

RESPOSTAS DA LISTA 5 (alguns estão com a resolução ou o resumo da resolução):

1. Resposta: $-\frac{7}{45} < -\frac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10} < -\frac{3}{20} < \frac{3}{20} < \frac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10} < \frac{7}{45}$

Justificativa: observe que $\frac{\sqrt{14}-\sqrt{28}}{-10} = \frac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10}$. Também observe que:

$\frac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10}$ e $-\frac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10}$ são simétricos; $\frac{7}{45}$ e $-\frac{7}{45}$ são simétricos; $\frac{3}{20}$ e $-\frac{3}{20}$ são simétricos.

Logo fica mais simples comparar primeiro os positivos e a seguir comparar os negativos.

(i) Comparando $\frac{3}{20}$ e $\frac{7}{45}$.

Como $20 > 0$ e $45 > 0$, temos que $\frac{3}{20} < \frac{7}{45} \iff \frac{3}{20} \times 20 \times 45 < \frac{7}{45} \times 20 \times 45 \iff 3 \times 45 < 7 \times 20 \iff 135 < 140$. Como a última desigualdade é verdadeira e vale a equivalência com a primeira desigualdade, concluímos que a primeira desigualdade é verdadeira, isto é, concluímos que $\frac{3}{20} < \frac{7}{45}$ é verdadeira.

(ii) Comparando $\frac{3}{20}$ e $\frac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10}$.

Como $20 > 0$, temos que $\frac{3}{20} < \frac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10} \iff \frac{3}{20} \times 20 < 20 \times \frac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10} \iff 3 < 2(\sqrt{2 \times 14} - \sqrt{14})$.

(por propriedade de raiz), $\iff 3 < 2(\sqrt{2}\sqrt{14} - \sqrt{14}) \iff 3 < 2\sqrt{14}(\sqrt{2} - 1)$.

Sabendo-se que $a = 3 > 0$ e $b = 2\sqrt{14}(\sqrt{2} - 1) > 0$, podemos usar a propriedade $a < b \iff a^2 < b^2$. Logo,

$3 < 2\sqrt{14}(\sqrt{2} - 1) \iff (3)^2 < (2\sqrt{14}(\sqrt{2} - 1))^2 \iff 9 < 4 \times 14(\sqrt{2} - 1)^2 \iff 9 < 56(2 - 2\sqrt{2} + 1) \iff$

$9 < 56(3 - 2\sqrt{2}) \iff 9 < 56 \times 3 - 56 \times 2\sqrt{2} \iff 56 \times 2\sqrt{2} < 56 \times 3 - 9 \iff 112\sqrt{2} < 159$.

Como os números dos dois lados da desigualdade são positivos, podemos aplicar a mesma propriedade citada anteriormente, isto é, elevar ao quadrado os dois lados da desigualdade, como a seguir.

$112\sqrt{2} < 159 \iff (112\sqrt{2})^2 < 159^2 \iff 25.088 < 25.281$.

Como a última desigualdade é verdadeira e vale a equivalência com a primeira desigualdade, concluímos que a primeira desigualdade é verdadeira, isto é, concluímos que $\frac{3}{20} < \frac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10}$ é verdadeira.

(iii) Comparando $\frac{7}{45}$ e $\frac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10}$.

Como $10 > 0$, temos que $\frac{7}{45} \times 10 < \frac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10} \times 10 \iff \frac{7}{9} \times 2 < \sqrt{28}-\sqrt{14} \stackrel{(\times 9 > 0)}{\iff} 14 < 9(\sqrt{2 \times 14} - \sqrt{14})$

$\iff 14 < 9\sqrt{14}(\sqrt{2} - 1)$. Podemos elevar ao quadrado os dois lados da desigualdade, pois ambos são positivos. Logo,

$14 < 9\sqrt{14}(\sqrt{2} - 1) \iff (14)^2 < (9\sqrt{14}(\sqrt{2} - 1))^2 \iff (14)^2 < 81 \times 14(2 - 2\sqrt{2} + 1) \stackrel{(\div 14 > 0)}{\iff}$

$14 < 81(3 - 2\sqrt{2}) \iff 14 < 81 \times 3 - 81 \times 2\sqrt{2} \iff 81 \times 2\sqrt{2} < 81 \times 3 - 14 \iff (81)^2 \times 8 < 229 \iff 52.488 < 52.441$.

Como a última desigualdade é falsa e vale a equivalência com a primeira desigualdade, concluímos que a primeira desigualdade é falsa, isto é, concluímos que $\frac{7}{45} < \frac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10}$ é falsa.

Em todo desenvolvimento acima podemos trocar $<$ por $=$. Como $52.488 = 52.441$ é falso, também concluímos que $\frac{7}{45} = \frac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10}$ é falso. Pela tricotomia da ordem, só resta $\frac{7}{45} > \frac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10}$ verdadeiro.

Por (i), (ii) e (iii), obtemos a lista dos positivos em ordem crescente: $\frac{3}{20} < \frac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10} < \frac{7}{45}$.

Para ordenar os negativos multiplicamos as duas desigualdades acima pelo número negativo -1 , as desigualdades serão invertidas, isto é, $-\frac{3}{20} > -\frac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10} > -\frac{7}{45}$. Escrevendo do menor para o maior, $-\frac{7}{45} < -\frac{\sqrt{28}-\sqrt{14}}{10} < -\frac{3}{20}$. Finalmente, como todo negativo é menor que positivo, obtemos a lista completa ordenada que está na resposta.

2. (a) Resposta: $0,31 < \frac{1}{\pi} < 0,32$.

Justificativa: $3,141 < \pi < 3,142 \implies 3,141 < \pi$ e $\pi < 3,142$.

Como todos os números são positivos, podemos dividir por esses números, as duas desigualdades se preservam.

Logo, $3,141 < \pi$ e $\pi < 3,142 \implies \frac{1}{\pi} < \frac{1}{3,141}$ e $\frac{1}{3,142} < \frac{1}{\pi} \implies \frac{1}{3,142} < \frac{1}{\pi} < \frac{1}{3,141}$.

Fazendo as contas, observamos que o resultado da divisão de 1 por 3,142 é tal que $0,31 < \frac{1}{3,142} < 0,32$.

Fazendo as contas, observamos que o resultado da divisão de 1 por 3,141 é tal que $0,31 < \frac{1}{3,141} < 0,32$.

Logo, garantimos que $0,31 < \frac{1}{3,142} < \frac{1}{\pi} < \frac{1}{3,141} < 0,32$.

(b) Resposta: $-0,142 < 3 - \pi < -0,141$

(c) $\frac{2}{0,142} < \frac{2}{\pi-3} < \frac{2}{0,141}$. Fazendo contas de divisão, concluímos que $14,08 < \frac{2}{\pi-3} < 14,19$. Logo, multiplicando as duas desigualdades por -1 obtemos a estimativa pedida, $-14,19 < \frac{2}{3-\pi} < -14,08$.

A amplitude do intervalo é $(-14,08) - (-14,19) = 14,19 - 14,08 = 0,11$.

3. Resposta: $3,8241 < a^2 - a + 4 < 3,8384$.

Justificativa: $0 < 0,21 < a < 0,22 \implies (0,21)^2 < a^2 < (0,22)^2 \implies 4 + (0,21)^2 < a^2 + 4 < 4 + (0,22)^2$

Por outro lado, $0,21 < a < 0,22 \implies -0,22 < -a < -0,21$.

Assim, temos que $\begin{cases} 4 + (0,21)^2 < a^2 + 4 < 4 + (0,22)^2 \\ -0,22 < -a < -0,21 \end{cases}$ Somando termo a termo as desigualdades, obtemos

$4 + (0,21)^2 + (-0,22) < a^2 + 4 + (-a) < 4 + (0,22)^2 + (-0,21)$. Fazendo contas chega-se na resposta.

4. $\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 4 < x^2 - x + 4 < \frac{9}{25} + \frac{3}{5} + 4 \implies \frac{40}{9} < x^2 - x + 4 < \frac{124}{25}$

5. Racionalizando a expressão temos $\frac{3\sqrt{5}-8}{\sqrt{5}} = \frac{15-8\sqrt{5}}{5} = 3 - \frac{8\sqrt{5}}{5}$. Estimando $\frac{8\sqrt{5}}{5}$, encontramos,

$3,568 < \frac{8\sqrt{5}}{5} < 3,584 \implies -3,584 < -\frac{8\sqrt{5}}{5} < -3,568 \implies -0,584 < 3 - \frac{8\sqrt{5}}{5} < -0,568$.

6. (a) $-0,3 < a + b < -0,1$ (b) $4,0 < a - b < 4,2$ (c) $-0,075 < \frac{a+b}{a-b} < -0,023$

7. (a) $x \in \mathbb{R}$ (e) $x \in \mathbb{R}$ (i) $x \in \mathbb{R}$ (m) $x \in \mathbb{R}$
 (b) $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ (f) $x \in [1, \infty)$ (j) $x \in [1, \infty)$ (n) $x \in \mathbb{R}$
 (c) $x \in [1, \infty)$ (g) $x \in \mathbb{R}$ (k) $x \in [1, \infty)$
 (d) $x \in (1, \infty)$ (h) $x \in [1, \infty)$ (l) $x \in [1, \infty)$

8. (a) $x \in [1, \infty) \cap \mathbb{Q}$ (c) $x \in [-2, 1) \cap \mathbb{Q}$
 (b) $x \in (-\infty, 1) \cap \mathbb{Q}$ (d) $x \in [(-\infty, -2] \cup (1, \infty)] \cap \mathbb{Q}$

9. $\left(\frac{a^{1/2}+1}{a^{1/2}-1} + \frac{a^{1/2}-1}{a^{1/2}+1} - \frac{4}{a-1}\right)^{-3} = \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} + \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{4}{a-1}\right)^{-3} =$
 $= \left(\frac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} + \frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)} - \frac{4}{a-1}\right)^{-3} = \left(\frac{a+2\sqrt{a}+1}{a-1} + \frac{a-2\sqrt{a}+1}{a-1} - \frac{4}{a-1}\right)^{-3} =$
 $= \left(\frac{2a+2}{a-1} - \frac{4}{a-1}\right)^{-3} = \left(\frac{2a-2}{a-1}\right)^{-3} = \left(\frac{2(a-1)}{a-1}\right)^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

10. $\frac{(15^{3a}) \times (30)^{1-a}}{2^{-a}} = \frac{(15^a)^3 \times (2 \times 15)^{1-a}}{2^{-a}} = \frac{(15^a)^3 \times (2)^{1-a} \times (15)^{1-a}}{2^{-a}} = \frac{(15^a)^3 \times 2 \times (2)^{-a} \times 15 \times (15)^{-a}}{2^{-a}} =$
 $\frac{(15^a)^3 \times 2 \times 15}{15^a} = (15^a)^2 \times 30 = 4^2 \times 30 = 16 \times 30 = 480$.

11. Vamos aplicar a propriedade: se $x, y \in \mathbb{R}$ então $x < y \iff x^3 < y^3$, fazendo $x = \sqrt[3]{a}$ e $y = \sqrt[3]{b}$.
 Se $\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{b} \in \mathbb{R}$ então $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b} \iff (\sqrt[3]{a})^3 < (\sqrt[3]{b})^3 \iff a < b$.

12. Vamos aplicar a propriedade: se $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y \geq 0$ então $x < y \iff x^2 < y^2$, fazendo $x = \sqrt{a}$ e $y = \sqrt{b}$.
 Se $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$ e $\sqrt{a}, \sqrt{b} \geq 0$ então $\sqrt{a} < \sqrt{b} \iff (\sqrt{a})^2 < (\sqrt{b})^2 \iff a < b$.

13. (a) $f(x) = x^a$ tem potência ímpar; $g(x) = x^b$ tem potência par; $h(x) = x^c$ tem potência par;
 $r(x) = x^d$ tem potência ímpar; $s(x) = x^e$ tem potência ímpar; $t(x) = x^f$ tem potência par.
 (b) $f(x) = x^a$ tem potência positiva; $g(x) = x^b$ tem potência nula; $h(x) = x^c$ tem potência positiva;
 $r(x) = x^d$ tem potência negativa; $s(x) = x^e$ tem potência positiva; $t(x) = x^f$ tem potência negativa.
 (c) Os gráficos são os das funções: $f(x) = x^a$; $r(x) = x^d$; $s(x) = x^e$.
 (d) As funções que admitem inversa são f , r , s .

Para $f(x) = x^a$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, a ímpar, temos que $y = x^a \iff y^{\frac{1}{a}} = (x^a)^{\frac{1}{a}} \iff y^{\frac{1}{a}} = x$,

logo a expressão da inversa é $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{y}$ ou $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{x}$.

Exemplo: $f(x) = x^5$, $x \in \mathbb{R}$, $5 > 0$, 5 é ímpar, temos que $y = x^5 \iff y^{\frac{1}{5}} = (x^5)^{\frac{1}{5}} \iff y^{\frac{1}{5}} = x$,

logo a expressão da inversa é $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{y}$ ou $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x}$.

Para $r(x) = x^d$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $d < 0$, d ímpar, temos que $y = x^d \iff y^{\frac{1}{d}} = (x^d)^{\frac{1}{d}} \iff y^{\frac{1}{d}} = x$.

Mas $d < 0 \iff -d > 0$, $d = -(-d)$, assim $x = y^{\frac{1}{d}} = y^{-\frac{1}{(-d)}} = y^{-\frac{1}{-d}} = \frac{1}{y^{\frac{1}{-d}}} = \frac{1}{\sqrt[(-d)]{y}}$,

logo a expressão da inversa é $r^{-1}(y) = y^{\frac{1}{d}} = \frac{1}{\sqrt[(-d)]{y}}$ ou $r^{-1}(x) = x^{\frac{1}{d}} = \frac{1}{\sqrt[(-d)]{x}}$.

Exemplo: $r(x) = x^{-5}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $-5 < 0$, -5 ímpar, temos que $y = x^{-5} \iff y^{\frac{1}{-5}} = (x^{-5})^{\frac{1}{-5}} \iff y^{\frac{1}{-5}} = x$.

Mas $-5 < 0 \iff -(-5) > 0$, $-5 = -(5)$, assim $x = y^{\frac{1}{-5}} = y^{-\frac{1}{(5)}} = y^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{y^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{y}}$,

logo a expressão da inversa é $r^{-1}(y) = y^{\frac{1}{-5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{y}}$ ou $r^{-1}(x) = x^{\frac{1}{-5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$.

Para $s(x) = x^e$, $x \in \mathbb{R}$, $e > 0$, e ímpar, já vimos que a expressão da inversa é $s^{-1}(y) = y^{\frac{1}{e}}$ ou $s^{-1}(x) = x^{\frac{1}{e}}$.

Observe que essa é a função $s(x) = x$, isto é, $e = 1$. A inversa é $s^{-1}(y) = y$ ou $s^{-1}(x) = x$

Justificativa de $e = 1$: o gráfico é uma reta e passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$.

- (e) Observe que $g(x) = 1$, isto é, $b = 0$. Justificativa: o gráfico é uma reta e passa pelos pontos $(-1, 1)$ e $(1, 1)$. Em qualquer subconjunto a função $g(x) = 1$ não será injetora, logo não é possível encontrar dois conjuntos disjuntos onde a função admite inversa.

Para $h(x) = x^c$, $c > 0$, c par, $x \in A = [0, \infty)$,

temos que $y = x^c \iff y^{\frac{1}{c}} = (x^c)^{\frac{1}{c}} \stackrel{c \text{ par}}{\iff} y^{\frac{1}{c}} = |x|^{\frac{x \geq 0}{\iff} \frac{1}{c}} = x$,

logo a expressão da inversa é $h^{-1}(y) = y^{\frac{1}{c}} = \sqrt[c]{y}$ ou $h^{-1}(x) = x^{\frac{1}{c}} = \sqrt[c]{x}$.

Exemplo: $h(x) = x^4$, $4 > 0$ e 4 par, $A = [0, \infty)$,

logo expressão da inversa é $h^{-1}(y) = y^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{y}$ ou $h^{-1}(x) = x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$.

Para $h(x) = x^c$, $c > 0$, c par, $x \in B = (-\infty, 0)$,

temos que $y = x^c \iff y^{\frac{1}{c}} = (x^c)^{\frac{1}{c}} \stackrel{c \text{ par}}{\iff} y^{\frac{1}{c}} = |x|^{\frac{x \leq 0}{\iff} \frac{1}{c}} = -x \iff -y^{\frac{1}{c}} = x$,

logo a expressão da inversa é $h^{-1}(y) = -y^{\frac{1}{c}} = -\sqrt[c]{y}$ ou $h^{-1}(x) = -x^{\frac{1}{c}} = -\sqrt[c]{x}$.

Exemplo: $h(x) = x^4$, $4 > 0$, 4 par, $x \in B = (-\infty, 0)$,

a expressão da inversa é $h^{-1}(y) = -y^{\frac{1}{4}} = -\sqrt[4]{y}$ ou $h^{-1}(x) = -x^{\frac{1}{4}} = -\sqrt[4]{x}$.

Para $t(x) = x^f$, $f < 0$, f par, $x \in A = (0, \infty)$,

temos que $y = x^f \iff y^{\frac{1}{f}} = (x^f)^{\frac{1}{f}} \stackrel{f \text{ par}}{\iff} y^{\frac{1}{f}} = |x|^{\frac{x > 0}{\iff} \frac{1}{f}} = x$,

Mas $f < 0 \iff -f > 0$, $f = -(-f)$, assim $x = y^{\frac{1}{f}} = y^{-\frac{1}{(-f)}} = y^{-\frac{1}{-f}} = \frac{1}{y^{\frac{1}{-f}}} = \frac{1}{\sqrt[-f]{y}}$,

logo a expressão da inversa é $t^{-1}(y) = y^{\frac{1}{f}} = \frac{1}{\sqrt[-f]{y}}$ ou $t^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt[-f]{x}}$.

Exemplo: $t(x) = x^{-4}$, $-4 < 0$ -4 é par, $x \in A = (0, \infty)$,

a expressão da inversa é $t^{-1}(y) = y^{\frac{1}{-4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{y}}$ ou $t^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$.

Para $t(x) = x^f$, $f < 0$, f par, $x \in B = (-\infty, 0)$,

temos que $y = x^f \iff y^{\frac{1}{f}} = (x^f)^{\frac{1}{f}} \stackrel{f \text{ par}}{\iff} y^{\frac{1}{f}} = |x|^{\frac{x < 0}{\iff} \frac{1}{f}} = -x \iff -y^{\frac{1}{f}} = x$.

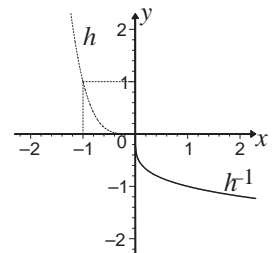
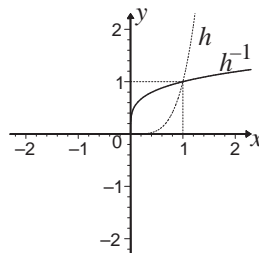
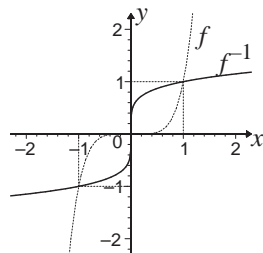
Mas $f < 0 \iff -f > 0$, $f = -(-f)$, assim $x = -y^{\frac{1}{f}} = -y^{-\frac{1}{(-f)}} = -y^{-\frac{1}{-f}} = -\frac{1}{y^{\frac{1}{-f}}} = -\frac{1}{\sqrt[-f]{y}}$,

logo a expressão da inversa é $t^{-1}(y) = -y^{\frac{1}{f}} = -\frac{1}{\sqrt[-f]{y}}$ ou $t^{-1}(x) = -\frac{1}{\sqrt[-f]{x}}$.

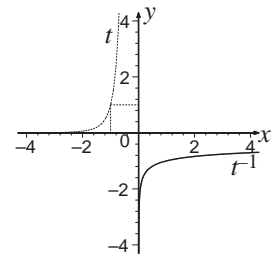
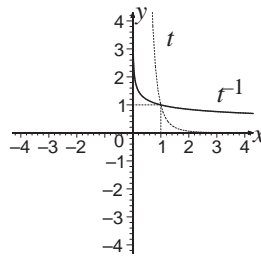
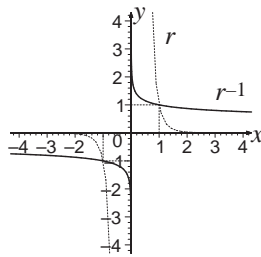
Exemplo: $t(x) = x^{-4}$, $-4 < 0$, -4 é par, $x \in B = (-\infty, 0)$,

a expressão da inversa é $t^{-1}(y) = -\left(y^{\frac{1}{-4}}\right) = -\left(y^{-\frac{1}{4}}\right) = -\frac{1}{\sqrt[4]{y}}$ ou $t^{-1}(x) = -\left(x^{-\frac{1}{4}}\right) = -\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$.

(f)



$$f(x) = x^a, \quad f^{-1}(x) = x^{1/a} = \sqrt[a]{x} \quad h(x) = x^c, \quad h^{-1}(x) = x^{1/c} = \sqrt[c]{x} \quad h(x) = x^c, \quad h^{-1}(x) = -x^{1/c} = -\sqrt[c]{x}$$



$$r(x) = x^d, \quad r^{-1}(x) = x^{-d} = \frac{1}{(-d)\sqrt[d]{x}}$$

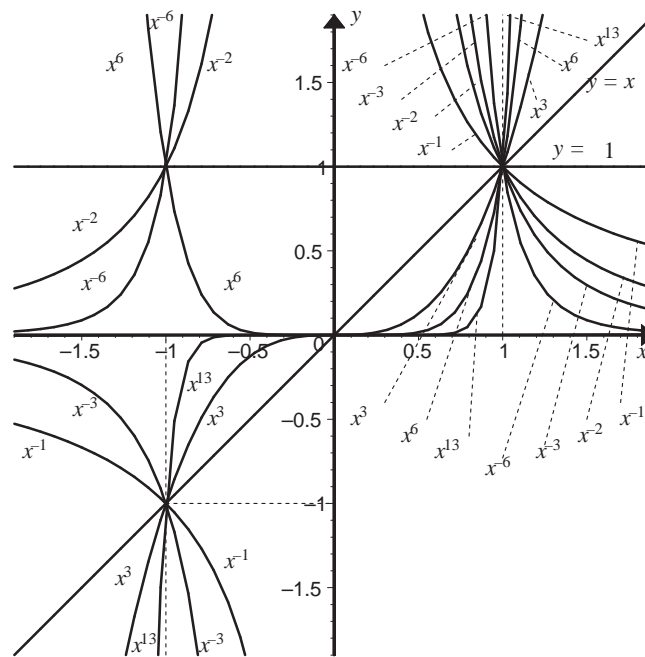
$$t(x) = x^f, \quad t^{-1}(x) = x^{-f} = \frac{1}{(-f)\sqrt[f]{x}}$$

$$t(x) = x^f,$$

$$t^{-1}(x) = -x^{\frac{1}{f}} = -\frac{1}{(-f)\sqrt[f]{x}}$$

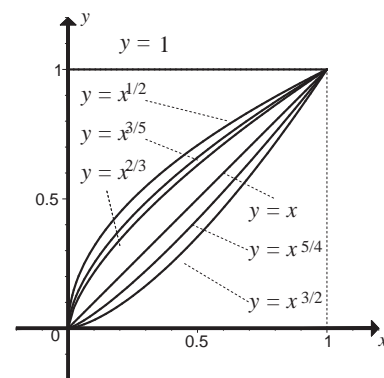
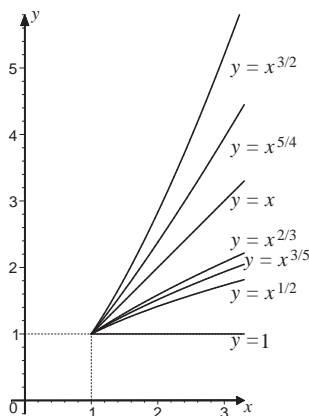
OBS. O gráfico da inversa da função $s^{-1}(x) = x$ é exatamente igual ao gráfico de $s(x) = x^e = x$.

14.



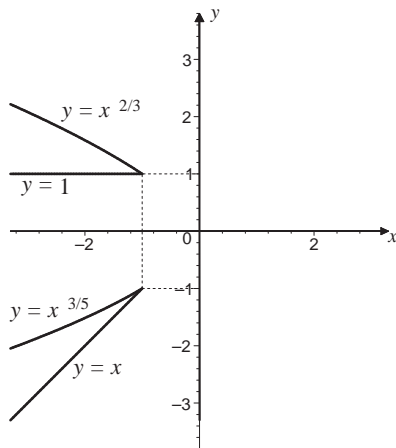
15. (a) $-\frac{7}{4} < -\frac{3}{2} < -\frac{2}{3} < -\frac{1}{2} < -\frac{2}{5} < 0 < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < 1 < \frac{5}{4} < \frac{3}{2}$

(b) i.

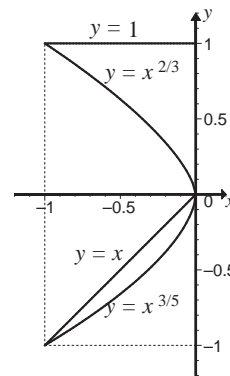


ii.

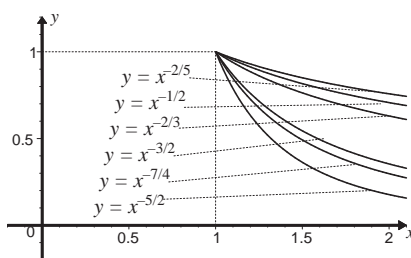
iii.



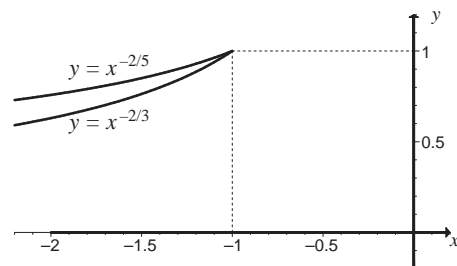
iv.



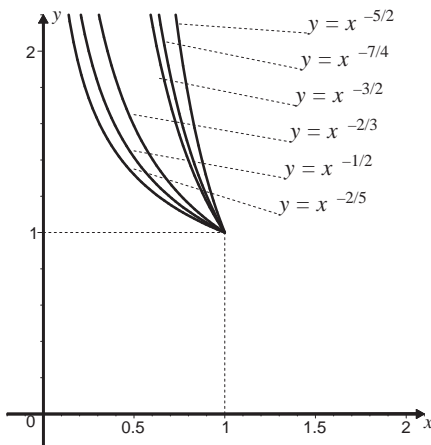
(c) i.



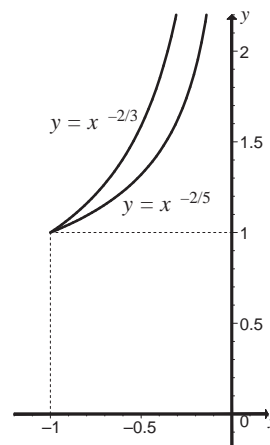
iii.



ii.



iv.



16. (a) Verdadeira. Base $b = 2 > 1$ e potências $p = 0,3$ e $q = 0,4$ onde $p < q$.

Para $b \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{Q}$, vale a propriedade: $b > 1$ e $p < q \implies b^p < b^q$

Essa propriedade também pode ser escrita como: para base maior do que 1, se as potências crescem então a base elevada às potências também cresce.

(b) Falsa. Base $b = \frac{1}{2} > 1$ e potências $p = 0,5$ e $q = 0,6$ onde $p < q$.

Para $b \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{Q}$, vale a propriedade: $0 < b < 1$ e $p < q \implies b^p > b^q$.

Essa propriedade também pode ser escrita como: para base maior do que 1, se as potências crescem então a base elevada às potências também cresce.

Outra justificativa: $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,5} < \left(\frac{1}{2}\right)^{0,6} \iff \frac{1^{0,5}}{2^{0,5}} < \frac{1^{0,6}}{2^{0,6}} \iff \frac{1}{2^{0,5}} < \frac{1}{2^{0,6}}$.

Como $2^{0,5} > 0$ e $2^{0,6} > 0$, podemos aplicar a propriedade da "multiplicação em cruz" nessa última desigualdade.

Isto é, $\frac{1}{2^{0,5}} < \frac{1}{2^{0,6}} \iff 2^{0,6} < 2^{0,5}$. Pela propriedade citada no item (a), essa última desigualdade é falsa.

Como há equivalência entre a primeira e a última desigualdade, conclui-se que a primeira desigualdade também é falsa.

(c) Verdadeira. Justificativa: a base é maior que 1 e as potências estão em ordem crescente.

(d) Falsa. Justificativa: sabemos que $7/4 = 1,75 > 1,4$.

Mas $\left(\frac{1}{3}\right)^{1,75} > \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4} \iff \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4} < \left(\frac{1}{3}\right)^{1,75} \iff \frac{1^{1,4}}{3^{1,4}} < \frac{1^{1,75}}{3^{1,75}} \iff 3^{1,75} < 3^{1,4}$. Essa desigualdade é falsa pois a base é maior do que 1 e as potências são decrescentes, a base elevada às potências deveria decrescer.

Como há equivalência entre a primeira e a última desigualdade, conclui-se que a primeira desigualdade também é falsa.

(e) Verdadeira. Justificativa: base $b = \pi > 1$, as potências crescem, $-2 < 2$, logo base elevada às potências também cresce.

(f) Verdadeira. Justificativa: $\left(\frac{1}{5}\right)^{-5} > \left(\frac{1}{5}\right)^5 \iff \frac{1}{5^{-5}} > \frac{1}{5^5} \iff 5^5 > \frac{1}{5^5} \iff 5^5 \cdot 5^5 > 1 \iff 5^{10} > 1$.

É claro que essa última desigualdade é verdadeira. Como há equivalência entre a primeira e a última desigualdade, conclui-se que a primeira desigualdade também é verdadeira.

(g) Falsa. Justificativa: sabemos que $3^0 = 1$. Logo, $3^{-1/5} > 1 \iff 3^{-1/5} > 3^0$. Essa última desigualdade é falsa, pois a base é maior do que 1 e a potência cresce, $-1/5 < 0$, logo a base elevada à potência deveria crescer.

Como há equivalência entre as desigualdades, conclui-se que a primeira desigualdade também é falsa.

(h) Falsa. Justificativa: sabemos que $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1,5} = \left(\frac{7}{3}\right)^{1,5}$, pois $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1,5} = \frac{1}{\left(\frac{3}{7}\right)^{1,5}} = \frac{1}{\frac{3^{1,5}}{7^{1,5}}} = \frac{7^{1,5}}{3^{1,5}} = \left(\frac{7}{3}\right)^{1,5}$.

Também sabemos que $\left(\frac{7}{3}\right)^0 = 1$. Logo, $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1,5} < 1 \iff \left(\frac{7}{3}\right)^{1,5} < \left(\frac{7}{3}\right)^0$. Essa última desigualdade é falsa, pois a base é maior do que 1 e a potência decresce, pois $1,5 > 0$, logo a base elevada à potência deveria decrescer.

Como há equivalência entre as desigualdades, conclui-se que a primeira desigualdade também é falsa.

(i) Falsa. Justificativa: $\left(\frac{1}{7}\right)^2 > 1 \iff \frac{1}{7^2} > 1 \iff 1 > 7^2$. Essa última desigualdade é claramente falsa.

Como há equivalência entre as desigualdades, conclui-se que a primeira desigualdade também é falsa.

(j) Falsa. Justificativa: $3^{-0,0001} = \frac{1}{3^{0,0001}}$. Como $3^{0,0001} > 0$, o seu elemento inverso, $\frac{1}{3^{0,0001}} > 0$.

(k) Verdadeira. Para justificar vamos usar duas propriedades, a saber,

P1: $a, b \in \mathbb{R}; a, b \geq 0$, vale a equivalência $a < b \iff a^2 < b^2$; P2: $a, b \in \mathbb{R}$, vale a equivalência $a < b \iff a^3 < b^3$.

Sabemos que $\sqrt[3]{11} = 11^{\frac{1}{3}}$ e $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$. Logo,

$$\sqrt[3]{11} < \sqrt{5} \iff 11^{\frac{1}{3}} < 5^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{P1} \left(11^{\frac{1}{3}}\right)^3 < \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^3 \iff 11 < 5^{\frac{3}{2}} \xrightarrow{P1} 11^2 < \left(5^{\frac{3}{2}}\right)^2 \iff 11^2 < 5^3 \iff 121 < 125.$$

Essa última desigualdade é claramente verdadeira.

Como há equivalência entre as desigualdades, conclui-se que a primeira desigualdade também é verdadeira.

(l) Verdadeira. Para justificar vamos usar as duas propriedades acima.

$$\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} \iff 2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}} \xrightarrow{P1} \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 < \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 \iff 2 < 3^{\frac{2}{3}} \xrightarrow{P2} 2^3 < \left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3 \iff 2^3 < 3^2 \iff 8 < 9.$$

Essa última desigualdade é claramente verdadeira.

Como há equivalência entre as desigualdades, conclui-se que a primeira desigualdade também é verdadeira.

17. (a) $(x - 4)^{2/3} = 100 \iff \left((x - 4)^{2/3}\right)^3 = 100^3 \iff (x - 4)^2 = 100^3 \iff (x - 4) = \pm\sqrt{100^3} \iff x = 4 \pm \sqrt{(10^2)^3} \iff x = 4 \pm 10^3 \iff x = 4 \pm 1000 \iff x = 1004 \text{ ou } x = 996$.

(b) $x^{4/3} - x^{2/3} = 2$. Usando a substituição $u = x^{2/3}$, temos que $u^2 = \left(x^{2/3}\right)^2 \iff u^2 = x^{4/3}$.

Fazendo a substituição, obtemos $u^2 - u = 2$. Resolvendo a equação do 2o. grau em u , obtemos $u = 2$ e $u = -1$.

Quando $u = 2$, temos $x^{2/3} = 2$. Resolvendo essa equação, $x^{2/3} = 2 \iff x^2 = 2^3 \iff x = \pm\sqrt{2^3} \iff x = \pm 2\sqrt{2}$.

Quando $u = -1$, temos $x^{2/3} = -1$. Resolvendo, $x^{2/3} = -1 \iff x^2 = (-1)^3 \iff x^2 = -1$, não há solução real.

Logo as soluções da equação são $x = 2\sqrt{2}$ e $x = -2\sqrt{2}$.

(c) $(4x^2 - 1)^{3/4} = 27$.

Nesta equação o denominador da potência é par, logo a base deverá ser positiva, vamos ter que testar a solução que encontraremos.

$$(4x^2 - 1)^{3/4} = 27 \iff (4x^2 - 1)^{3/4} = 3^3 \implies \left((4x^2 - 1)^{3/4}\right)^{4/3} = (3^3)^{4/3} \iff 4x^2 - 1 = 3^4 \iff 4x^2 = 1 + 81 \iff$$

$$4x^2 = 82 \iff x^2 = 82/4 \iff x = \pm\frac{\sqrt{82}}{2}. \text{ Testando essas soluções, temos } 4\left(\pm\frac{\sqrt{82}}{2}\right)^2 - 1 = 82 - 1 = 81 > 0.$$

Logo as soluções são $\frac{\sqrt{82}}{2}$ e $-\frac{\sqrt{82}}{2}$.

(d) $6x^{1/2} - x^{1/4} = 1$. Usando a substituição $u = x^{1/4}$, temos que $u^2 = \left(x^{1/4}\right)^2 \iff u^2 = x^{1/2}$.

Substituindo, obtemos $6u^2 - u = 1$. Resolvendo a equação do 2o. grau em u , obtemos $u = 1/2$ e $u = -1/3$.

Quando $u = 1/2$, temos $x^{1/4} = 1/2$. Resolvendo, $x^{1/4} = 1/2 \iff x = (1/2)^4 \iff x = 1/16$.

Quando $u = -1/3$, temos $x^{1/4} = -1/3$, não há solução real.

Logo a única solução da equação é $x = 1/16$.

(e) $x^{\frac{3}{2a}} - 8x^{-\frac{3}{2a}} = 7 \iff x^{\frac{3}{2a}} - \frac{8}{x^{\frac{3}{2a}}} = 7 \iff x^{\frac{6}{2a}} - 8 = 7x^{\frac{3}{2a}} \iff x^{\frac{3}{a}} - 7x^{\frac{3}{2a}} - 8 = 0.$

Fazendo $u = x^{\frac{3}{2a}}$, temos $u^2 = x^{\frac{3}{a}}$. Substituindo na equação, obtemos $u^2 - 7u - 8 = 0$, resolvendo, $u = 8$ ou $u = -1$.

Para $u = 8$, temos que $x^{\frac{3}{2a}} = 8$, resolvendo $x^{\frac{3}{2a}} = 8 \iff x^{\frac{3}{2a}} = 2^3 \iff x^{\frac{1}{2a}} = 2 \iff x = 2^{2a} \iff x = (2^2)^a \iff x = 4^a.$

Para $u = -1$, temos que $x^{\frac{3}{2a}} = -1$.

Mas, por hipótese, $a \in \mathbb{N}$, assim sabemos que $2a$ é par e $x^{\frac{3}{2a}} \geq 0$, isto é, não há solução quando $u = -1$.

18. (a) Podemos fazer $u = x^2$, $u^2 = x^4$ e substituir na equação. Obtemos $u^2 - u = y$ e podemos resolver u em termos de y .

Assim, $u^2 - u = y \iff u^2 - u - y = 0 \iff u = \frac{1 \pm \sqrt{1+4y}}{2}.$

Para que essa equação tenha solução é preciso que $1 + 4y \geq 0$. Mas $1 + 4y \geq 0 \iff 4y \geq -1 \iff y \geq -1/4$.

Quando $u = \frac{1 + \sqrt{1+4y}}{2}$, como $u = x^2$, temos que $x^2 = \frac{1 + \sqrt{1+4y}}{2}.$

Por outro lado, sabemos que $\sqrt{1+4y} \geq 0$, logo $1 + \sqrt{1+4y} \geq 1 > 0 \implies \frac{1 + \sqrt{1+4y}}{2} > 0.$

Assim, $\forall y \geq -1/4$, podemos resolver a equação acima, obtendo as soluções : $x = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1+4y}}{2}}$ e $x = -\sqrt{\frac{1 + \sqrt{1+4y}}{2}}.$

Quando $u = \frac{1 - \sqrt{1+4y}}{2}$, como $u = x^2$, temos que $x^2 = \frac{1 - \sqrt{1+4y}}{2}.$

Neste caso, não é para $\forall y \geq -1/4$ que $1 - \sqrt{1+4y} \geq 0$.

Precisamos resolver $1 - \sqrt{1+4y} \geq 0$. Resolvendo, $1 - \sqrt{1+4y} \geq 0 \iff -\sqrt{1+4y} \geq -1 \iff \sqrt{1+4y} \leq 1 \iff 1 + 4y \leq 1$

$\iff 4y \leq 0 \iff y \leq 0$. Assim, para $-1/4 \leq y \leq 0$ podemos resolver a equação acima, obtendo as soluções :

$x = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1+4y}}{2}}$ e $x = -\sqrt{\frac{1 - \sqrt{1+4y}}{2}}.$

- (b) Podemos fazer $u = x^{1/4}$, $u^2 = x^{1/2}$ e substituir na equação. Obtemos $u^2 - 2u = y$ e podemos resolver u em termos de y .

Assim, $u^2 - 2u = y \iff u^2 - 2u - y = 0 \iff u = \frac{2 \pm \sqrt{4+4y}}{2} \iff u = 1 \pm \sqrt{1+y}.$

Para que essa equação tenha solução é preciso que $1 + y \geq 0$. Mas $1 + y \geq 0 \iff y \geq -1$.

Quando $u = 1 + \sqrt{1+y}$, como $u = x^{1/4}$, precisamos resolver $x^{1/4} = 1 + \sqrt{1+y}.$

Neste caso, sabemos que $\sqrt{1+y} \geq 0$, logo $1 + \sqrt{1+y} \geq 1 > 0$.

Portanto podemos resolver a equação acima, obtendo a solução $x = (1 + \sqrt{1+y})^4.$

- (c) Podemos fazer $u = x^3$, $u^2 = x^6$ e substituir na equação. Obtemos $u^2 + u = y$ e podemos resolver u em termos de y .

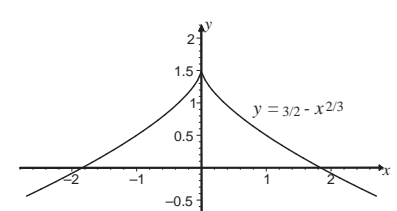
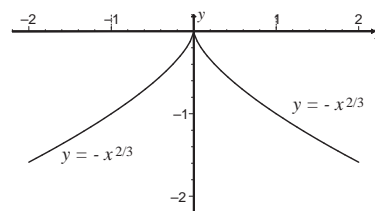
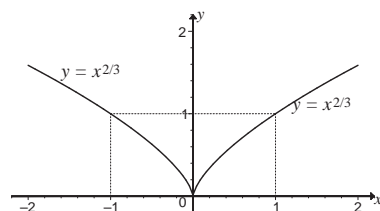
Resolvendo, $u^2 + u = y \iff u^2 + u - y = 0 \iff u = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4y}}{2}.$

Para que essa equação tenha solução é preciso que $1 - 4y \geq 0$. Mas $1 - 4y \geq 0 \iff -4y \geq -1 \iff y \leq 1/4$.

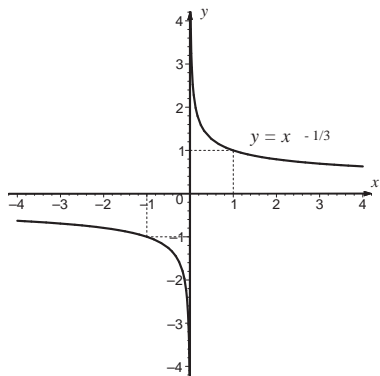
Quando $u = \frac{-1 + \sqrt{1-4y}}{2}$, temos que $x^3 = \frac{-1 + \sqrt{1-4y}}{2}.$

Para $y \leq 1/4$, as soluções são : $x = \sqrt[3]{\frac{-1 + \sqrt{1-4y}}{2}}$ e $x = \sqrt[3]{\frac{-1 - \sqrt{1-4y}}{2}}.$

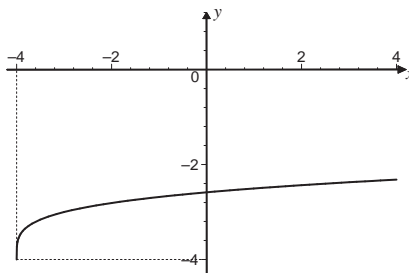
19. (a)



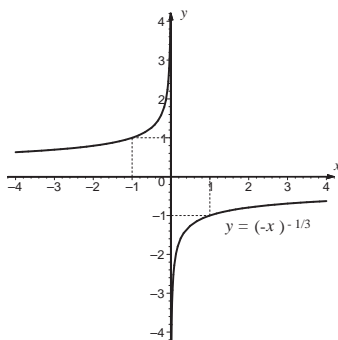
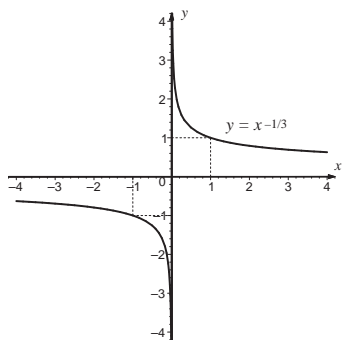
- (b)



$$y = (x + 4)^{1/4} - 4$$



(c)



$$y = -(x - 8)^{-1/3}$$

