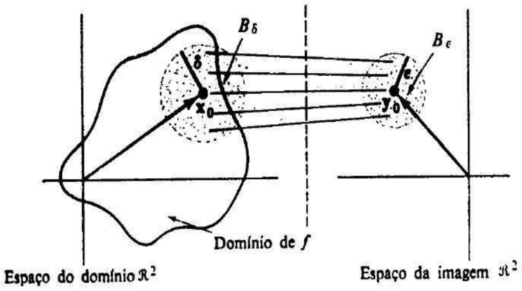
# Aula 21 – Limites e Continuidade

## Introdução

Limites e continuidade foram introduzidas para funções reais $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nas aulas 3 e 4. Nesta aula estudaremos as definições destes conceitos para funções vetoriais reais $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m, n \in \mathbb{N}$ e $m \geq 2$.

Definição 1

Considere $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $x_0 = (x_1, \cdots, x_n)$ um ponto de acumulação de $U$. Dizemos então que $y_0 = (y_1, \cdots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ é o limite de $f$ em $x_0$ se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - y_0\| < \varepsilon$ sempre que $0 < \|x - x_0\| < \delta$. Neste caso denotamos $y_0 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.




caso $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Observe que a definição de limite para funções vetoriais é, em essência, a mesma que fizemos para as funções reais, o que difere são as dimensões dos contra-domínios e suas respectivas normas. A expressão $\|f(x) - y_0\|$ representa a distância entre dois vetores do $\mathbb{R}^m$, isto é,

$$\|f(x) - y_0\| = \sqrt{(f_1(x) - y_1)^2 + \cdots + (f_m(x) - y_m)^2}\,,$$

em que $f_1(x), \cdots, f_m(x)$ são as funções coordenadas de $f$.

Note ainda que a distância

$$\begin{aligned} \|f(x) - y_0\| &= \sqrt{(f_1(x) - y_1)^2 + \cdots + (f_m(x) - y_m)^2} \\ &\geq \sqrt{(f_i(x) - y_i)^2} \qquad (1) \\ &= |f_i(x) - y_i| \end{aligned}$$

com $i = 1, \cdots, m$, e que

$$\|f(x) - y_0\| \leq \sqrt{m} \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ |f_i(x) - y_i| \right\} \qquad (2)$$

Usando a desigualdade (1) podemos concluir que se $\lim\limits_{x\to x_0} \|f(x)-y_0\| = 0$, então $\lim\limits_{x\to x_0} |f_i(x) - y_i| = 0$ para cada função coordenada $f_i$, $i = 1, \cdots m$; isto é, se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$, então $\lim\limits_{x\to x_0} f_i(x) = y_i$, $i = 1 \cdots, m$.

Por outro lado, usando a desigualdade (2), podemos concluir que se $\lim\limits_{x\to x_0} |f_i(x) - y_i| = 0$, para $i = 1, \cdots, m$, então $\lim\limits_{x\to x_0} \|f(x) - y_0\| = y_0$. Isto posto, podemos enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 1**

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, com funções coordenadas $f_1, \cdots, f_m$, $x_0$ um ponto de acumulação de $U$ e $y_0 = (y_1, \cdots, y_m)$ em $\mathbb{R}^m$. Então:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \ \text{ se, e somente se, } \ \lim_{x\to x_0} f_i(x) = y_i$$

com $i = 1, \cdots, m$.

**Exemplo 1**

Seja $f(x,y) = (y + \operatorname{tg} x, x \ln y)$. Note que

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f_1(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,1)} y + \operatorname{tg} x = 1$$

e

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f_2(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,1)} x \ln y = 0\,.$$

Logo,

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = \left( \lim_{(x,y)\to(0,1)} f_1(x,y), \lim_{(x,4)\to(0,1)} f_2(x,y) \right) = (1,0)\,.$$

**Exemplo 2**

Seja $f(x,y,t) = \left(xy, \operatorname{sen} \frac{1}{t}\right)$. Como

$$\lim_{(x,y,t)\to(0,0,0)} \operatorname{sen} \frac{1}{t}$$

não existe, temos que

$$\lim_{(x,y,t)\to(0,0,0)} f(x,y,t)$$

também não existe.

## Continuidade

Definição 2
Considere $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $x_0 \in U$. Dizemos que $f$ é contínua em $x_0$ se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Obs 1
Em um ponto isolado (ponto que não é ponto de acumulação) do domínio de $f$, não podemos falar de limite. Neste caso diremos que $f$ é automaticamente contínua em tal ponto, por definição.

Obs 2
Dizemos que uma função é contínua se ela é contínua em todo ponto do seu domínio.

Como conseqüência da definição 2 e do teorema 1 podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 2
Uma função vetorial é contínua se, e somente se, as suas funções coordenadas são contínuas.

Exemplo 3
Como $f_i(x_1, \cdots, x_n) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$, com $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e $j = 1, \cdots, n$, é uma função contínua em $\mathbb{R}^n$, para $i = 1, \cdots, m$, temos que a transformação linear $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por $f(x_1, \cdots, x_n) = \big(f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_n)\big)$ é contínua em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 4
A função $f(x, y) = \left(\dfrac{\operatorname{sen} xy}{e^{x+y}}, \dfrac{\cos xy}{e^{x+y}}\right)$ é contínua em $\mathbb{R}^2$ pois cada função coordenada é contínua em $\mathbb{R}^2$. De fato, $f_1(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen} xy}{e^{x+y}}$ e $f_2(x, y) = \dfrac{\cos xy}{e^{x+y}}$ são contínuas, pois são definidas como quocientes de funções contínuas e $e^{x+y} > 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Com relação a noção de continuidade podemos enunciar ainda os seguintes resultados:

Teorema 3
Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ contínuas de tal modo que $g \circ f$ esteja definida. Então $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$ é contínua em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 4
Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ contínua e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então:

a) $\big(f + g\big)(x) = f(x) + g(x)$ é contínua;

b) $\big(\lambda f\big)(x) = \lambda f(x)$ é contínua.

As demonstrações dos teoremas 3 e 4 podem ser observadas num texto de Cálculo Avançado, por exemplo, Williamson etali, (1976) e Apostol$\ell$. Deixamos ao leitor curioso a tarefa de consultá-las. Em verdade, o que nos interessa, num primeiro curso de Cálculo, é que vocês saibam interpretar e usar estes resultados. Vamos aos exercícios!

**Exercícios Propostos**

**1.** Em que pontos as seguintes funções não têm limites?

a) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + \operatorname{tg} x \\ \ln(x+y) \end{pmatrix}$

b) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{y}{x^2+1} \\ \dfrac{x}{y^2-1} \end{bmatrix}$

c) $f(x, y) = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} + y$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} + y & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 2 + y & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

**2.** Em que pontos as seguintes funções não são contínuas?

a) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f\begin{bmatrix} \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} \\ x^2 + y^2 \end{bmatrix}$

b) $f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3u - 4v \\ u + 8v \end{bmatrix}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} + y & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 + y & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$