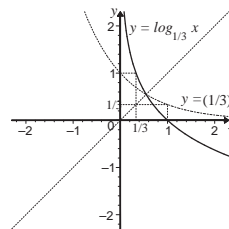
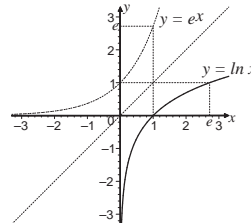
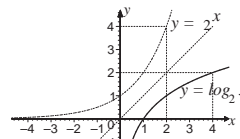
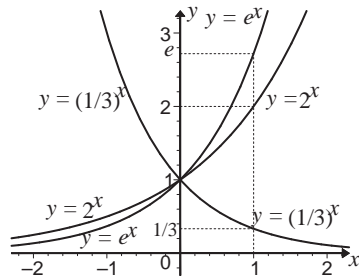


RESPOSTAS DA LISTA 6 (alguns estão com a resolução ou o resumo da resolução):

1. (a) $a = 2$; $b = e$; $c = \frac{1}{3}$

(b)



(c) $f(x) = 2^x$; $f^{-1}(x) = \log_2 x$.

$g(x) = e^x$; $g^{-1}(x) = \log_e x = \ln x$.

$h(x) = (\frac{1}{3})^x$; $h^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$.

(d)

2. (a) $x_1 < x_2 \implies 3x_1 < 3x_2 \implies -3x_1 > -3x_2 \implies -3x_2 < -3x_1 \implies e^{-3x_2} < e^{-3x_1} \implies e^{-3x_1} > e^{-3x_2} \implies h(x_1) > h(x_2)$.

(b) $x_1 < x_2 \implies 3x_1 < 3x_2 \implies -3x_1 > -3x_2 \implies -3x_2 < -3x_1 \implies 6 - 3x_2 < 6 - 3x_1 \implies e^{6-3x_2} < e^{6-3x_1} \implies e^{6-3x_1} > e^{6-3x_2} \implies F(x_1) > F(x_2)$. Logo F é decrescente.

(c) $t_1 < t_2, t_1, t_2 > 0 \implies t_1^2 < t_2^2 \implies f(t_1) < f(t_2)$. Logo f é crescente.

(d) $x_1 < x_2 \implies x_1 - 4 < x_2 - 4 \implies \ln(x_1 - 4) < \ln(x_2 - 4) \implies G(x_1) < G(x_2)$. Logo G é crescente.

(e) $u_1 < u_2 \implies u_1 < u_2$ e $\ln(u_1) < \ln(u_2) \implies u_1 + \ln(u_1) < u_2 + \ln(u_2) \implies -(u_1 + \ln(u_1)) > -(u_2 + \ln(u_2)) \implies -u_1 - \ln(u_1) > -u_2 - \ln(u_2) \implies H(u_1) > H(u_2)$. Logo H é decrescente.

(f) Sabemos que $x \geq 1 \implies \ln(x) \geq 0$. Assim,

$0 < 1 \leq x_1 < x_2 \implies \begin{cases} 0 < x_1 < x_2 \\ 0 \leq \ln(x_1) < \ln(x_2) \end{cases} \implies x_1 \ln(x_1) < x_2 \ln(x_2) \implies r(x_1) < r(x_2)$. Logo r é crescente.

3. (a) $x_1 < x_2$, base $= 2 > 1 \implies 2^{x_1} < 2^{x_2} \implies 2^{x_1} - 4 < 2^{x_2} - 4 \implies h(x_1) < h(x_2) \implies h$ é crescente $\implies h$ é injetora.

Por hipótese, o contradomínio é igual a sua imagem, logo h também é sobrejora. Assim h é sobrejora e injetora, isto é, h é bijetora e inversível.

$y = 2^x - 4 \iff y + 4 = 2^x \iff \log_2(y + 4) = \log_2(2^x) \iff \log_2(y + 4) = x \implies h^{-1}(y) = \log_2(y + 4)$ ou $h^{-1}(x) = \log_2(x + 4)$.

(b) $x_1 < x_2 \implies x_1 - 8 < x_2 - 8 \implies \log_{10}(x_1 - 8) < \log_{10}(x_2 - 8) \implies -\log_{10}(x_1 - 8) > -\log_{10}(x_2 - 8) \implies 3 - \log_{10}(x_1 - 8) > 3 - \log_{10}(x_2 - 8) \implies f(x_1) > f(x_2) \implies f$ é decrescente $\implies f$ é injetora.

Por hipótese, o contradomínio é igual a sua imagem, logo f também é sobrejora. Assim f é sobrejora e injetora, isto é, f é bijetora e inversível.

$y = 3 - \log_{10}(x - 8) \implies y - 3 = -\log_{10}(x - 8) \implies 3 - y = \log_{10}(x - 8) \implies 10^{3-y} = 10^{\log_{10}(x-8)} \implies 10^{3-y} = x - 8 \implies 10^{3-y} + 8 = x \implies f^{-1}(y) = 8 + 10^{3-y}$ ou $f^{-1}(x) = 8 + 10^{3-x}$.

(c) $t_1 < t_2 \implies t_1 - 5 < t_2 - 5 \implies e^{t_1-5} < e^{t_2-5}$. Sabemos que $e^{t_1-5} > 0$ e $e^{t_2-5} > 0$ pois $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Assim,

$e^{t_1-5} < e^{t_2-5} \implies \frac{1}{e^{t_2-5}} < \frac{1}{e^{t_1-5}} \implies \frac{1}{e^{t_1-5}} > \frac{1}{e^{t_2-5}} \implies g(t_1) > g(t_2) \implies g$ é decrescente $\implies g$ é injetora.

Por hipótese, o contradomínio é igual a sua imagem, logo g também é sobrejora. Assim g é sobrejora e injetora, isto é, g é bijetora e inversível.

$y = \frac{1}{10^{t-5}} \iff 10^{t-5} = \frac{1}{y} \iff \log_{10} 10^{t-5} = \log_{10} \frac{1}{y} \iff t - 5 = \log_{10} \frac{1}{y} \iff t = 5 + \log_{10} \frac{1}{y} \iff$

$t = 5 + \log_{10} 1 - \log_{10} y \stackrel{\log_{10} 1 = 0}{\iff} t = 5 - \log_{10} y$. Logo $g^{-1}(y) = 5 - \log_{10} y$ ou $g^{-1}(t) = 5 - \log_{10} t$.

(d) $x_1 < x_2$, base $2 > 1$ e base $3 > 1 \implies \begin{cases} \log_2 x_1 < \log_2 x_2 \\ \log_3 x_1 < \log_3 x_2 \end{cases} \implies \log_2 x_1 + \log_3 x_1 < \log_2 x_2 + \log_3 x_2 \implies f$ é crescente $\implies f$ é injetora.

Por hipótese, o contradomínio é igual a sua imagem, logo g também é sobrejora. Assim f é sobrejora e injetora, isto é, f é bijetora e inversível.

(e) $y = \log_2 x + \log_3 x \iff y = \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 3} \iff y = \left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} \right) \ln x \iff y = \frac{\ln 3 + \ln 2}{\ln 2 \ln 3} \ln x \iff \frac{\ln 2 \ln 3}{\ln 2 + \ln 3} y = \ln x \iff e^{\frac{\ln 2 \ln 3}{\ln 2 + \ln 3} y} = e^{\ln x} \iff e^{\frac{\ln 2 \ln 3}{\ln 2 + \ln 3} y} = x$. Logo, $f^{-1}(y) = e^{\frac{\ln 2 \ln 3}{\ln 2 + \ln 3} y}$ ou $f^{-1}(x) = e^{\frac{\ln 2 \ln 3}{\ln 2 + \ln 3} x}$.

4. (a) $\frac{6}{2^x - 1} = 1 \iff 2^x - 1 = 6 \iff 2^x = 7 \iff \log_2 2^x = \log_2 7 \iff x = \log_2 7$.

(b) Fazendo $u = 3^x$, temos que $u^2 = (3^x)^2 = 3^{2x}$. Substituindo na equação dada, obtemos $6u^2 + u - 1$. Resolvendo essa equação em u , obtemos $u = \frac{1}{3}$ e $u = -\frac{1}{2}$.

Quando $u = \frac{1}{3}$, como $u = 3^x$, temos que $3^x = \frac{1}{3}$. Resolvendo em x , $3^x = \frac{1}{3} \iff 3^x = 3^{-1} \iff x = -1$.

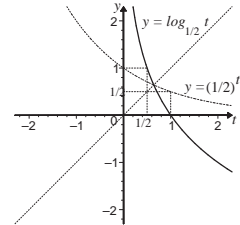
Quando $u = -\frac{1}{2}$, como $u = 3^x$, temos que $3^x = -\frac{1}{2}$, não há solução real pois sabemos que $3^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

(c) $(\frac{1}{2})^{x^2} = 5 \iff \log_{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2})^{x^2} = \log_{\frac{1}{2}} 5 \iff x^2 = \log_{\frac{1}{2}} 5 \iff x = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} 5}$ ou $x = -\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} 5}$.

Esses valores de x são números reais se e só se $\log_{\frac{1}{2}} 5 > 0$. Precisamos verificar se $\log_{\frac{1}{2}} 5 > 0$ ou se $\log_{\frac{1}{2}} 5 < 0$.

Observando o gráfico ao lado, vemos que $\log_{\frac{1}{2}} < 0, \forall t > 1 \implies \log_{\frac{1}{2}} 5 < 0$.

Logo a equação não tem solução.



(d) $\log_3(x - 1) = 4 \iff 3^{\log_3(x-1)} = 3^4 \iff x - 1 = 3^4 \iff x = 1 + 81 \iff x = 82$.

(e) $\log_{10} x + 2 \log_{10} 2 = 3 \iff \log_{10} x + \log_{10} 2^2 = 3 \iff \log_{10} x \cdot 2^2 = 3 \iff \log_{10} 4x = 3 \iff 10^{(\log_{10} 4x)} = 10^3 \iff 4x = 1000 \iff x = 250$.

(f) $x \log_3 x = \log_5 x \iff x \cdot \frac{\ln x}{\ln 3} = \frac{\ln x}{\ln 5} \iff x \cdot \frac{\ln x}{\ln 3} - \frac{\ln x}{\ln 5} = 0 \iff (\frac{x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 5}) \cdot \ln x = 0 \iff \frac{x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 5} = 0$ ou $\ln x = 0$.

Resolvendo cada equação,

$\frac{x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 5} = 0 \iff \frac{x}{\ln 3} = \frac{1}{\ln 5} \iff x = \frac{\ln 3}{\ln 5}$ ou $\ln x = 0 \iff x = 1$.

(g) $\ln(\ln x) = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e$.

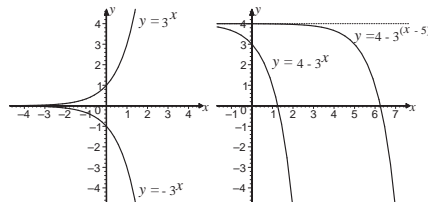
5. (a) $3e^x < 4 \iff e^x < \frac{4}{3} \iff \ln(e^x) < \ln(\frac{4}{3}) \iff x < \ln(\frac{4}{3})$.

(b) $\frac{1}{2} < \ln(x) < 4 \iff e^{\frac{1}{2}} < e^{\ln(x)} < e^4 \iff e^{\frac{1}{2}} < x < e^4$.

(c) $\log_{10}(x - 4) > 0 \iff 10^{(\log_{10}(x-4))} > 10^0 \iff x - 4 > 1 \iff x > 5$.

(d) $1 < 2^{-x} < 4 \iff 2^0 < 2^{-x} < 2^2 \iff 0 < -x < 2 \iff -0 > x > -2 \iff -2 < x < 0$.

6. (a)



(b) $D_f = \mathbb{R}; I_f = (-\infty, 4)$.

(c) É decrescente pois $x_1 < x_2 \implies x_1 - 5 < x_2 - 5 \implies e^{(x_1-5)} < e^{(x_2-5)} \implies -e^{(x_1-5)} > -e^{(x_2-5)} \implies 4 - e^{(x_1-5)} > 4 - e^{(x_2-5)} \implies f(x_1) > f(x_2)$.

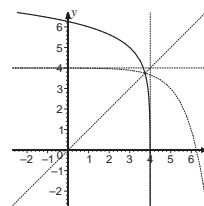
(d) Se f é decrescente então f é injetora. Por hipótese, o contradomínio de f é igual a sua imagem, logo f é sobrejetora.

Logo f sendo injetora e sobrejetora, por definição, é bijetora. Se f é bijetora então f admite inversa (teorema).

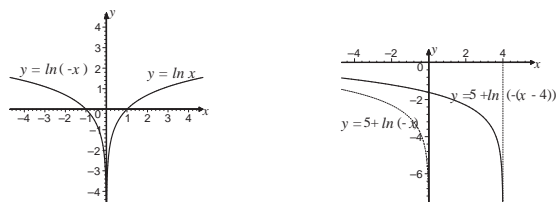
(e) $y = 4 - 3^{(x-5)} \iff y - 4 = -3^{(x-5)} \iff 4 - y = 3^{(x-5)} \iff \log_3(4 - y) = \log_3 3^{(x-5)} \iff \log_3(4 - y) = x - 5 \iff x = 5 + \log_3(4 - y) \iff f^{-1}(y) = 5 + \log_3(4 - y)$ ou $f^{-1}(x) = 5 + \log_3(4 - x)$.

(f) $D_{f^{-1}} = I_f = (-\infty, 4); I_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R}$.

(g)



7. (a)



(b) $D_f = (-\infty, 4), I_f = \mathbb{R}$

(c) É decrescente pois $x_1 < x_2 \implies -x_1 > -x_2 \implies 4 - x_1 > 4 - x_2 \implies \ln(4 - x_1) > \ln(4 - x_2) \implies -3 + \ln(4 - x_1) > -3 + \ln(4 - x_2) \implies f(x_1) > f(x_2)$.

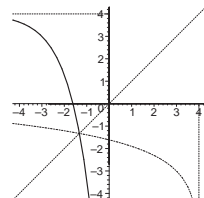
(d) Se f é decrescente então f é injetora. Por hipótese, o contradomínio de f é igual a sua imagem, logo f é sobrejetora.

Logo f sendo injetora e sobrejetora, por definição, é bijetora. Se f é bijetora então f admite inversa (teorema).

(e) $y = -3 + \ln(4 - x) \iff y + 3 = \ln(4 - x) \iff e^{(y+3)} = e^{\ln(4-x)} \iff e^{(y+3)} = 4 - x \iff x = 4 - e^{(y+3)} \iff f^{-1}(y) = 4 - e^{(y+3)}$ ou $f^{-1}(x) = 4 - e^{(x+3)}$

(f) $D_{f^{-1}} = I_f = \mathbb{R}, I_{f^{-1}} = D_f = (-\infty, 4)$

(g)



8. (a) $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} \iff 2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}}$. Como $2^{\frac{1}{2}} > 0$ e $3^{\frac{1}{3}} > 0$ podemos elevar à potência $6 = mmc(2, 3)$, a desigualdade se preserva. Logo $2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}} \iff (2^{\frac{1}{2}})^6 < (3^{\frac{1}{3}})^6 \iff 2^3 < 3^2 \iff 8 < 9$. Como essa desigualdade é verdadeira e há equivalência entre a primeira e a última, temos que a primeira é verdadeira, isto é, $\boxed{\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}}$.

$\sqrt[4]{4} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. Logo $\boxed{\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}}$.

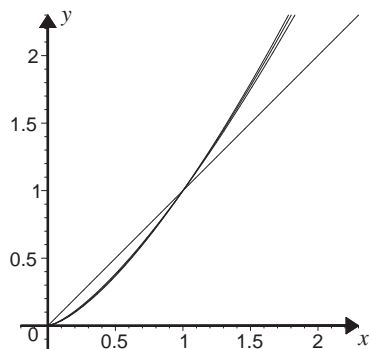
$\sqrt{2} < \sqrt[5]{5} \iff 2^{\frac{1}{2}} < 5^{\frac{1}{5}} \iff (2^{\frac{1}{2}})^{10} < (5^{\frac{1}{5}})^{10} \iff 2^5 < 5^2 \iff 32 < 25$.

Há equivalência entre a primeira e última desigualdade, a última é falsa, logo a primeira é falsa, isto é, $\boxed{\sqrt{2} > \sqrt[5]{5}}$

Assim a lista ordenada é $1 < \sqrt[5]{5} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$.

(b) $x \in \mathbb{R}; x > 0$

(c)



(d) Quando $x > 1$: $x < x^{\frac{5}{5}} < x^{\sqrt{2}} < x^{\frac{3}{3}}$

(e) Quando $0 < x < 1$: $x^{\frac{3}{3}} < x^{\sqrt{2}} < x^{\frac{5}{5}} < x$