



Universidade Federal Fluminense

EGM - Instituto de Matemática

GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 4 - 2011-1

Trigonometria

Equações e inequações trigonométricas

Funções trigonométricas

Funções trigonométricas inversas

- Quando o sol está a 60° acima do horizonte, qual é o comprimento da sombra projetada no solo por um edifício de $27m$ de altura?
- Um avião voando a uma velocidade constante de 360 km/h , subindo a um ângulo de 30° , passa por um ponto P que está no solo, a uma altura de 12km . Determine a distância de P ao avião, 1 minuto após o avião passar sobre o ponto P .
- Para determinar a largura aproximada de um rio, sem atravessá-lo, um engenheiro procedeu da seguinte maneira:
 - construiu um plano vertical imaginário contendo uma reta horizontal na direção perpendicular ao rio e de forma que mirando o topo de uma árvore na margem oposta, esse topo seja um ponto P do plano vertical.
 - de um ponto A da margem, na direção da mesma perpendicular ao rio, avistou o topo P da árvore sob um ângulo de 38° com a horizontal.
 - recuando $15m$ na mesma direção perpendicular ao rio, até um ponto B , visou novamente o topo da árvore, registrando 26° com a horizontal.

Com esses dados ele fez os cálculos necessários. Qual a largura do rio?

- Uma esfera de raio r é colocada no interior de uma cavidade cônica. sabe-se que o raio da base da cavidade é 5 cm e o ângulo entre as geratrizes da cavidade situadas em um plano vertical à essa cavidade é de 60° .
 - Calcular a distância aproximada do centro da esfera de raio r ao vértice do cone, se $r = 4 \text{ cm}$.
 - Qual deve ser, aproximadamente, o raio da esfera para que o topo da mesma seja o centro da base do cone?
- Calcule o valor da expressão $y = \frac{\tan x + \cot x}{\sec x + \csc x}$, sabendo que $\sin x + \cos x = \frac{2}{3}$.
- Calcule o valor da expressão $y = \sin(2x)$ se $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $0 \leq x \leq \pi$.
- Calcule o valor de y , se $y = \cos 75^\circ + \cos 15^\circ$.
- Determine m para que exista x , em cada caso:
 - $\cos x = m^2 - 8$
 - $\cos x = \frac{3 - 7m}{4}$
 - $2 \sin x + 1 = m$

- Prove que cada identidade é verdadeira para todo $x \in \mathbb{R}$:

(a) $\sin^4 x - \cos^4 x + \cos 2x = 0$

(b) $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos(-x) + \sin(-x))^2 = 2$

- Simplique as expressões:

(a) $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos(\pi + x)}{\sin(\pi - x) \cdot \cos(x - 2\pi) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$

(b) $\frac{\tan x + \cot x}{\csc^2 x}$

- Resolva e marque a solução no círculo trigonométrico.

(a) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(e) $2 \cos^3 \theta + 6 \cos \theta - \cos^2 \theta - 3 = 0$

(b) $\cos x - 4 \cos^5 x = 0$

(f) $2 \sin x - \cos x = 1$

(c) $|\sin x - 1| = \frac{1}{2}$

(g) $-\frac{1}{2} \leq \sin x \leq \frac{1}{2}$

(d) $2 \sin^2 x - 3 \cos x - 3 = 0$

(h) $2 \cos^2 x - \cos x < 0$

(i) $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(j) $\sin x + \sin 4x = 0$

(k) $\frac{1}{1 - \sin x} \geq \frac{1}{\sin x}$,
para $0 < x < 2\pi$, $x \neq \frac{\pi}{2}, \pi$

(l) $4 \sin x < \frac{1}{\cos x}$,

para $0 \leq x \leq 2\pi$, $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

(m) $\frac{\sin^2 x - \sin x}{2 \sin x - 1} > 0$,

para $0 \leq x \leq 2\pi$, $x \neq \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

(n) $|\cos 4x| = 1$

(o) $2 \sin x |\sin x| - 1 \leq 0$

12. Esboce os gráficos passo a passo.

(a) $f(x) = |\cos x - \frac{1}{2}|$

(b) $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{4})$, $0 \leq x \leq 2\pi$

(c) $f(x) = \sin(2x - \pi)$

(d) $f(x) = -3 \sin |x|$

(e) $f(x) = |\tan(x - \frac{\pi}{4}) - 1|$

(f) $f(x) = |\cos(\pi - x)| - 1$

(g) * $f(x) = 5 \sin x \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$

(h) * $f(x) = \frac{\sin^2 x}{2}$, $-\pi \leq x \leq \pi$

(i) * $f(x) = \sqrt{1 - \cos^2(\frac{x}{2})}$

(j) $f(x) = 2 \arctan(x + 1)$

*Use primeiro alguma identidade trigonométrica.

13. Calcule:

(a) $\arcsen(\frac{\sqrt{3}}{2})$

(b) $\arctan(-1)$

(c) $\arccos(-1)$

14. Prove que $\cos(\arcsen x) = \sqrt{1 - x^2}$, $\forall x \in [-1, 1]$.

15. Resolva e represente a solução na reta numérica. Em cada solução na reta numérica marque os pontos no intervalo dado $I \subset \mathbb{R}$.

Observe que vários itens são repetições dos itens do exercício 11.

(a) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $I = [-8\pi, 8\pi]$

(b) $|\sin x - 1| = \frac{1}{2}$ $I = [-8\pi, 8\pi]$

(c) $2 \sin^2 x - 3 \cos x - 3 = 0$ $I = [-8\pi, 8\pi]$

(d) $\frac{-1}{2} \leq \sin x \leq \frac{1}{2}$ $I = [-4\pi, 4\pi]$

(e) $2 \cos^2 x - \cos x < 0$ $I = [-4\pi, 4\pi]$

(f) $4 \sin x < \frac{1}{\cos x}$ $I = [-2\pi, 2\pi]$

(g) $|\sin(2x) - 1| = \frac{1}{2}$ $I = [-4\pi, 4\pi]$

(h) $2 \sin(\frac{x}{2}) - \cos(\frac{x}{2}) = 1$ $I = [-8\pi, 8\pi]$

(i) $\frac{\sin^2(\frac{x}{3}) - \sin(\frac{x}{3})}{2 \sin(\frac{x}{3}) - 1} > 0$ $I = [-15\pi, 15\pi]$