longrightarrow a^4+b^4=0+0=0$.

($\Longrightarrow$) $a^4+b^4=0$ e suponha, por absurdo, que $a\neq 0$.

$a\neq 0 \Longrightarrow a^4>0 \overset{+b^4}{\Longrightarrow} a^4+b^4>0+b^2 \Longrightarrow a^4+b^4>b^4$ e $b^4=b^2\cdot b^2\geq 0 \Longrightarrow a^4+b^4>0 \Longrightarrow a^4+b^4\neq 0$. Contradição com a hipótese $a^4+b^4=0$.

Podemos fazer demonstração análoga, supondo, por absurdo que $b\neq 0$.

(p) Falso. Contra exemplo: $a=0$ e $b=0$.

$a^3=0^3=0$ e $b^3=0^3=0 \Longrightarrow a^3=b^3$, logo nesse exemplo a hipótese é verdadeira.

$a=0$, logo a tese $a<0$ é falsa.

Hipótese verdadeira e tese falsa significa que a implicação ($\Longrightarrow$) é falsa.

(q) Verdadeiro. Prova:

caso 1: $a=0$.

$a=0$ e $a^3+b^4=0 \Longrightarrow a=0 \Longrightarrow a=0$ ou $a<0 \Longrightarrow a\leq 0$.

caso 2: $a\neq 0$.

$a\neq 0$ e $a^3+b^4=0 \Longrightarrow (a<0$ ou $a>0)$ e $a^3+b^4=0 \Longrightarrow (a<0$ e $a^3+b^4=0)$ ou $(a>0$ e $a^3+b^4=0)$.

Verificando que a segunda afirmação da afirmação composta, isto é, a afirmação $(a>0$ e $a^3+b^4=0)$ é falsa.

$a>0$ e $b^2\geq 0 \Longrightarrow a^3>0$ e $b^4=b^2\cdot b^2\geq 0 \Longrightarrow a^3+b^4>0+b^4$ e $b^4\geq 0 \Longrightarrow a^3+b^4>0 \Longrightarrow a^3+b^4\neq 0$.

Logo as duas afirmações não podem ser simultâneamente verdadeiras, isto é, a afirmação é falsa.

Assim só resta a primeira afirmação da afirmação composta, isto é, a afirmação $(a<0$ e $a^3+b^4=0)$ ser verdadeira. Logo,

$a\neq 0$ e $a^3+b^4=0 \Longrightarrow (a<0$ e $a^3+b^4=0) \Longrightarrow a<0 \Longrightarrow a<0$ ou $a=0 \Longrightarrow a\leq 0$.

(r) A implicação ($\Longrightarrow$) é verdadeira (ver exercício anterior).
A recíproca ($\Longleftarrow$) é falsa. Contra-exemplo: $a = -1$, $b = 0$.
$a = -1$ e $-1 < 0 \Longrightarrow\Longrightarrow a < 0 \Longrightarrow a \leq 0$. Logo, nesse exemplo a hipótese é verdadeira.
$a = -1$ e $b = 0 \Longrightarrow a^3 = (-1)^3 = -1$ e $b^4 = 0^4 = 0 \Longrightarrow a^3 + b^4 = -1 + 0 = -1 \Longrightarrow a^3 + b^4 \neq 0$.
Logo, nesse exemplo, a tese é falsa.
Hipótese verdadeira e tese falsa significa que a recíproca ($\Longleftarrow$) é falsa.

(s) Verdadeira. Prova:
($\Longleftarrow$) $a = 0$ e $b = 0 \Longrightarrow a^2 = 0$ e $b^4 = 0 \Longrightarrow a^2 + b^4 = 0 + 0 = 0$.
($\Longrightarrow$) $a^2 + b^4 = 0$ e suponha, por absurdo, que $a \neq 0$.
$a \neq 0 \Longrightarrow a^2 > 0 \overset{+b^4}{\Longrightarrow} a^2 + b^4 > 0 + b^2 \Longrightarrow a^2 + b^4 > b^4$ e $b^4 = b^2 \cdot b^2 \geq 0 \Longrightarrow a^2 + b^4 > 0 \Longrightarrow a^2 + b^4 \neq 0$.
Contradição com a hipótese $a^2 + b^4 = 0$.
Podemos fazer demonstração análoga, supondo, por absurdo que $b \neq 0$.

5. Em todos os itens $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Falsa. Contra-exemplo: $a = -1 \neq 0$ e $b = 1$.
$\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{-1} = -1$, $b = 1$, $-1 < 1 \overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} \dfrac{1}{a} < b \Longrightarrow$ hipótese verdadeira.
$ab = (-1) \cdot 1 = -1$, $-1 < 1 \overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} ab < 1 \Longrightarrow$ a tese $ab > 1$ é falsa.
Logo, nesse exemplo, a hipótese é verdadeira e a tese é falsa, pela lógica, a implicação é falsa. Como a implicação é falsa, pela lógica, a equivalência também é falsa, isto é, pela lógica, a equivalência é verdadeira quando a implicação e a recíproca são verdadeiras.

(b) Verdadeira. Prova:
Uma parte da hipótese: $b \neq 0 \overset{\text{PO 16}}{\Longrightarrow} b^2 > 0$. $(*)$
Outra parte da hipótese: $\dfrac{1}{b^2} < a \overset{\text{PO 9 e }(*)}{\Longleftrightarrow} \dfrac{1}{b^2} b^2 < ab^2 \overset{\text{PA 9}}{\Longleftrightarrow} 1 < ab^2 \Longleftrightarrow ab^2 > 1$.

(c) Verdadeira. Prova:
Uma parte da hipótese: $b < 0 \overset{\text{PO 17}}{\Longleftrightarrow} b^3 < 0$. $(*)$
Outra parte da hipótese: $\dfrac{1}{b^3} < a \overset{\text{PO 10 e }(*)}{\Longleftrightarrow} \dfrac{1}{b^3} b^3 > ab^3 \overset{\text{PA 9}}{\Longleftrightarrow} 1 > ab^3 \Longleftrightarrow ab^3 < 1$.

(d) Verdadeira. Prova:
Hipóteses, $a \neq 0$ e $b \neq 0 \overset{\text{PO 16}}{\Longrightarrow} a^2 > 0$ e $b^2 > 0 \overset{\text{axioma da ordem 2}}{\Longrightarrow} a^2 + b^2 > 0 \overset{\text{PO 8}}{\Longrightarrow} \dfrac{1}{a^2 + b^2} > 0 \overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} \dfrac{1}{a^2 + b^2} \geq 0$.

(e) Verdadeira. Prova:
Hipóteses, $a \neq 0$ e $b \neq 0 \overset{\text{PO 16}}{\Longrightarrow} a^2 > 0$ e $b^2 > 0 \overset{\text{axioma da ordem 2}}{\Longrightarrow} a^2 + b^2 > 0 \overset{\text{PO 8}}{\Longrightarrow} \dfrac{1}{a^2 + b^2} > 0$.

(f) Falsa. Contra-exemplo: $a = -1$, $b = -2$.
$a = -1$, $b = -2, -2 < -1 \overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} b < a \Longrightarrow a > b \Longrightarrow$ a hipótese é verdadeira.
$\dfrac{1}{a^2 - b^2} = \dfrac{1}{(-1)^2 - (-2)^2} = \dfrac{1}{1 - 4} = \dfrac{1}{-3} = -\dfrac{1}{3}$ e $-\dfrac{1}{3} < 0 \overset{\text{transitividade}}{\Longrightarrow} \dfrac{1}{a^2 - b^2} < 0 \Longrightarrow$ a tese é falsa.
Logo, nesse exemplo, a hipótese é verdadeira e a tese é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

(g) Verdadeira. Prova:
Sabemos que $a^2 - b^2 \overset{\text{produto notável}}{=} (a - b)(a + b)$ $(*)$
$a > b > 0 \overset{\text{transitividade}}{\Longrightarrow} a > b$, $a > 0$, $b > 0 \overset{\text{def maior do que}}{\Longrightarrow} a - b > 0$, $a > 0$, $b > 0 \overset{\text{axioma da ordem 2}}{\Longrightarrow}$
$a - b > 0$, $a + b > 0 \overset{\text{axioma da ordem 2 e }(*)}{\Longrightarrow} a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) > 0 \overset{\text{PO 8}}{\Longrightarrow} \dfrac{1}{a^2 - b^2} > 0 \overset{\text{lógica}}{\Longrightarrow} \dfrac{1}{a^2 - b^2} \geq 0$.

(h) Falsa. Contra-exemplo: $a = -2$, $b = 3$.
$\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{-2} = -\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{3}$, $-\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{3} \overset{\text{transitividade}}{\Longrightarrow} \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b} \Longrightarrow$ hipótese verdadeira.
$b = 3$, $a = -2, -2 < 3 \overset{\text{transitividade}}{\Longrightarrow} a < b \overset{\text{tricotomia da ordem}}{\Longrightarrow}$ a tese $b < a$ é falsa.
Logo, nesse exemplo, a hipótese é verdadeira e a tese é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

(i) Verdadeira. Prova: $a > 0$, $b > 0$, $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b} \overset{\text{PO 9}}{\Longrightarrow} b\dfrac{1}{a}a < b\dfrac{1}{b}a \overset{\text{(AP5, PA8, AP4)}}{\Longrightarrow} b < a$.

(j) Verdadeira. Prova: $a > 0$, $b < 0$, $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b} \overset{\text{(PO 9, PO 10)}}{\Longrightarrow} b\dfrac{1}{a}a < b\dfrac{1}{b}a \overset{\text{(AP5, PA8, AP4)}}{\Longrightarrow} b < a$.

6. Exemplo 1: Para $a, b \in \mathbb{R}$, temos que $a = b \Longrightarrow a^2 = b^2$.

   Exemplo 2: Para $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$, temos que $a = b \Longrightarrow \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{b^2}$.

   Exemplo 3: Para $x \in \mathbb{R}$, temos que $x < 2 \Longrightarrow x < 3$.

   Exemplo 4: Para $a \in \mathbb{R}$, temos que $a > 1 \Longrightarrow a^2 > 1$.

   Exemplo 5: Para $x \in \mathbb{R}$, temos que $1 < x \Longrightarrow x < x^2$

   $\vdots$

7. (a) $\{x \in \mathbb{R};\ \ x \neq -1, x \neq 0, x \neq \frac{1}{2}, x \neq 1, x \neq 2\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$

   (b) $\{x \in \mathbb{R};\ \ x \neq -1, x \neq 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$

8. (a) $x = 0, x = 1, x = -1$ ou $x = -2$

   (b) $x = 2$ ou $x = -3$

   (c) $x = 0, x = 1, x = \dfrac{-3 + \sqrt{29}}{2}$ ou $x = \dfrac{-3 - \sqrt{29}}{2}$

   (d) $\{x \in \mathbb{R}; x < 0 \text{ ou } 1 < x < 2\} = (-\infty, 0) \cup (1, 2)$

   (e) $\{x \in \mathbb{R}\} = (-\infty, \infty)$

   (f) $\{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\} = [0, \infty)$

   (g) $\{x \in \mathbb{R};\ \ x \neq -1, x \neq 0, x \neq \frac{1}{2}, x \neq 1, x \neq 2,\ x < 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

   (h) $\{x \in \mathbb{R}, x < -1\} = (-\infty, -1)$

9. (a) $E(x)$ está definida em: $\{x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{2}{9}, x \neq \frac{4}{15}\} = \left(-\infty, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{2}{9}, \frac{4}{15}\right) \cup \left(\frac{4}{15}, \infty\right)$

   $E(x) = 0$: $x = -2 - \sqrt{7}$ ou $x = -2 + \sqrt{7}$

   $E(x) > 0$: $\{x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{2}{9}, x \neq \frac{4}{15}\} \cap \{x < -2 - \sqrt{7} \text{ ou } \frac{4}{15} < \text{x} < -2 + \sqrt{7}\} = \left(-\infty, -2 - \sqrt{7}\right) \cup \left(\frac{4}{15}, -2 + \sqrt{7}\right)$

   $E(x) < 0$: $\{x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{2}{9}, x \neq \frac{4}{15}\} \cap \{-2 - \sqrt{7} < x < \frac{4}{15} \text{ ou } \text{x} > -2 + \sqrt{7}\} =$

   $= \left(-2 - \sqrt{7}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{2}{9}, \frac{4}{15}\right) \cup \left(-2 + \sqrt{7}, \infty\right)$

   (b) $E(x)$ está definida em: $\{x \in \mathbb{R}; x \neq 1, x \neq 2\} = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$

   $E(x) = 0$: $x = 3$

   $E(x) > 0$: $\{x \in \mathbb{R}; x \neq 1, x \neq 2\} \cap \{x < 1 \text{ ou } 2 < x < 3\} = (-\infty, -1) \cup (2, 3)$

   $E(x) < 0$: $\{x \in \mathbb{R}; x \neq 1, x \neq 2\} \cap \{1 < x < 2 \text{ ou } x > 3\} = (1, 2) \cup (3, \infty)$

   (c) $E(x)$ está definida em: $\{x \in \mathbb{R}; x \neq -\frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{2}\} = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

   $E(x) = 0$: $x = 1$ ou $x = \frac{3}{2}$

   $E(x) > 0$: $\{x \in \mathbb{R}; x \neq -\frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{2}\} \cap \{-\frac{1}{2} < x < 1 \text{ ou } x > \frac{3}{2}\} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$

   $E(x) < 0$: $\{x \in \mathbb{R}; x \neq -\frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{2}\} \cap \{x < -\frac{1}{2} \text{ ou } 1 < x < \frac{3}{2}\} = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right)$

   (d) $E(x)$ está definida em: $\{x \in \mathbb{R}; x \neq 2\} = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

   $E(x) = 0$: $x = 3$

   $E(x) > 0$: $\{x \in \mathbb{R}; x \neq 2\} \cap \{x < 2\} = (-\infty, 2)$

   $E(x) < 0$: $\{x \in \mathbb{R}; x \neq 2\} \cap \{2 < x < 3 \text{ ou } x > 3\} = (2, 3) \cup (3, \infty)$