Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 3- 2011-1

Números reais:
Módulo e raízes

1. Repetimos a seguir as principais propriedades do módulo que foram listadas em aula e algumas delas provadas. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades:

(i) $|a| \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}$
e ainda $|a| = 0 \iff a = 0$.
(ii) $|a| = |-a|, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$.
(iii) $|a| = |b| \iff a = b$ ou $a = -b \iff a = \pm b$
(iv) Quando $b \geq 0$, vale a equivalência:
$|a| = b, \iff a = b$ ou $a = -b \iff a = \pm b$.
Quando $b < 0 \quad \nexists\, a;\ |a| = b$.
(v) $|ab| = |a|\ |b|$
(vi) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0$
(vii) $|a| < b \iff -b < a < b$
(viii) $|a| > b \iff a > b$ ou $a < -b$
(ix) $|a+b| \leq |a| + |b|$
(x) $|a^n| = |a|^n, \quad n \in \mathbb{N}$
Além disso, $|a|^n = a^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \forall n$ par.

Usando a definição ou essas propriedades, decida se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas. Prove as verdadeiras e dê contra-exemplo para as falsas. Considere $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) $|a| = \pi \implies a = \pi$
(b) $|ab| - |a|\ |b| \geq 0$
(c) $a < b \implies |a| < |b|$
(d) $a < 0 \implies a + |a| = 0$
(e) $a < 0 \iff a + |a| = 0$
(f) $a < b < 0 \implies |a| > |b|$
(g) $c > 1 \implies |c| - 1 > 0$
(h) $c > 1,\ |a| < b$ e $b < |c| - 1 \implies 1 - |c| < a < |c| - 1$
(i) $|a + b - c| = |a| + |b| - |c|$
(j) Para $a \neq 0,\ b \neq 0$ temos $\dfrac{1}{|a|} < \dfrac{1}{|b|} \iff |b| < |a|$

2. Dados $a, b \in \mathbb{R}, \quad b > 0, \quad$ verifique que $\quad |x - a| < b \iff a - b < x < a + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

3. (a) Para resolver a inequação $|2x - 5| \geq 8$ usando a interpretação geométrica na reta numérica, antes precisamos simplificar a inequação usando as propriedades de módulo até encontrar $\left|x - \frac{5}{2}\right| \geq 4$. Verifique que a simplicação está correta e resolva-a usando a interpretação geométrica na reta numérica.
(b) Encontre um método para resolver a inequação $|ax - b| \geq c, \quad a \neq 0$ usando a interpretação geométrica na reta numérica.
(c) Encontre um método para resolver a inequação $|ax - b| < c, \quad a \neq 0$ usando a interpretação geométrica na reta numérica.

4. (a) Sabemos que o gráfico de $y = f(x-a)$ é uma translação horizontal do gráfico de $y = f(x)$ de $|a|$ unidades para a direita se $a > 0$ e de $|a|$ unidades para a esquerda se $a < 0$. Por exemplo, $y = |x - 4|$ é uma translação horizontal do gráfico de $y = |x|$ de $|4| = 4$ unidades para a direita e $y = |x + 3| = |x - (-3)|$ é uma translação horizontal do gráfico de $y = |x|$ de $|-3| = 3$ unidades para a esquerda.
(b) Sabemos que o gráfico de $y = k + f(x)$ é uma translação vertical do gráfico de $y = f(x)$ de $|k|$ unidades para cima se $k > 0$ e de $|k|$ unidades para baixo se $k < 0$. Por exemplo, $y = 5 + |x|$ é uma translação vertical do gráfico de $y = |x|$ de $|5| = 5$ unidades para cima e $y = -2 + |x|$ é uma translação vertical do gráfico de $y = |x|$ de $|-2| = 2$ unidades para baixo.
Esboce o gráfico das funções: $y = 5 + |x|; \quad y = -2 + |x|; \quad y = 5 + |x - 4|; \quad y = -2 + |x + 3|$
(c) Sabemos que $y = kf(x)$ é uma ampliação vertical pelo fator k do gráfico de $y = f(x)$ se $k > 1$ e uma redução vertical pelo fator k do gráfico de $y = f(x)$ se $0 < k < 1$. Por exemplo, $y = (1{,}5)|x|$ é uma ampliação vertical pelo fator (1,5) do gráfico de $y = |x|$ e $y = (0{,}75)|x|$ é uma redução vertical pelo fator (0,75) do gráfico de $y = |x|$.
Esboce o gráfico das funções: $y = (1{,}5)|x|, \quad y = (0{,}75)|x|, \quad y = (1{,}5)|x - 4|, \quad y = -2 + (0{,}75)|x + 3|$.
(d) Sabemos que $y = -f(x)$ é uma reflexão do gráfico de $y = f(x)$ em relação ao eixo x. Por exemplo, $y = -|x|$ é uma reflexão do gráfico de $y = |x|$ em relação ao eixo x.
Esboce os gráficos de: $y = -|x|; \quad y = -(1{,}5)|x|; \quad y = 3 - (1{,}5)|x - 4|; \quad y = -2 - (1{,}5)|x + 3|$.

5. Resolva as equações ou inequações através de uma ou mais de uma das quatro formas, usando a definição de módulo, usando a interpretação geométrica na reta numérica, usando transformações em gráficos com módulo ou usando apenas propriedades de módulo. Se preciso, para usar qualquer uma das três primeiras formas, antes aplique propriedades de módulo para simplificar as equações ou inequações.

(a) $|3x-4|=4$
(b) $|3x-4|<4$
(c) $|2x|<5x$
(d) $|2x|<-5x$
(e) $|2x|\geq -5x$
(f) $|x-1|=-|x^2-x|$
(g) $|x-1|=|2x-3|$
(h) $|x-1|\geq|2x-3|$
(i) $|x-1|+|2x-3|=3$
(j) $|x-1|-|2x-3|=3$
(k) $|x-1|+|2x-3|<3$
(l) $|x-1|-|2x-3|>3$

6. Dados $a,b\in\mathbb{R}$, considere as definições a seguir.

O máximo entre a e b,
denotado por $\text{máx}\{a,b\}$ é definido por

$$\text{máx}\{a,b\}=\begin{cases} a & \text{se} \quad a>b \\ a & \text{se} \quad a=b \\ b & \text{se} \quad a<b \end{cases}$$

O mínimo entre a e b,
denotado por $\text{mín}\{a,b\}$ é definido por

$$\text{mín}\{a,b\}=\begin{cases} a & \text{se} \quad a<b \\ a & \text{se} \quad a=b \\ b & \text{se} \quad a>b \end{cases}$$

<u>Verifique que são verdadeiras:</u> (i) $|a|=\text{máx}\{a,-a\}$ (ii) $-|a|=\text{mín}\{a,-a\}$

7. Use as duas definições anteriores para provar que são verdadeiras: $a\leq|a|$ e $-|a|\leq a,\ \forall a\in\mathbb{R}$.

8. Prove que: $-|a|\leq a\leq|a|,\quad \forall a\in\mathbb{R}$.

9. Repetimos a seguir as principais propriedades de raiz quadrada e de raiz cúbica. Lembramos que as propriedades da raiz quadrada são válidas para qualquer raiz de índice par e as propriedades da raiz cúbica são válidas para qualquer raiz de índice ímpar.

Dados $a,b\in\mathbb{R}$, valem as propriedades:

A1) $\sqrt{a^2}=|a|,\quad \forall a\in\mathbb{R}$
A2) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}\qquad a\geq 0$ e $b\geq 0$
A3) $(\sqrt{a})^2=a\quad a\geq 0$
A4) $\sqrt{ab}=\sqrt{-a}\sqrt{-b}\qquad a\leq 0$ e $b\leq 0$
A5) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\qquad a\geq 0$ e $b>0$
A6) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}\qquad a\leq 0$ e $b<0$
A7) $0\leq a=b \iff \sqrt{a}=\sqrt{b}$
OBS. $a=b \not\Longrightarrow \sqrt{a}=\sqrt{b}$
pois, caso $a<0$ e $a=b\Longrightarrow \nexists\ \sqrt{a}$
A8) $0\leq a<b \iff \sqrt{a}<\sqrt{b}$
OBS. $a<b \not\Longrightarrow \sqrt{a}<\sqrt{b}$
pois, caso $a<0$ e $a<b\Longrightarrow \nexists\ \sqrt{a}$
A9) $\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b},\quad \forall a,b>0$

B1) $\sqrt[3]{a^3}=a,\quad \forall a\in\mathbb{R}$
B2) $\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}$
B3) $(\sqrt[3]{a})^3=a$
B4) $\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{-a}\sqrt[3]{-b}$
B5) $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}},\quad b\neq 0$
B6) $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[3]{-a}}{\sqrt[3]{-b}},\quad b\neq 0$
B7) $a=b \iff \sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b}$
B8) $a<b \iff \sqrt[3]{a}<\sqrt[3]{b}$
B9) $\sqrt[3]{a+b}<\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b},\quad \forall a,b>0$

Usando a definição de raiz de índice par e de índice ímpar, as propriedades algébricas e de ordem dos reais, ou essas propriedades, decida se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas. Prove as verdadeiras e dê contra-exemplo para as falsas.

(a) $\dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{x^2-1}=\dfrac{1}{x+1},\quad \forall x\in\mathbb{R},\ x\neq 1,\ x\neq -1$
(b) Para $a,b\in\mathbb{R};\ a,b\geq 0$ vale:
$a=b \iff \sqrt{a}=\sqrt{b}$.
(c) Para $a,b\in\mathbb{R}$ vale $a=b \iff \sqrt[5]{a}=\sqrt[5]{b}$
(d) Para $x\in\mathbb{R}$ vale:
$x-1<4\sqrt{x-1} \iff (x-1)^2<16(x-1)$
(e) $\sqrt{x^4}=\sqrt[3]{x^6},\quad \forall x\in\mathbb{R}$
(f) $\exists x\in\mathbb{R};\ \sqrt[4]{x^{20}}\neq x^5$
(g) $\sqrt[4]{x^{40}}<\sqrt{x^{24}},\quad \forall x\in\mathbb{R}$

(h) $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} < \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} \Longleftrightarrow x > 2$

(i) $\exists a \in \mathbb{R};\ \ \sqrt{a^2+16} \neq a+4$

(j) $\exists a \in \mathbb{R};\ \ \sqrt{a^2+16} = a+4$

10. Resolva:

(a) $2\sqrt{2-|x-1|} = x$

(b) $\sqrt{x} < \sqrt[3]{x}$

(c) $\sqrt{x^2} + 3\sqrt[3]{x^3} - 6\sqrt[4]{x^4} = 4x^2$

11. Analise o sinal das expressões

(a) $E(x) = \dfrac{2\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-2}$.

(b) $E(x) = \dfrac{2x-3}{|1-x|(1-2x)}$

12. Usando-se a técnica de completar quadrado, toda equação de grau 2 que contém pelo menos um dos termos x^2 ou y^2 e não contém o termo xy pode ser reescrita como uma das equações listadas abaixo. Aqui identificamos as equações que representam as cônicas estudadas em geometria analítica, com suas principais características ou os casos degenerados.

- $(x-h) = a(y-k)^2$ parábola com eixo paralelo ao eixo x, vértice $V = (h,k)$, onde é voltada para a esquerda no caso de $a < 0$ e é voltada para a direita no caso de $a > 0$.
- $(y-k) = a(x-h)^2$ parábola com eixo paralelo ao eixo y, vértice $V = (h,k)$, onde é voltada para baixo no caso de $a < 0$ e é voltada para cima no caso de $a > 0$.
- $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ no caso $a \neq b$, elipse de semi-eixos a e b, centro $C(h,k)$.
- $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ no caso $a = b$, circunferência de raio a, centro $C(h,k)$.
- $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ hipérbole com eixo paralelo ao eixo x, centro $C = (h,k)$, semi-eixos a e b.
- $-\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ hipérbole com eixo paralelo ao eixo y, centro $C = (h,k)$, semi-eixos a e b. .
- $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 0$ caso degenerado, um ponto $P = (h,k)$.
- $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 0$ caso degenerado, duas retas concorrentes no ponto $P = (h,k)$.
- $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = -1$ caso degenerado, não há solução.

Complete o quadrado em cada equação abaixo e identifique a cônica com suas principais características ou o caso degenerado.

(a) $4x^2 + y^2 - 16x - 6y + 9 = 0$

(b) $4x^2 + y^2 - 16x - 6y + 25 = 0$

(c) $y^2 - 2y + 2x + 4 = 0$

(d) $9x^2 - 4y^2 + 8y - 32 = 0$

(e) $x^2 + y^2 - \sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\,y + 6 = 0$