Conteúdo

Aula 26 – Teorema da Função Implícita

Introdução

Na aula 24 consideramos o problema do cálculo das derivadas de uma função f definida implicitamente por uma equação do tipo $F\big(\mathrm{x}, f(\mathrm{x})\big) = 0$, sendo f e F ambas diferenciáveis. Vimos que, para que fosse possível calcular $f'(\mathrm{x}_0)$ pelos métodos matriciais foi necessário que $F_y\big(\mathrm{x}_0, f(\mathrm{x}_0)\big)$ tivesse uma inversa. É natural que a mesma condição ocorra no caso geral do Teorema da Função Implícita. A demostração desse teorema é feita usando o teorema da função inversa e pode ser encontrada também no texto de Williamson & Trotter. No entanto, o que interessa-nos num curso de Cálculo é que você saiba interpretá-lo e aplicá-lo em algumas situações. Vamos ao teorema.

Teorema 1 (Teorema da Função Implícia)
Seja $\mathbb{R}^{n+m} \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m$ uma função continuamente diferenciável. Suponhamos que para algum x_0 de $\mathbb{R}^n$ e algum y_0 de $\mathbb{R}^m$:

1. $F(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) = 0\,.$
2. $F_{\mathrm{y}}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ tem uma inversa.

Então existe uma função continuamente diferenciável $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ definida numa vizinhança N de x_0 tal que $f(\mathrm{x}_0) = \mathrm{y}_0$ e $F\big(\mathrm{x}, f(\mathrm{x})\big) = 0$, para todo $\mathrm{x} \in N$ e, além disso, a derivada de f é dada por

$$f'(\mathrm{x}) = -\big[F_{\mathrm{y}}(\mathrm{x}, f(\mathrm{x}))\big]^{-1} \cdot \big[F_{\mathrm{x}}\big(\mathrm{x}, f(\mathrm{x})\big)\big]\,.$$

Exemplo 1
A equação $x^3y + y^3x - 2 = 0$ define $y = f(x)$ implicitamente numa vizinhança de $x = 1$, se $f(1) = 1$. Como uma função de y, $x^3y + y^3x - 2$ tem jacobiana $\big(1 + 3y^2\big)$ em $x = 1$, e esta última é invertível em $y = 1$, isto é,

$$1 + 3y^2\Big|_{y=1} = 4 \neq 0\,.$$

Note que apesar de concluirmos pelo teorema da função implícita que y é definida implicitamente como uma função de x, não determinamos esta função. Neste exemplo, entretanto, podemos determinar a função $y = f(x)$ usando a fórmula por radicais para uma equação do terceiro grau em y, isto é:

$$y = \sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^{10}+27}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^{10}+27}{27}}}\;.$$

Exemplo 2

As equações

$$z^3x + w^2y^3 + 2xy = 0 \text{ e } xyzw - 1 = 0 \tag{1}$$

podem ser escritas na forma $F(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0$, em que $\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathrm{y} = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ e

$$F(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \begin{pmatrix} z^3x + w^2y^3 + 2xy \\ xyzw - 1 \end{pmatrix}.$$

Sejam $\mathrm{x}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, e $\mathrm{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Então

$$F(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}) = \begin{pmatrix} -z^3 - w^2 + 2 \\ xw - 1 \end{pmatrix}$$

e a matriz $F_{\mathrm{y}}(1, 1)$ é

$$F(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}) = \begin{pmatrix} -3z^2 & 2w \\ w & z \end{pmatrix}_{\begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A inversa existe e é a matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

É então uma conseqüência do teorema da função implícita que as equações (1) definem implicitamente uma função f num conjunto aberto em torno de x_0 tal que $f(\mathrm{x}_0) = \mathrm{y}_0$, isto é, temos

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

e assim z e w são funções de x e y numa vizinhança de

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exercícios Propostos

1. Consideremos a equação $(x-2)^3y + xe^{y-1} = 0$.

a) y é definido implicitamente como uma função de x numa vizinhança de $(x, y) = (1, 1)$?

b) Numa vizinhança de $(0, 0)$?

2. O ponto $(x, y, t) = (0, 1, -1)$ satisfaz às equações

$$xyt + \operatorname{sen} xyt = 0 \quad \text{e} \quad x + y + t = 0\,.$$

São x e y definidas implicitamente como funções de t numa vizinhança de $(0, 1, -1)$?

3. A condição 2 no teorema da função implícita de que $F_{\mathrm{y}}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ tem uma inversa não é necessária para que a equação $F(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0$ defina uma única função diferenciável f tal que $f(\mathrm{x}_0) = \mathrm{y}_0$. Mostre isto considerando $F(x, y) = x^9 - y^3$ e $(x_0, y_0) = (0, 0)$.