SUPERFÍCIES QUÁDRICAS
Notas de aula - professora Marlene

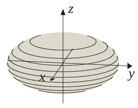
As formas canônicas da equação de 2^o. grau a três variáveis

Para facilitar a compreensão, as formas canônicas estão agrupadas em 3 tipos de equações (I, II e III).

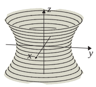
Seja $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \ x, y \text{ e } z \text{ satisfazem a equação canônica dada}\}$ o conjunto solução da equação. Ver procedimento para identificar as representações geométricas deste conjunto solução, após a descrição de todas as formas canônicas.

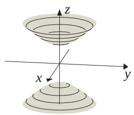
(I) Aparecem as três variáveis

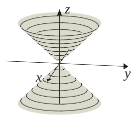
(I.a) Os coeficientes de $x^2,\ y^2$ e z^2 são <u>todos não nulos</u>.

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$  *elipsóide* (a, b e c não iguais) *esfera* ($a = b = c$)

2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ $\emptyset$

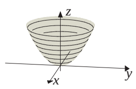
3. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$  *hiperbolóide de uma folha*

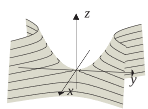
4. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$  *hiperbolóide de duas folhas*

5. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$  *cone de duas folhas*

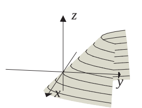
6. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ $(0,0,0)$ *ponto*

(I.b) <u>Apenas um</u> dos coeficientes de $x^2,\ y^2$ e z^2 é <u>nulo</u>.

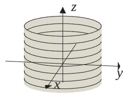
7. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - cz = 0$  *parabolóide elíptico* ($a \neq b$) *parabolóide circular* ($a = b$)

8. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - cz = 0$  *parabolóide hiperbólico* (*sela*)

(I.c) <u>Um</u> dos coeficientes de $x^2,\ y^2$ e z^2 <u>não é nulo</u> e os <u>outros dois são nulos</u>.

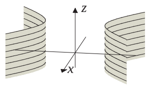
9. $\dfrac{x^2}{a^2} - by - cz = 0$  *calha parabólica*

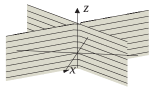
(II) Aparecem apenas duas das variáveis.

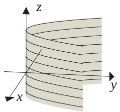
10. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$  *cilindro elíptico* ($a \neq b$) *cilindro circular* ($a = b$)

11. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ $\emptyset$

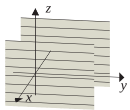
12. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ eixo z *reta*

13. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$  *cilindro hiperbólico*

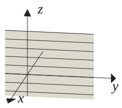
14. item $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$  *par de planos concorrentes em uma reta*

15. $y^2 - cx = 0$  *cilindro parabólico*

(III) Aparece apenas uma variável

16. $x^2 - a^2 = 0$  *par de planos paralelos*

17. $x^2 + a^2 = 0$ $\emptyset$

18. $x^2 = 0$  *um só plano*

OBSERVAÇÃO: As equações dos grupos (I) e (II) serão as mais usadas. As equações 2, 11 e 17 não admitem solução. As equações 6 e 12 apresentam soluções qua não são superfícies, são chamadas de soluções degeneradas.

Procedimento para identificar a superfície que uma equação do $2^{o.}$ grau representa.

i) Dada uma equação qualquer do $2^{o.}$ grau, após algum manuseio algébrico, a equação recairá numa das formas canônicas no novo sistema de coordenadas.

A primeira etapa é completar os quadrados. Por exemplo, se na equação aparece $x^2 + x$, após completar o quadrado, $x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$. Chame $\left(x + \frac{1}{2}\right) = x'$, que é uma translação paralela ao eixo x de $-\frac{1}{2}$. Se na equação aparece algum termo retangular, a saber xy, xz ou yz, há uma rotação de um plano coordenado em relação ao eixo coordenado que não está neste plano. Por exemplo, a ocorrência do termo yz, corresponde a uma rotação do plano yz em torno do eixo x.

ii) Depois que a equação está em uma das formas canônicas, o primeiro passo é verificar se é uma das formas degeneradas, facilmente reconhecíveis. A seguir, identificar se é um plano ou par de planos, isto é, identificar se a equação recai em uma ou duas equações de $1^{o.}$ grau.

Se não é degenerada, nem plano ou planos, para reconhecer a superfície que a equação representa, uma ou mais de uma das seguintes etapas são recomendadas.

- Interseção com os eixos coordenados
  (interseção com o eixo x: $y = z = 0$, obtém-se x); (interseção com o eixo y: $x = z = 0$, obtém-se y); (interseção com o eixo z: $x = y = 0$, obtém-se z)
- Interseção com os planos coordenados
  (interseção com o plano xy: z=0, obtém-se uma equação em x e y, que é uma curva no plano xy);
  (interseção com o plano xz: y=0, obtém-se uma equação em x e z, que é uma curva no plano xz);
  (interseção com o plano yz: x=0, obtém-se uma equação em y e z, que é uma curva no plano yz);
- Interseção com planos paralelos aos planos coordenados
  (para cada k, interseção com o plano paralelo ao plano xy: $z = k$, obtém-se uma equação em x e y, que é uma curva no plano $z = k$);
  (para cada k, interseção com o plano paralelo ao plano xz: $y = k$, obtém-se uma equação em x e z, que é uma curva no plano $y = k$);
  (para cada k, interseção com o plano paralelo ao plano yz: $x = k$, obtém-se uma equação em y e z, que é uma curva nos planos $x = k$);
- Para cada a, $y = ax$ é um plano vertical contendo a origem. Se fazemos $x = t$ e $y = at$, obtém-se uma equação em z e t, que é uma curva no plano vertical.

Exemplos: serão vistos em aula.

Exercícios: para cada forma canônica, escolha valores para as constantes e siga o procedimento para concluir que a superfície é de fato do tipo da que está esboçada.