uff Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 7 - 2011-1

Binômio de Newton
Série Geométrica

1. Supondo que os coeficentes do binômio de Newton são denominados $a_0,\ \ a_1,\ \ a_2,\ \cdots, a_{n-2},\ \ a_{n-2},\ \ ,\ \ a_n$, prove que o coeficiente a_i é igual ao coeficiente a_{n-i} para qualquer $i = 0, \cdots, n$.

2. Qual o coeficiente de x^5 no polinômio $(3x-2)^7$?

3. Qual o coeficiente de a^4b^4 no desenvolvimento de $(a+2b-1)^8$?

4. Uma forma de provar o Binômio de Newton é provando primeiro que
$(1+x)^n = \left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array}\right) x + \left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array}\right) x^2 + \cdots + \left(\begin{array}{c} n \\ n-1 \end{array}\right) x^{n-1} + \left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array}\right) x^n.$
Supondo provada a fórmula acima e supondo que $a \neq 0$, faça $x = \dfrac{b}{a}$ e prove o Binõmio de Newton:
$(a+b)^n = \left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array}\right) a^n + \left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array}\right) a^{n-1}b + \left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array}\right) a^{n-2}b^2 + \cdots + \left(\begin{array}{c} n \\ n-1 \end{array}\right) ab^{n-1} + \left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array}\right) b^n.$

5. Use o Binômio de Newton para provar que
$$\sqrt[n]{a+b} < \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}, \qquad \forall\ a, b \in \mathbb{R},\ \ a > 0,\ \ b > 0,\ \ n \in \mathbb{N}$$

6. Em análise combinatória foi visto que a combinação de n elementos p a p é calculada pela fórmula $\left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array}\right) = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.
De um conjunto A de n elementos, podemos formar subconjuntos com p elementos. O número de subconjuntos com p elementos é a combinação de n elementos p a p.
O conjunto das partes de A denotado por $\mathcal{P}(A)$ é o conjunto formado por todos os subconjuntos de A (lembre que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto).
   (a) Use o Binômio de Newton para obter uma fórmula para 2^n em termos de $\left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array}\right)$, $i = 0, \cdots, n$.
   (b) Verifique que o número de elementos de $\mathcal{P}(A)$ é igual a 2^n.

7. Diga quais das séries geométricas a seguir são convergentes e calcule o valor das convergentes.
   (a) $\dfrac{19}{20} + \dfrac{19^2}{20^2} + \dfrac{19^3}{20^3} + \cdots$
   (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{20}{19}\right)^i$
   (c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{11\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}\right)^i$
   (d) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{27} + \cdots$
   Sugestão: reescreva como diferença entre duas séries geométricas.

8. Encontre os valores de x para os quais a série geométrica é convergente. Quando convergente, calcule o valor da série em termos de x na forma mais simplificada possível.
   (a) $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \cdots$
   (b) $3 + \dfrac{9}{x} + \dfrac{27}{x^2} + \dfrac{81}{x^3} \cdots$
   (c) $1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^4} - \dfrac{1}{x^5} + \cdots$
   (d) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{8} + \dfrac{x^4}{16} + \dfrac{x^5}{32} + \cdots$

(e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^i$

(f) $\displaystyle\sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^i$

9. Resolva a equação ou inequação considerando os valores de x para os quais a série geométrica da expressão da equação ou inequação é uma série convergente.

   (a) $1+2x+4x^2+8x^3+\cdots=2$ Observe o item 8(a).

   (b) $-3<1+2x+4x^2+8x^3+\cdots<3$ Observe o item 8(a).

   (c) $3+\dfrac{9}{x}+\dfrac{27}{x^2}+\dfrac{81}{x^3}\cdots\leq x$ Observe o item 8(b).

   (d) $\displaystyle\sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^i\geq\frac{x^2}{x-4}$ Observe o item 8(f).

10. Considere a equação

$$1+\left(2-\frac{3}{x}\right)+\left(2-\frac{3}{x}\right)^2+\left(2-\frac{3}{x}\right)^3+\cdots=8+8\left(1-\frac{4}{x}\right)+8\left(1-\frac{4}{x}\right)^2+8\left(1-\frac{4}{x}\right)^3+\cdots$$

   (a) Suponha convergentes as séries da equação e resolva-a.

   (b) Verifique se com cada valor de x encontrado, as séries de fato são convergentes.

11. Considere a equação

$$1+\left(2-\frac{3}{x}\right)+\left(2-\frac{3}{x}\right)^2+\left(2-\frac{3}{x}\right)^3+\cdots=1+\left(1-\frac{4}{x}\right)+\left(1-\frac{4}{x}\right)^2+\left(1-\frac{4}{x}\right)^3+\cdots$$

   (a) Suponha convergentes as séries da equação e resolva-a.

   (b) Verifique se com cada valor de x encontrado, as séries de fato são convergentes.