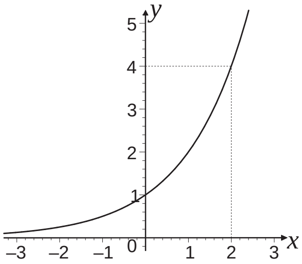
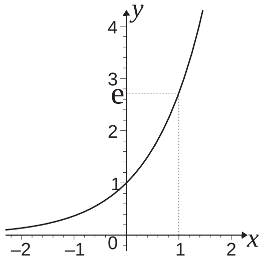
uff Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 6 - 2011-1
Função exponencial
Função logarítmica

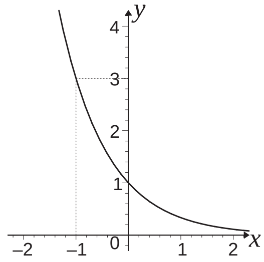
1. Cada figura abaixo representa o gráfico de uma função exponencial de *base* constante, *base* > 0, *base* $\neq 1$. Admita que nessas funções o domínio é igual a $\mathbb{R}$, o contradomínio é um subconjunto dos reais e coincide com a imagem.



$f(x) = a^x$



$g(x) = b^x$



$h(x) = c^x$

   (a) Sabe-se que $f(2) = 4$; $g(1) = e$; onde $e \simeq 2,7183$ é o número de Neper; $h(-1) = 3$.
   Encontre a base de cada função.
   (b) Esboce os gráficos das três funções em uma única figura.
   (c) Dê a expressão da inversa de cada função, considerando os valores das bases encontradas no item (a).
   (d) Esboce o gráfico da inversa de cada função.

2. Lembrando as definições de função crescente e função decrescente.
   Seja $y = f(x)$, $x \in A \subset \mathbb{R}$, a imagem $B \subset \mathbb{R}$ e o contradomínio cincide com a imagem.

   - A função f é dita crescente em A se para $\forall x_1, x_2 \in A;\ x_1 < x_2$, podemos provar que $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
   - A função f é dita decrescente em A se para $\forall x_1, x_2 \in A;\ x_1 < x_2$, podemos provar que $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

   Sabe-se que as funções $f(x) = e^x$ é crescente $\forall x \in \mathbb{R}$ e a função $g(x) = \ln x$ é crescente para $\forall x > 0,\ x \in \mathbb{R}$.
   Diga se cada função a seguir é crescente ou decrescente no intervalo dado. Justifique a resposta.

   (a) $h(x) = e^{-3x}, \quad x \in \mathbb{R}$
   (b) $F(x) = e^{6-3x}, \quad x \in \mathbb{R}$
   (c) $f(t) = e^{t^2}, \quad t > 0$.
   (d) $G(x) = \ln(x-4), \quad x > 4$.
   (e) $H(u) = -u - \ln(u), \quad u > 0$.
   (f) $r(x) = x\ln(x), \quad x \geq 1$.

3. Lembre que tanto qualquer função crescente será injetora, quanto qualquer função decrescente será injetora, pois
   se a função é crescente, para $x_1 \neq x_2$ e $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$;
   se a função é crescente, para $x_1 \neq x_2$ e $x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$;
   se a função é decrescente, para $x_1 \neq x_2$ e $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$;
   se a função é decrescente, para $x_1 \neq x_2$ e $x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

   Sabe-se que:
   $f(x) = a^x, \quad x \in \mathbb{R}$ é crescente se a base constante $a > 1$;
   $f(x) = a^x, \quad x \in \mathbb{R}$ é decrescente se a base constante a é tal que $0 < a < 1$;
   $f(x) = \log_a x, \quad x \in \mathbb{R},\ x > 0$ é crescente se a base constante $a > 1$;
   $f(x) = \log_a x, \quad x \in \mathbb{R},\ x > 0$ é decrescente se a base constante a é tal que $0 < a < 1$.

   Para cada função definida em $x \in A \subset \mathbb{R}$ e considerando que o contradomínio de cada função é igual a sua imagem, prove que as seguintes funções admitem inversa e em seguida encontre a expressão da inversa.

(a) $h(x) = 2^x - 4$

(b) $f(x) = 3 - \log_{10}(x-8)$

(c) $g(t) = \dfrac{1}{10^{t-5}}$

(d) $f(x) = \log_2(x) + \log_3(x)$

4. Resolva as equações abaixo usando as propriedades das funções exponenciais e logarítmicas.

(a) $\dfrac{6}{2^x - 1} = 1$

(b) $6 \cdot 3^{2x} + 3^x - 1 = 0$

(c) $(1/2)^{x^2} = 5$

(d) $\log_3(x-1) = 4$

(e) $\log_{10} x + 2\log_{10} 2 = 3$

(f) $x \log_3 x = \log_5 x$

(g) $\ln(\ln(x)) = 0$

5. Resolva as inequações para valores de $x \in \mathbb{R}$:

(a) $3e^x < 4$

(b) $\frac{1}{2} < \ln(x) < 4$

(c) $\log_{10}(x-4) > 0$

(d) $1 < 2^{-x} < 4$

6. Seja $f(x) = 4 - 3^{x-5}, \quad 0 \leq x \leq 10$ e considere o contradomínio de f igual a sua imagem.

(a) Use translações e reflexões para esboçar o gráfico de f.

(b) Dê a imagem de f.

(c) Verifique se f é crescente ou decrescente.

(d) Prove que f admite inversa.

(e) Encontre a expressão da inversa de f.

(f) Dê o domínio e a imagem da inversa de f.

(g) Esboce o gráfico da inversa de f.

7. Seja $f(x) = -3 + \ln(4-x)$, com domínio $A \subset \mathbb{R}$ e considere o contradomínio de f igual a sua imagem.

(a) Use translações e reflexões para esboçar o gráfico de f.

(b) Dê o domínio e a imagem de f.

(c) Verifique se f é crescente ou decrescente.

(d) Prove que f admite inversa.

(e) Encontre a expressão da inversa de f.

(f) Dê o domínio e a imagem da inversa de f.

(g) Esboce o gráfico da inversa de f.

8. (a) Coloque a seguinte lista em ordem crescente: $1; \quad \sqrt{2}; \quad \sqrt[3]{3}; \quad \sqrt[4]{4}; \quad \sqrt[5]{5}$.

(b) Para quais valores de $x \in \mathbb{R}$ as funções abaixo estão bem definidas?
$y = x^{\sqrt{2}}; \quad y = x^{\sqrt[3]{3}}; \quad y = x^{\sqrt[4]{4}}; \quad y = x^{\sqrt[5]{5}}$

(c) Esboce o gráfico de cada função do item anterior.

(d) Para valores de $x > 1$, escreva a seguinte lista em ordem crescente: $x^{\sqrt{2}}; \quad x^{\sqrt[3]{3}}; \quad x; \quad x^{\sqrt[4]{4}}; \quad x^{\sqrt[5]{5}}$

(e) Para valores de $0 < x < 1$, escreva a seguinte lista em ordem crescente: $x^{\sqrt{2}}; \quad x^{\sqrt[3]{3}}; \quad x; \quad x^{\sqrt[4]{4}}; \quad x^{\sqrt[5]{5}}$