

RESPOSTAS DA LISTA 3 - Números reais: módulo e raízes

1. Em todos os itens consideramos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) Falsa. Contra-exemplo: $a = -\pi$.

$a = -\pi$ e $-\pi < 0 \xrightarrow{\text{definição de módulo}} |a| = |-\pi| = -(-\pi) \stackrel{\text{PA } 9}{=} \pi \implies$ a hipótese $|a| = \pi$ é verdadeira.
 $a = -\pi$ e $-\pi \neq \pi \implies$ a tese $a = \pi$ é falsa.

Logo, nesse exemplo, a hipótese é verdadeira e a tese é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

(b) Verdadeira. Justificativa:

$|ab| \stackrel{\text{(iii)}}{=} |a| \cdot |b| \stackrel{\text{PA } 27}{\implies} |ab| + (-|a| \cdot |b|) = |a| \cdot |b| + (-|a| \cdot |b|) \stackrel{\text{diferença e AS } 4}{\implies} |ab| - |a| \cdot |b| = 0 \stackrel{\text{lógica}}{\implies} |ab| - |a| \cdot |b| \geq 0$.

(c) Falsa. contra-exemplo: $a = -2$ e $b = -1$.

Temos que $a = -2, b = -1, -2 < -1 \implies$ a afirmação $a < b$ é verdadeira.

Temos que $a = -2, -2 < 0, b = -1, -1 < 0$, usando a definição de módulo, obtemos $|a| = |-2| = -(-2) = 2$ e $|b| = |-1| = -(-1) = 1$.

Logo, de $|a| = 2, |b| = 1, 2 > 1$, concluímos que $|a| > |b|$, daí, pela tricotomia da ordem, a tese $|a| < |b|$ é falsa.

Logo, nesse exemplo, a hipótese é verdadeira e a tese é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

(d) Verdadeira. Justificativa:

$a < 0 \stackrel{\text{def módulo}}{\iff} |a| = -a \stackrel{\text{lei do cancelamento}}{\iff} a + |a| = a + (-a) \stackrel{\text{AS5}}{\iff} a + |a| = 0$.

(e) Falsa. Contra-exemplo. Para $a = 0$ não vale a volta, isto é, $a + |a| = 0 \not\iff a < 0$.

Quando $a = 0$ temos que $a + |a| = 0 + |0| = 0 + 0 = 0$, logo a hipótese da volta $a + |a| = 0$ é verdadeira.

Mas $a = 0$, pela tricotomia da ordem, concluímos que a tese da volta, $a < 0$ é falsa.

Logo, nesse exemplo, a hipótese é verdadeira e a tese é falsa, pela lógica, a implicação é falsa.

(f) Verdadeira. Justificativa:

$a < b < 0 \implies a < b$ e $b < 0 \stackrel{\text{transitividade}}{\implies} a < 0$ e $b < 0 \stackrel{\text{def módulo}}{\implies} |a| = -a$ e $|b| = -b$. (*)

Por outro lado, $a < b$ e $-1 < 0 \stackrel{\text{PO } 10}{\implies} -a > -b \stackrel{(*)}{\implies} |a| > |b|$.

(g) Verdadeira. Justificativa:

$c > 1$ e $1 > 0 \implies c > 0 \stackrel{\text{def módulo}}{\implies} |c| = c$ (*)

$c > 1 \stackrel{\text{PA } 27}{\implies} c + (-1) > 0 + (-1) \stackrel{\text{diferença e AS4}}{\implies} c - 1 > 0 \stackrel{(*)}{\implies} |c| - 1 > 0$.

(h) Verdadeira. Prova:

Uma hipótese: $|a| < b$ e $b < |c| - 1 \stackrel{\text{transitividade}}{\implies} |a| < |c| - 1$.

Outra hipótese: $c > 1 \stackrel{\text{exercício anterior}}{\implies} |c| - 1 > 0$. Logo:

$|a| < |c| - 1$ e $|c| - 1 > 0 \stackrel{\text{(v)}}{\implies} -(|c| - 1) < a < |c| - 1 \stackrel{\text{PA } 21, \text{PA } 9, \text{AS3}}{\implies} 1 - |c| < a < |c| - 1$.

(i) Falsa. Contra-exemplo: $a = 1, b = 2, c = -1$.

Substituindo no lado esquerdo, $|a + b - c| = |1 + 2 - (-1)| = |3 + 1| = |4| = 4$.

Substituindo no lado direito, $|a| + |b| - |c| = |1| + |2| - |-1| = 1 + 2 - (-(-1))3 - 1 = 2$.

Como $4 \neq 2$, nesse exemplo, $|a + b - c| \neq |a| + |b| - |c|$, logo a igualdade é falsa, pois para ser verdadeira, teria que ser verdadeira para quaisquer valores de a, b, c .

(j) Verdadeira. Prova:

$a \neq 0$ e $b \neq 0 \stackrel{\text{(i)}}{\implies} |a| > 0$ e $|b| > 0 \stackrel{\text{PO } 8}{\implies} \frac{1}{|a|} > 0$ e $\frac{1}{|b|} > 0$.

Assim, $|b| < |a| \stackrel{\text{PO } 9}{\iff} |b| \frac{1}{|a|} < |a| \frac{1}{|a|} \stackrel{\text{PO } 9 \text{ e AP3}}{\iff} \frac{1}{|b|} |b| \frac{1}{|a|} < |a| \frac{1}{|a|} \frac{1}{|b|} \stackrel{\text{AP3 e AP4}}{\iff} \frac{1}{|a|} < \frac{1}{|b|}$.

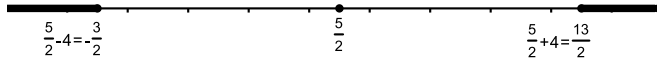
2. Sejam $a, b, x \in \mathbb{R}, b > 0$.

$|x - a| < b \stackrel{\text{(v)}}{\iff} -b < x - a < b \stackrel{\text{(PO } 7)}{\iff} -b + a < x - a + a < b - a \stackrel{\text{(AS3, AS4, AS5, def diferença)}}{\iff} a - b < x < b - a$.

3. (a) Verificando a simplificação,

$$|2x - 5| \geq 8 \iff |2(x - \frac{5}{2})| \geq 8 \iff |2|x - \frac{5}{2}|| \geq 8 \iff 2|x - \frac{5}{2}| \geq 8 \iff |x - \frac{5}{2}| \geq 4$$

pela interpretação geométrica, significa que é preciso encontrar todos os pontos x cuja distância ao ponto $\frac{5}{2}$ é maior do que 4 unidades, isto é, são os pontos iguais ou à direita do ponto $\frac{5}{2} + 4 = \frac{13}{2}$ ou iguais ou à esquerda do ponto $\frac{5}{2} - 4 = -\frac{3}{2}$, veja reta numérica da fig. 1.



Solução $S = (-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [\frac{13}{2}, \infty)$

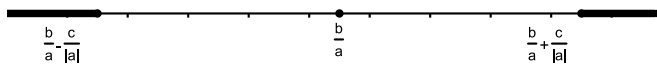
Fig. 1

(b) Sabemos que $|ax - b| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Caso $c \leq 0 \iff 0 \geq c$, temos que $|ax - b| \geq 0 \geq c \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Solução $S = (-\infty, \infty)$.

Caso $c > 0 \quad |ax - b| \geq c \iff |a(x - \frac{b}{a})| \geq c \iff |a| |x - \frac{b}{a}| \geq c \iff |x - \frac{b}{a}| \geq \frac{c}{|a|}$

pela interpretação geométrica, significa que é preciso encontrar todos os pontos x cuja distância ao ponto $\frac{b}{a}$ é maior do que $\frac{c}{|a|}$ unidades, isto é, são os pontos iguais ou à direita do ponto $\frac{b}{a} + \frac{c}{|a|}$ ou iguais ou à esquerda do ponto $\frac{b}{a} - \frac{c}{|a|}$, veja a reta numérica da fig. 2.



Solução $S = (-\infty, \frac{b}{a} - \frac{c}{|a|}] \cup [\frac{b}{a} + \frac{c}{|a|}, \infty)$

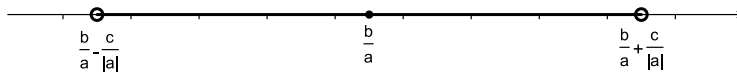
Fig. 2

(c) Sabemos que $|ax - b| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Caso $c \leq 0$ temos que $|ax - b| < c \leq 0$. Mas $\nexists x; |ax - b| < 0$ Solução $S = \emptyset$.

Caso $c > 0 \quad |ax - b| < c \iff |a(x - \frac{b}{a})| < c \iff |a| |x - \frac{b}{a}| < c \iff |x - \frac{b}{a}| < \frac{c}{|a|}$

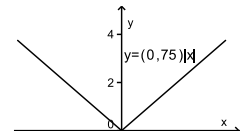
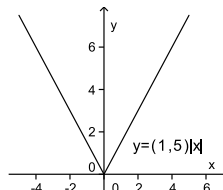
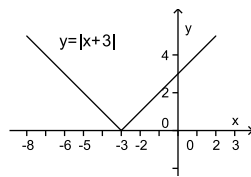
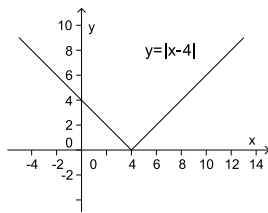
pela interpretação geométrica, significa que é preciso encontrar todos os pontos x cuja distância ao ponto $\frac{b}{a}$ é menor do que $\frac{c}{|a|}$ unidades, isto é, são os pontos à esquerda do ponto $\frac{b}{a} + \frac{c}{|a|}$ e à direita do ponto $\frac{b}{a} - \frac{c}{|a|}$, veja a reta numérica da fig. 3.



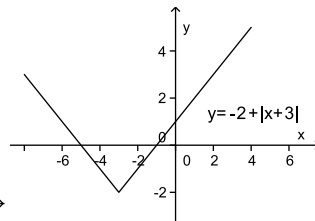
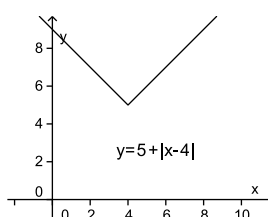
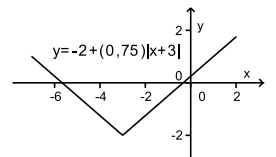
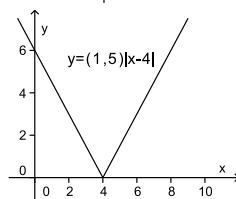
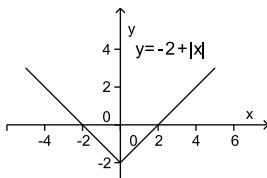
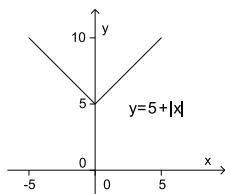
Solução $S = (\frac{b}{a} - \frac{c}{|a|}, \frac{b}{a} + \frac{c}{|a|})$

Fig. 3

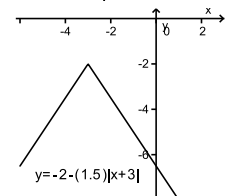
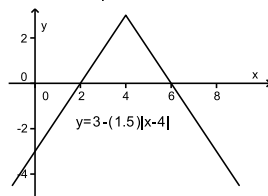
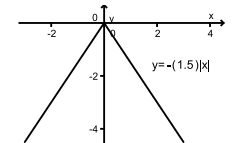
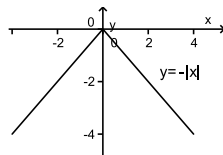
4. (a)



(b)



(d)



(c)

5. (a) $x = 0$ ou $x = 8/3$ (e) $[0, \infty)$ (i) $x = 1/3$ ou $x = 7/3$
 (b) $(0, 8/3)$ (f) $x = 1$ (j) \emptyset
 (c) $(0, \infty)$ (g) $x = 2$ ou $x = 4/3$ (k) $(1/3, 7/3)$
 (d) $(-\infty, 0)$ (h) $[4/3, 2]$ (l) \emptyset

6. (i) $a, -a \in \mathbb{R}$. Logo, $\max\{a, -a\} = \begin{cases} a & \text{se } a > -a \\ a & \text{se } a = -a \\ -a & \text{se } a < -a \end{cases}$ PO 7, AS5 e AS4 $\iff \max\{a, -a\} = \begin{cases} a & \text{se } a + a > 0 \\ a & \text{se } a + a = 0 \\ -a & \text{se } a + a < 0 \end{cases}$

AP4 e ASP $\iff \max\{a, -a\} = \begin{cases} a & \text{se } 2a > 0 \\ a & \text{se } 2a = 0 \\ -a & \text{se } 2a < 0 \end{cases}$ PO9 $\iff \max\{a, -a\} = \begin{cases} a & \text{se } a > 0 \\ a = 0 & \text{se } a = 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$ (*)

Por definição, $|a| = \begin{cases} a & \text{se } a > 0 \\ 0 & \text{se } a = 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$ Comparando a definição de $|a|$ e (*), concluímos que $|a| = \max\{a, -a\}$.

(ii) $a, -a \in \mathbb{R}$. Logo, $\min\{a, -a\} = \begin{cases} a & \text{se } a < -a \\ a & \text{se } a = -a \\ -a & \text{se } a > -a \end{cases}$ PO 7, AS5 e AS4 $\iff \min\{a, -a\} = \begin{cases} a & \text{se } a + a < 0 \\ a & \text{se } a + a = 0 \\ -a & \text{se } a + a > 0 \end{cases}$

AP4, ASP e PO9 $\iff \min\{a, -a\} = \begin{cases} a & \text{se } a < 0 \\ a = 0 & \text{se } a = 0 \\ -a & \text{se } a > 0 \end{cases}$, isto é, $\min\{a, -a\} = \begin{cases} -a & \text{se } a > 0 \\ 0 & \text{se } a = 0 \\ a & \text{se } a < 0 \end{cases}$ (**)

Mas, por definição de módulo, $-|a| = \begin{cases} -a & \text{se } a > 0 \\ -0 = 0 & \text{se } a = 0 \\ -(-a) = a & \text{se } a < 0 \end{cases}$, isto é, $-|a| = \begin{cases} -a & \text{se } a > 0 \\ 0 & \text{se } a = 0 \\ a & \text{se } a < 0 \end{cases}$

Comparando $-|a|$ e (**), concluímos que $-|a| = \min\{a, -a\}$.

7. Vamos provar primeiro que $\forall a, b \in \mathbb{R}$, temos que $a \leq \max\{a, b\}$ e $a \geq \min\{a, b\}$

Pela tricotomia da ordem, há três casos admissíveis e distintos, (i) $a < b$, (ii) $a = b$, (iii) $a > b$.

Primeiro vamos aplicar a definição de $\max\{a, b\}$:

(i) $a < b \implies a < b$ e $\max\{a, b\} = b \xrightarrow{\text{lógica}} a < \max\{a, b\} \xrightarrow{\text{lógica}} a \leq \max\{a, b\}$

(ii) $a = b \implies \max\{a, b\} = a \xrightarrow{\text{lógica}} a \leq \max\{a, b\}$

(iii) $a > b \implies \max\{a, b\} = a \xrightarrow{\text{lógica}} a \leq \max\{a, b\}$. Logo, por (i), (ii), (iii), concluímos que $a \leq \max\{a, b\}$. (*)

Agora vamos aplicar a definição de $\min\{a, b\}$:

(i) $a < b \implies \min\{a, b\} = a \xrightarrow{\text{lógica}} a \geq \min\{a, b\}$

(ii) $a = b \implies \min\{a, b\} = a \xrightarrow{\text{lógica}} a \geq \min\{a, b\}$

(iii) $a > b \implies a > b$ e $\min\{a, b\} = b \xrightarrow{\text{lógica}} a > \min\{a, b\} \xrightarrow{\text{lógica}} a \geq \min\{a, b\}$. Concluímos que $a \geq \min\{a, b\}$. (**)

Agora, substituindo b por $-a$ em (*) e (**), obtemos $a \leq \max\{a, -a\}$ e $a \geq \min\{a, -a\}$.

Aplicando (i) e (ii) do exercício anterior, concluímos que $a \leq |a|$ e $a \geq -|a|$.

8. $-|a| \leq a \leq |a|$, $\forall a \in \mathbb{R} \iff -|a| \leq a$ e $a \leq |a|$, $\forall a \in \mathbb{R}$. É a mesma afirmação do exercício anterior, já provada.

9. (a) Falsa. Contra-exemplo: $x = -2$.

Verificando, $\frac{\sqrt{(-2-1)^2}}{(-2)^2-1} = \frac{\sqrt{9}}{3} = 1$ e $\frac{1}{-2+1} = -1$. Logo $\frac{\sqrt{(-2-1)^2}}{(-2)^2-1} \neq \frac{1}{-2+1}$.

(b) Verdadeira.

Sabemos da propriedade de ordem dos números reais que $x^2 = y^2 \iff x = y$ ou $x = -y$. Mas se $x, y \geq 0$ sabemos que $x = -y \iff x = 0$ e $y = 0$.

Isto é, sabemos que quando $x, y \geq 0$ vale a equivalência $x^2 = y^2 \iff x = y$.

Agora considerando $x = \sqrt{a}$ e $y = \sqrt{b}$, temos que $x^2 = (\sqrt{a})^2 = a$ e $y^2 = (\sqrt{b})^2 = b$.

Por hipótese, $a, b \geq 0$, logo $(\sqrt{a})^2 = (\sqrt{b})^2 \iff \sqrt{a} = \sqrt{b}$.

Assim, $a, b \geq 0$, vale $a = b \iff \sqrt{a} = \sqrt{b}$

(c) Verdadeira. Sabemos que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, vale $x = y \iff x^3 = y^3 \iff x^2 \cdot x^3 = y^2 \cdot y^3 \iff x^5 = y^5$.

Considerando $a, b \in \mathbb{R}$, $x = \sqrt[5]{a}$ e $y = \sqrt[5]{b}$, vale $\sqrt[5]{a} = \sqrt[5]{b} \iff (\sqrt[5]{a})^5 = (\sqrt[5]{b})^5 \iff a = b$.

(d) Verdadeira.

Sabemos que $\sqrt{x-1}$ está definida se e só se $x-1 \geq 0$. Logo,

$x-1 < 4\sqrt{x-1} \iff x-1 < 4\sqrt{x-1}$ e $x-1 \geq 0 \iff (x-1)^2 < (4\sqrt{x-1})^2 \iff (x-1)^2 < 16(x-1)$.

(e) Verdadeira. $\sqrt{x^4} = \sqrt{(x^2)^2} = |x^2| = x^2$ e $\sqrt[3]{x^6} = \sqrt[3]{(x^2)^3} = x^2 \implies \sqrt{x^4} = \sqrt[3]{x^6}$.

(f) Falsa. C. Ex: $x = -1$. Verificando, $\sqrt[4]{(-1)^{20}} = \sqrt[4]{1} = 1$ e $(-1)^5 = -1$. Logo, $\sqrt[4]{(-1)^{20}} \neq (-1)^5$.

(g) A desigualdade é falsa quando $x = 0$.

Mas, vamos tentar encontrar as condições que seria verdadeira se $x \neq 0$.

$\sqrt[4]{x^{40}} < \sqrt{x^{24}} \iff \sqrt[4]{(x^{10})^4} < \sqrt{(x^{12})^2} \iff |x^{10}| < |x^{12}| \iff x^{10} < x^{12} \iff x^{10} < x^2 \cdot x^{10} \iff 1 < x^2$.

Assim qualquer exemplo onde $-1 < x < 1$ tornará a desigualdade falsa, logo a afirmação é falsa.

(h) Verdadeira.

Primeiro vamos verificar o domínio da inequação: $x \in \mathbb{R}$; $x-1 > 0$ e $x-2 > 0$.

Logo o domínio é: $x \in \mathbb{R}$; $x > 2$. Também sabemos que $\sqrt{x-2} > 0$ e $\sqrt{x-1} > 0$.

Assim podemos usar a propriedade dos reais, no caso em que $b > 0$ e $d > 0$ vale $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff ad < bc$.

Mas cuidado com essa propriedade, ela não é verdadeira em qualquer caso !!!.

Como $\sqrt{x-2} > 0$ e $\sqrt{x-1} > 0$, vale $\frac{1}{\sqrt{x-1}} < \frac{1}{\sqrt{x-2}} \iff \sqrt{x-2} < \sqrt{x-1}$.

Considerando $a = x-1 > 0$ e $b = x-2 > 0$ podemos usar a propriedade $a < b \iff \sqrt{a} < \sqrt{b}$. Logo,

$\frac{1}{\sqrt{x-1}} < \frac{1}{\sqrt{x-2}} \iff \sqrt{x-2} < \sqrt{x-1} \iff x-2 < x-1 \iff -2 < -1$.

Como $-2 < -1$ é verdadeira para $\forall x \in \mathbb{R}$, a primeira desigualdade será verdadeira para todo x no domínio da desigualdade, isto é, para todo x ; $x > 2$.

(i) Verdadeira.

Exibindo um exemplo, $a = 3$. Verificando, $\sqrt{3^2 + 16} = \sqrt{25} = 5$ e $3+4=7$. Logo, $\sqrt{3^2 + 16} \neq 3+4$.

(j) Verdadeira.

Exibindo um exemplo, $a = 0$. $\sqrt{0^2 + 16} = \sqrt{16} = 4$ e $0 + 4 = 4$. Logo, $\sqrt{0^2 + 16} = 0 + 4$.

Na verdade esse é o único exemplo onde $\sqrt{a^2 + 16} = a + 4$, isto é, $\sqrt{a^2 + 16} = a + 4 \iff a = 0$.

10. (a) $x = 2$ (b) $(0, 1)$ (c) $x = 0$

11. (a) $E(x)$ está definida em $[1, 4) \cup (4, \infty)$. $E(x) > 0$ se $x > 4$. $E(x) < 0$ se $1 \leq x < 4$. $\nexists x$; $E(x) = 0$.

(b) $E(x)$ está definida em $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \infty)$.

$E(x) > 0$ em $(\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \frac{3}{2})$. $E(x) < 0$ em $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$. $E(x) = 0$ em $x = \frac{3}{2}$.

12. (a) $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$. Elipse de centro $(2, 3)$ e semi-eixos $a = 2$, $b = 4$.

(b) $4(x-2)^2 + (y-3)^2 = 0$. Caso degenerado, ponto $P = (2, 3)$.

(c) $x - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(y-1)^2$. Parábola, vértice $(\frac{3}{2}, 1)$, eixo paralelo ao eixo x , concavidade voltada para esquerda.

(d) $\frac{x^2}{\frac{28}{9}} - \frac{(y-1)^2}{7} = 1$. Hipérbole, eixo paralelo ao eixo x , centro $(0, 1)$, semi-eixos $a = \frac{2\sqrt{7}}{3}$ e $b = \sqrt{7}$.

(e) $(x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (y + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = -5$. Caso degenerado, não há solução.