Conteúdo

Aula 24 – Funções Definidas Implicitamente

Introdução

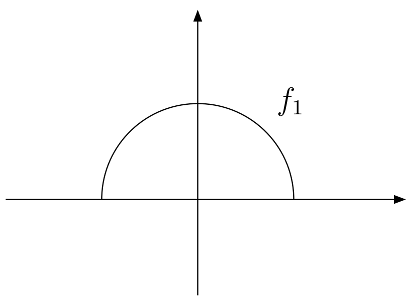
Na primeira parte do curso de Cálculo III estudamos funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definidas implicitamente por uma equação do tipo $F(X, Y) = 0$, em que $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. Demos ênfase no nosso estudo para os casos em que $n = 1$ e $n = 2$. Vamos recordar um exemplo:

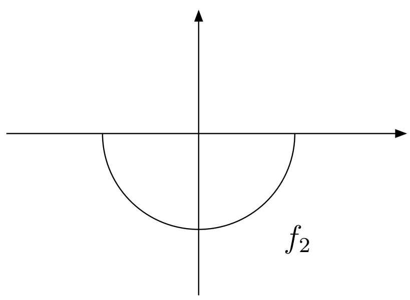
Exemplo 1

Seja $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Então a condição de que $F\big(x, f(x)\big) = = x^2 + \big(f(x)\big)^2 - 1 = 0$, para todo x do domínio de f, é satisfeita para cada uma das seguintes escolhas para f:

$$f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}\ , \qquad -1 \le x \le 1$$

$$f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}\ , \quad -1 \le x \le 1$$





Assim, pode-se dizer que tanto f_1 quanto f_2 são definidas implicitamente pela equação $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Consideremos agora uma função $F : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$. Um elemento arbitrário de $\mathbb{R}^{n+m}$ pode ser escrito como $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$ ou um par (x, y) em que x = $(x_1, \cdots, x_n)$ e y = $(y_1, \cdots, y_m)$. Deste modo F pode ser imaginado como uma função de duas variáveis vetoriais x de $\mathbb{R}^n$ e y de $\mathbb{R}^m$ ou então como uma função da única variável vetorial (x, y) de $\mathbb{R}^{n+m}$. A função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é **definida implicitamente pela equação** F(x, y)=0 se $F\big(\text{x}, f(\text{x})\big) = 0$ para todo x do domínio de f.

Exemplo 2

As equações

$$x + y + z - 1 = 0 \tag{1}$$

$$2x + z + 2 = 0 \tag{2}$$

determinam y e z como funções de x. De fato, "resolvendo o sistema" obtemos

$$y = x + 3 \quad \text{e} \quad z = -2x - 2\,.$$

Em termos de uma função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, as equações (1) e (2) podem ser escritas como

$$\begin{aligned} F\left(x, \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} x+y+z-1 \\ 2x+z+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A função definida implicitamente $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é

$$f(x) = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3 \\ -2x-2 \end{pmatrix}.$$

Em aulas passadas (para ser mais preciso, na aula 12), estudamos as condições para a existência de uma função f diferenciável definida implicitamente por uma equação $F\big(x, f(x)\big) = 0$ (veja o Teorema da Função Implícita na página 7 da aula 12) para o caso em que $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2$.

Consideremos o caso $n = 1$, isto é, suponha $F(x, y)$ uma função de classe C^1 definida em um subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^2$ de tal modo que $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$, sendo $(a, b) \in U$. Pelo Teorema da Função Implícita sabemos que existe uma função diferenciável $f : I_a \to \mathbb{R}$ de tal modo que

$$F\big(x, f(x)\big) = 0$$

para todo $x \in I_a$ (intervalo aberto que contém a).

Aplicando a regra da cadeia na equação acima, obtemos a derivada de f

$$F_x\big(x, f(x)\big) + F_y\big(x, f(x)\big) \cdot f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = -\frac{F_x\big(x, f(x)\big)}{F_y\big(x, f(x)\big)}\,,$$

se $F_y\big(x, f(x)\big) \neq 0$.

Para funções vetoriais um cálculo semelhante é possível.

Exemplo 3

Dadas as equações

$$x^2 + y^2 + z^2 - 5 = 0\ ,\ xyz + 2 = 0\,, \tag{3}$$

suponhamos que x e y sejam funções diferenciáveis de z, isto é, a função definida implicitamente pelas equações (3) é da forma $(x, y) = f(z)$. Para calcular dx/dz e dy/dz aplicamos a regra da cadeia às equações dadas, para obter

$$\begin{aligned} 2x\frac{dx}{dz} + 2y\frac{dy}{dz} + 2z = 0\,, \\ yz\frac{dx}{dz} + xz\frac{dy}{dz} + xy = 0 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema anterior em dx/dz e dy/dz, encontramos

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx}{dz} \\ \dfrac{dy}{dz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x\big(y^2 - z^2\big)}{z\big(x^2 - y^2\big)} \\ \dfrac{y\big(z^2 - x^2\big)}{z\big(x^2 - y^2\big)} \end{bmatrix}$$

que é a matriz $f'(z)$. Observe que, para que a fórmula fique completamente determinada é necessário conhecer os valores correspondentes para x e y. Entretanto, dado o ponto $(x, y, z) = (1, -2, 1)$, podemos determinar $f'(1)$.

$$f'(1) = \begin{bmatrix} \dfrac{dx}{dz}(1, -2, 1) \\ \dfrac{dy}{dz}(1, -2, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e afirmar que f é univocamente determinada na vizinhança do ponto dado.

Exemplo 4

Consideremos

$$\begin{aligned} xu + yv + zw = 1\,, \\ x + y + z + u + v + w = 0\,, \\ xy + zuv + w = 1\,. \end{aligned}$$

Suponhamos que cada um dos x, y e z seja uma função de u, v e w. Para calcular as derivadas de x, y e z em relação à w, derivamos as três equações usando a regra da cadeia.

$$
\begin{aligned}
&u\frac{\partial x}{\partial w}+v\frac{\partial y}{\partial w}+w\frac{\partial z}{\partial w}+z=0\,,\\
&\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial w}+1=0\,,\\
&y\frac{\partial x}{\partial w}+x\frac{\partial y}{\partial w}+uv\frac{\partial z}{\partial w}+1=0\,.
\end{aligned}
$$

Então, resolvendo o sistema encontramos $\partial x/\partial w$

$$\frac{\partial x}{\partial w}=\frac{uv^2+xz+w-zuv-xw-v}{u^2v+vy+wx-yw-ux-uv^2}\,.$$

analogamente, poderíamos calcular $\partial y/\partial w$ e $\partial z/\partial w$. Para calcular as parciais em relação a u, derivamos as equações originais em relação a u e calculamos $\partial x/\partial u$, $\partial y/\partial u$ e $\partial z/\partial u$, no sistema. As parciais em relação a v são encontradas pelo mesmo método.

O cálculo indicado no Exemplo 20 nos leva aos nove elementos da matriz da diferencial de uma função vetorial definida implicitamente. Para que o cálculo funcione, é necessário ter o número de equações dadas igual ao número de funções coordenadas definidas implicitamente. Para se perceber a razão para esta exigência, suponhamos que seja dada uma função vetorial diferenciável

$$F(u,v,x,y)=\begin{pmatrix}F_1(u,v,x,y)\\F_2(u,v,x,y)\end{pmatrix}$$

e que as equações

$$F_1(u,v,x,y)\ ,\ F_2(u,v,x,y) \tag{4}$$

definam implicitamente uma função diferenciável $(x,y)=f(u,v)$. Derivando as equações (4) em relação a u e v por meio da regra da cadeia, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F_1}{\partial u}+\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=0\,,\quad \frac{\partial F_1}{\partial v}+\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=0\,,\\
&\frac{\partial F_2}{\partial u}+\frac{\partial F_2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=0\,,\quad \frac{\partial F_2}{\partial v}+\frac{\partial F_2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=0\,.
\end{aligned}
$$

Estas equações podem ser escritas na forma matricial como segue:

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial u}&\dfrac{\partial F_1}{\partial v}\\[2mm]\dfrac{\partial F_2}{\partial u}&\dfrac{\partial F_2}{\partial v}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial x}&\dfrac{\partial F_1}{\partial y}\\[2mm]\dfrac{\partial F_2}{\partial x}&\dfrac{\partial F_2}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u}&\dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2mm]\dfrac{\partial y}{\partial u}&\dfrac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}=0 \tag{5}$$

A última matriz da direita é a matriz da diferencial de f em (u, v). Calculando-a, obtemos

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{bmatrix} = 0 \qquad (6)$$

Para conseguirmos uma solução única, isto é, para que a matriz $f'(u, v)$, solução da equação (5), exista e seja única, é essencial que a matriz inversa que aparece na equação (6) exista. Isto implica, em particular, que o número de equações originalmente dadas seja igual ao número de variáveis determinadas implicitamente ou equivalentemente, que os espaços imagens de F e f devem ter a mesma dimensão.

A análoga da equação (6) vale para um número arbitrário de funções coordenadas F_i e é provada exatamente do mesmo modo. Podemos resumir o resultado no seguinte teorema:

Teorema 1
Se $\mathbb{R}^{n+m} \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ são diferenciáveis, e se $\mathrm{y}=f(\mathrm{x})$ satisfaz $F(\mathrm{x}, \mathrm{y})= 0$, então

$$f'(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = -\left[F_{\mathrm{y}}\big(\mathrm{x}, f(\mathrm{x})\big)\right]^{-1} \cdot \left[F_{\mathrm{x}}\big(\mathrm{x}, f(\mathrm{x})\big)\right],$$

contando que F_{y} tenha uma inversa. A derivada F_{y} é calculada mantendo-se x fixo, e F_{x} é calculada mantendo-se y fixo.

A notação utilizada acima é ilustrada no próximo exemplo.

Exemplo 5
Suponhamos que

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2y + xz \\ xz + yz \end{pmatrix}$$

e que escolhemos $\mathrm{x}=x$, $\mathrm{y}=(y, z)$. Então,

$$F_x(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy + z \\ z \end{pmatrix}$$

e

$$F_{(y,z)}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 & x \\ z & x + y \end{pmatrix}.$$

Exemplo 6

Suponhamos dada

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2y+z \\ x+y^2z \end{pmatrix}$$

e calculemos $[F_{(y,z)}(1,y,z)]^{-1}$. A matriz derivada de F em relação a (y,z) é

$$F_{(y,z)}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ 2yz & y^2 \end{pmatrix},$$

e assim

$$F_{(y,z)}(1,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & x+y \end{pmatrix}.$$

Calculando a matriz inversa pela fórmula

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

obtemos

$$[F_{(y,z)}(1,y,z)]^{-1} = \frac{1}{y^2-2yz}\begin{pmatrix} y^2 & -1 \\ -2yz & 1 \end{pmatrix}$$

Exercícios Propostos

1. Se

$$x^2y + yz = 0 \quad \text{e} \quad xyz + 1 = 0$$

calcule dx/dz e dy/dz em $(x,y,z) = (1,1,-1)$.

2. Se o exercício anterior for expresso na notação vetorial geral do Teorema 9, o que são F, x, y, F_{y} e F_{x}?

3. Se

$$x + y - u - v = 0\,,$$
$$x - y + 2u + v = 0\,,$$

calcule $\partial x/\partial u$ e $\partial y/\partial u$:

a) calculando x e y em termos de u e v;

b) derivando implicitamente

4. Se o item 3 for expresso na notação vetorial do Teorema 9, que é a matriz $f'(\mathrm{x})$?

5. Se $x^2 + yu + xv + w = 0$, $z + y + uvw + 1 = 0$, então, olhando x e y como funções de u, v e w, encontramos

$$\frac{\partial x}{\partial u} \ \text{e} \ \frac{\partial y}{\partial u} \ \text{em} \ (x,y,u,v,w) = (1,-1,1,1,-1)\,.$$

6. As equações $2x^3y+yx^2+t^2 = 0$, $x+y+t-1 = 0$, definem implicitamente uma curva

$$f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

que satisfaz

$$f(1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Determine a reta tangente a f em $t = 1$.

7. Suponhamos que a equação $x^2/4+y^2+z^2/9-1 = 0$ defina z implicitamente como uma função $z = f(x, y)$ numa vizinhança do ponto $x = 1$, $y = \sqrt{11/6}$, $z = 2$. O gráfico da função f é uma superfície. Determine o seu plano tangente em $(1, \sqrt{11/6}, 2)$.

8. Suponhamos que a equação $F(x, y, z) = 0$ defina implicitamente $z = f(x, y)$ e que $z_0 = f(x_0, y_0)$. Suponhamos além disso que a superfície que é o gráfico de $z = f(x, y)$ tem um plano tangente em (x_0, y_0). Mostre que

$$(x-x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)+(y-y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)+(z-z_0)\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

é a equação deste plano tangente.

9. As equações

$$\begin{aligned} 2x + y + 2z + y - v - 1 &= 0 \\ xy + z - u + 2v - 1 &= 0 \\ yz + xz + u^2 + v &= 0 \end{aligned}$$

numa vizinhança de $(x, y, z, u, v) = (1, 1, -1, 1, 1)$ define x, y e z como funções de u e v.

a) Determine a matriz da diferencial da função definida implicitamente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix} = f(u, v)$$

em $(u, v) = (1, 1)$.

b) A função f define parametricamente uma superfície no espaço (x, y, z). Determine o plano tangente a ela no ponto $(1, 1, -1)$.