Capítulo 14

Elipse

Nosso objetivo, neste e nos próximos capítulos, é estudar a **equação geral do segundo grau em duas variáveis**:

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,,\ \text{onde } A \neq 0 \text{ ou } B \neq 0 \text{ ou } C \neq 0}$$

Para isso, definiremos, geometricamente, uma elipse, uma hipérbole e uma parábola, que são possíveis soluções não degeneradas da equação acima.

1. Elipse

Definição 1

Uma **elipse** $\mathcal{E}$ de **focos** F_1 e F_2 é o conjunto do plano que consiste de todos os pontos P, cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, maior do que a distância entre os focos $2c > 0$. Ou seja:

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathcal{E} = \{\, P \,|\, d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \,\}\ , \\ 0 < c < a\,; \quad d(F_1, F_2) = 2c \end{array}}$$

Terminologia

- Como dissemos na definição, os pontos F_1 e F_2 são os **focos** da elipse.
- A reta ℓ que contém os focos é a **reta focal**.

Figura 1: Posicionamento dos focos da elipse na reta focal.

• A interseção da elipse com a reta focal ℓ consiste de exatamente dois pontos, A_1 e A_2, chamados **vértices** da elipse sobre a reta focal.

De fato, seja $A \in \mathcal{E} \cap \ell$. Então, $A \notin F_1F_2$, pois, se $A \in F_1F_2$, teríamos

$$2c = d(F_1, F_2) = d(A, F_1) + d(A, F_2) = 2a\,,$$

isto é, $2c = 2a$, o que é impossível, já que, por definição, $2c < 2a$.

Seja $A_2 \in \mathcal{E} \cap \ell - F_1F_2$ tal que $x = d(A_2, F_2)$.

Como $2a = d(A_2, F_1) + d(A_2, F_2) = x + 2c + x$, pois $A_2 \in \mathcal{E}$, temos que $x = a - c$.

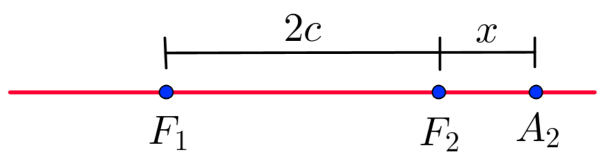

Figura 2: Determinação da distância dos vértices aos focos da elipse.

Logo, o ponto A_2 pertencente a $\ell - F_1F_2$, que dista $a - c$ do foco F_2, pertence à elipse $\mathcal{E}$. De modo análogo, o ponto A_1 pertencente a $\ell - F_1F_2$, que dista $a - c$ do foco F_1, pertence à elipse $\mathcal{E}$.

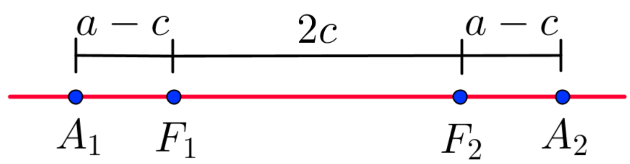

Figura 3: Posicionamento dos vértices em relação aos focos da elipse na reta focal.

• O segmento A_1A_2 é denominado **eixo focal** da elipse. O seu comprimento é $2a$.

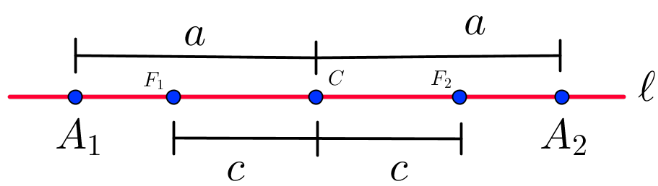

Figura 4: Posicionamento dos focos, vértices e centro da elipse na reta focal.

• O ponto médio C do eixo focal A_1A_2 é o **centro** da elipse. Este ponto é também o ponto médio do segmento F_1F_2 delimitado pelos focos.

• A reta ℓ' que passa pelo centro C e é perpendicular à reta focal ℓ é a **reta não focal**.

• A elipse intersecta a reta não focal ℓ' em exatamente dois pontos, B_1 e B_2, denominados **vértices da elipse sobre a reta não focal**.

De fato, como ℓ' é a mediatriz do segmento F_1F_2, temos que $B \in \ell' \cap \mathcal{E}$ se, e somente se, $d(B, F_1) = d(B, F_2) = a$. Logo, pelo teorema de Pitágoras, $\ell' \cap \mathcal{E}$ consiste de dois pontos, B_1 e B_2, em ℓ', que distam $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ do centro C da elipse.

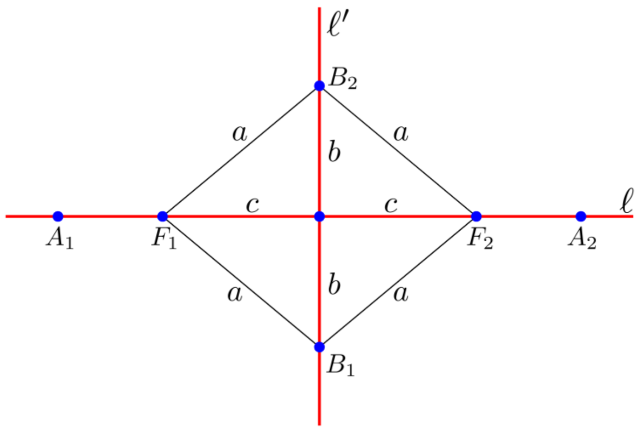

Figura 5: Posicionamento dos focos, centro e vértices da elipse nas retas focal e não focal.

• O segmento B_1B_2 é denominado **eixo não focal** da elipse e seu comprimento é $2b$, onde $b^2 = a^2 - c^2$.

• O número $e = \dfrac{c}{a}$ é denominado **excentricidade** da elipse. Note que $0 < e < 1$.

• O número a é a distância do centro aos vértices sobre a reta focal, b é a distância do centro aos vértices sobre a reta não focal e c é a distância do centro aos focos.

Observação 1

A elipse $\mathcal{E}$ é simétrica em relação à reta focal, à reta não focal e ao centro.

De fato, se $P \in \mathcal{E}$ e P' é o simétrico de P em relação à reta focal, então:

$$\triangle F_2PQ \equiv \triangle F_2P'Q \qquad \text{e} \qquad \triangle F_1PQ \equiv \triangle F_1P'Q\,.$$

Em particular, $|F_1P| = |F_1P'|$ e $|F_2P| = |F_2P'|$. Logo,

$$2a = d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P', F_1) + d(P', F_2) \Longrightarrow P' \in \mathcal{E}\,.$$

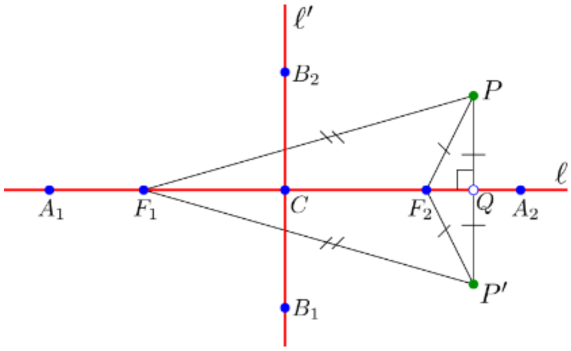

Figura 6: Simetria da elipse em relação à reta focal.

Se $P \in \mathcal{E}$ e P'' é o simétrico de P em relação ao centro, então:

$$\triangle PCF_2 \equiv \triangle P''CF_1 \qquad \text{e} \qquad \triangle F_1CP \equiv \triangle F_2CP''\,.$$

Em particular, $|F_1P| = |F_2P''|$ e $|F_2P| = |F_1P''|$. Portanto,

$$2a = d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P'', F_2) + d(P'', F_1) \Longrightarrow P'' \in \mathcal{E}\,.$$

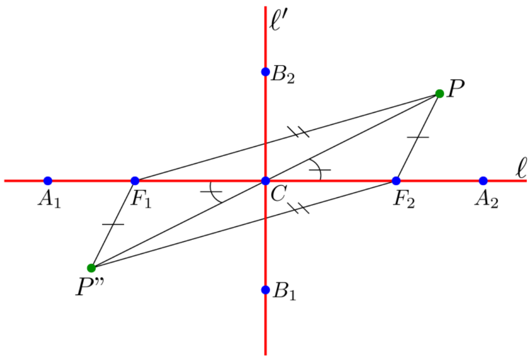

Figura 7: Simetria da elipse em relação ao centro.

A simetria em relação à reta não focal se verifica de maneira análoga, usando congruência de triângulos.

2. Forma canônica da elipse

Vamos obter a equação da elipse em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY para alguns casos especiais.

2.1 Elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX

Neste caso, $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, $A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$, $B_1 = (0, -b)$ e $B_2 = (0, b)$. Logo,

$$
\begin{aligned}
& P = (x, y) \in \mathcal{E} \iff d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \\
\iff\ & \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \\
\iff\ & \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
\iff\ & (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
\iff\ & x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \\
\iff\ & 4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
\iff\ & a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
\iff\ & (a^2 - cx)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2) \\
\iff\ & a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) \\
\iff\ & (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2) \\
\iff\ & b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\
\iff\ & \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}
\end{aligned}
$$

Forma canônica da elipse de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX.

2.2 Esboço da Elipse

Como $\dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{a^2 - x^2}{a^2}$, temos que $y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Consideremos o gráfico da função $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [0, a]$. Para $x = 0$ e $x = a$, temos $y = b$ e $y = 0$, respectivamente.

É fácil verificar que a função é decrescente, pois:

$$
\begin{aligned}
& x < \overline{x} \iff x^2 < \overline{x}^2 \iff a^2 - x^2 > a^2 - \overline{x}^2 \\
& \iff y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} > \overline{y} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \overline{x}^2},
\end{aligned}
$$

para quaisquer $x, \bar{x} \in [0, a]$.

Para esboçarmos o gráfico da função, precisamos saber também que a função $y = b/a\sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [0, a]$ é côncava (isto é, dados dois pontos sobre o gráfico, os pontos do gráfico ficam acima dos pontos do segmento que liga estes pontos). Uma maneira de provar tal afirmação, para os alunos que já tenham estudado derivada, é calcular a derivada segunda

$$y'' = -\frac{ba}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$$

e observar que esta derivada é negativa para todo $x \in (0, a)$.

O gráfico da função é, portanto, da forma:

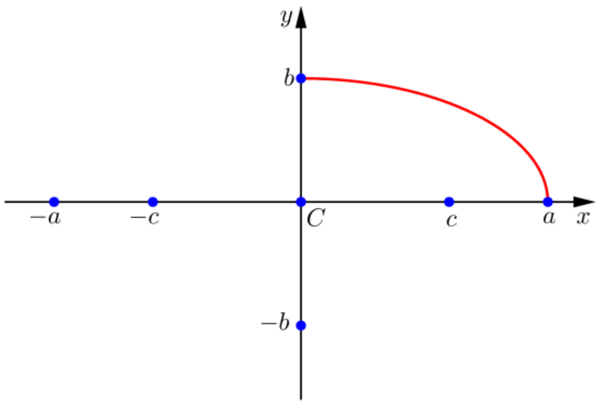

Figura 8: Gráfico da função $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [0, a]$.

Como a elipse é simétrica em relação ao eixo$-OX$ (reta focal) e ao eixo$-OY$ (reta não focal), seu gráfico tem a forma:

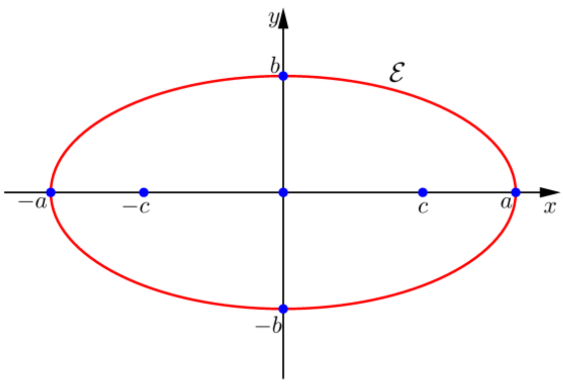

Figura 9: Gráfico da elipse $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2.3 Elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY

Neste caso, $F_1 = (0, -c)$, $F_2 = (0, c)$, $A_1 = (0, -a)$, $A_2 = (0, a)$, $B_1 = (-b, 0)$ e $B_2 = (b, 0)$.

Desenvolvendo como no caso anterior, podemos verificar que a equação da elipse é:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$ **Forma canônica da elipse de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY.**

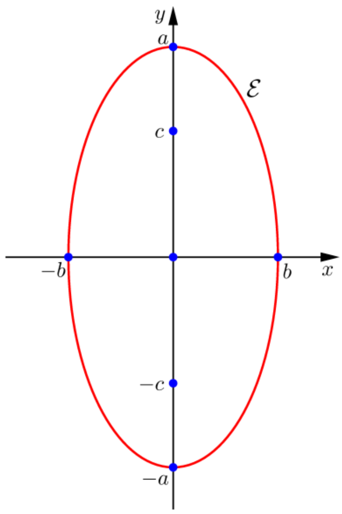

Figura 10: Elipse $\mathcal{E} : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

Exemplo 1

Os vértices de uma elipse são os pontos $(4, 0)$ e $(-4, 0)$ e seus focos são os pontos $(3, 0)$ e $(-3, 0)$. Determine a equação da elipse.

Solução.

Como $F_1 = (-3, 0)$ e $F_2 = (3, 0)$, a reta focal é o eixo$-OX$ e $A_1 = (-4, 0)$, $A_2 = (4, 0)$ são os vértices sobre a reta focal ℓ.

Então, $C = \dfrac{F_1 + F_2}{2} = \dfrac{A_1 + A_2}{2} = (0, 0)$ é o centro da elipse, $a = d(C, A_1) = d(C, A_2) = 4$, $c = d(C, F_1) = d(C, F_2) = 3$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} =$

$\sqrt{16-9} = \sqrt{7}$.

Logo, a equação da elipse é $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{7} = 1$. □

Exemplo 2

Dois vértices de uma elipse $\mathcal{E}$ são os pontos $(0,6)$ e $(0,-6)$ e seus focos são os pontos $(0,4)$ e $(0,-4)$. Determine a equação da elipse $\mathcal{E}$.

Solução.

Temos $F_1 = (0,-4)$ e $F_2 = (0,4)$. Então, a reta focal (que contém os focos) é o eixo OY, os vértices sobre a reta focal são $A_1 = (0,-6)$ e $A_2 = (0,6)$, e o centro da elipse $\mathcal{E}$ é a origem, pois $C = \dfrac{(0,4)+(0,-4)}{2} = (0,0)$. Como $a = d(C,A_1) = 6$ e $c = d(C,F_1) = 4$, temos que $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20$.

Portanto, a equação da elipse é $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{36} = 1$. □

Exemplo 3

Os focos de uma elipse são os pontos $(2,0)$ e $(-2,0)$ e sua excentricidade é $\dfrac{2}{3}$. Determine a equação da elipse.

Solução.

Temos que a reta focal é o eixo OX, o centro da elipse é a origem $C = (0,0)$, $c = d(C,F_1) = 2$ e $e = \dfrac{2}{3} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2}{a} \Longrightarrow a = 3$. Logo, $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$ e $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$ é a equação da elipse. □

Exemplo 4

Uma elipse $\mathcal{E}$ tem seu centro na origem e um de seus vértices sobre a reta focal é $(0,7)$. Se a elipse passa pelo ponto $\left(\sqrt{5}, \dfrac{14}{3}\right)$, determine sua equação, seus vértices, seus focos e sua excentricidade. Faça também um esboço da elipse.

Solução.

A reta focal, que contém o centro e o vértice dado, é o eixo OY. A distância do centro $C = (0,0)$ ao vértice $A_2 = (0,7)$ é $a = d(C, A_2) = 7$ e o outro vértice na reta focal é $A_1 = (0,-7)$.

Logo, a equação da elipse $\mathcal{E}$ é da forma:

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad \text{ou seja,} \quad \mathcal{E} : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{7^2} = 1\,.$$

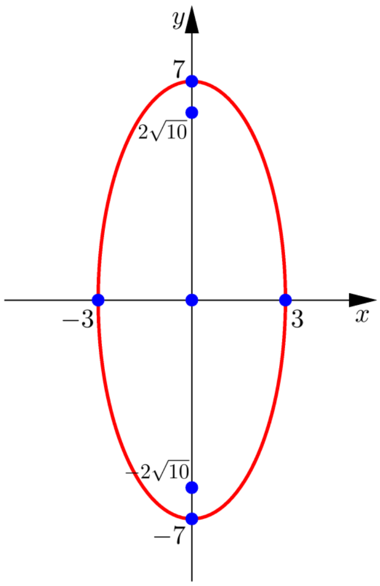

Figura 11: Gráfico da elipse $\mathcal{E} : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$.

Como $\left(\sqrt{5}, \frac{14}{3}\right) \in \mathcal{E}$, temos:

$$\frac{\left(\sqrt{5}\right)^2}{b^2} + \frac{\left(\frac{14}{3}\right)^2}{49} = 1\,, \qquad \text{ou seja,} \qquad \frac{5}{b^2} + \frac{2^2\,7^2}{3^2\,7^2} = 1.$$

Então, $\frac{5}{b^2} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \iff b^2 = 9$, e a equação da elipse é:

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1.$$

Como a reta não focal é o eixo OX e $b = 3$, os vértices na reta não focal são $B_1 = (-3,0)$ e $B_2 = (3,0)$.

Temos também que $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{49 - 9} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$. Logo, os focos são $F_1 = (0, -2\sqrt{10})$ e $F_2 = (0, 2\sqrt{10})$.

Finalmente, a excentricidade de $\mathcal{E}$ é $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2\sqrt{10}}{7}$. $\square$

3. Translação dos eixos coordenados

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais e seja $\overline{O} = (x_0, y_0)$ um ponto no plano.

Seja $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ o sistema cujos eixos $\overline{O}\,\overline{X}$ e $\overline{O}\,\overline{Y}$ são paralelos aos eixos OX e OY e têm, respectivamente, o mesmo sentido que estes eixos.

Sejam $(\overline{x}, \overline{y})$ as coordenadas do ponto P no sistema de eixos $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ e (x, y) as coordenadas de P no sistema de eixos OXY.

Então, as coordenadas do ponto P nos sistemas OXY e $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ são relacionadas por:

$$\boxed{\begin{cases} x = \overline{x} + x_0 \\ y = \overline{y} + y_0 \end{cases}}$$

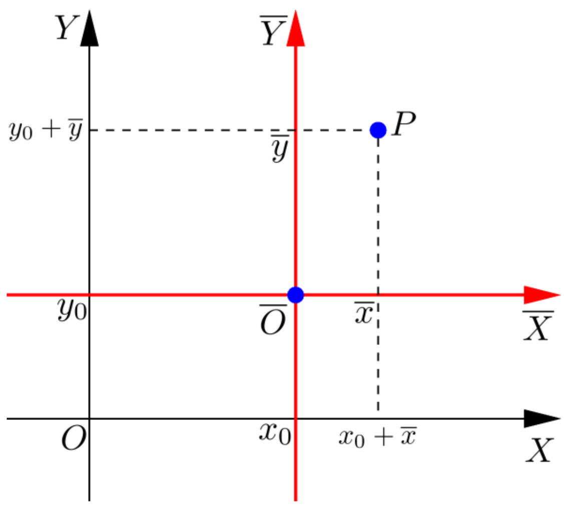

Figura 12: Ponto $P = (\overline{x}, \overline{y})_{\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}} = (x_0 + \overline{x}, y_0 + \overline{y})_{OXY}$.

Exemplo 5

Faça um esboço da curva

$$x^3 - 3x^2 - y^2 + 3x + 4y - 5 = 0\,.$$

Para isso, escreva a equação nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ do sistema de eixos $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$, obtido quando o sistema OXY é transladado para a origem $\overline{O} = (1, 2)$.

Solução.

Fazendo $x = \overline{x} + 1$ e $y = \overline{y} + 2$ na equação dada, obtemos:

$$(\overline{x}+1)^3 - 3(\overline{x}+1)^2 - (\overline{y}+2)^2 + 3(\overline{x}+1) + 4(\overline{y}+2) - 5 = 0\,.$$

Simplificando esta identidade, temos $\overline{x}^3 = \overline{y}^2$.

Então, $\overline{y} = \pm\overline{x}^{3/2}$ e $\overline{x} \geq 0$.

Fazer agora o esboço da curva é bem mais simples.

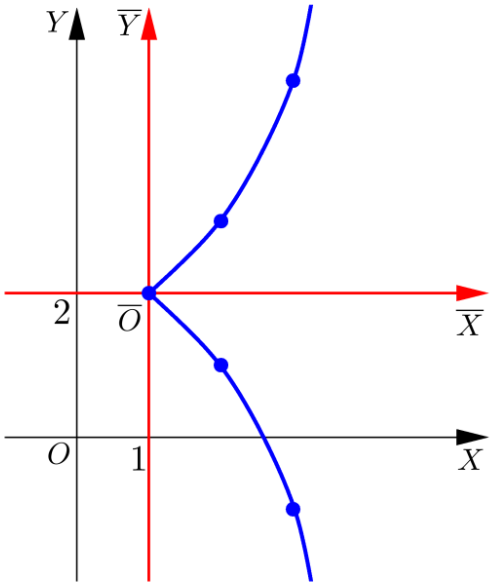

Figura 13: Gráfico da curva $x^3 - 3x^2 - y^2 + 3x + 4y - 5 = 0\,.$

□

4. Elipse com centro no ponto $\overline{O} = (x_0, y_0)$

• Caso I. Reta focal paralela ao eixo OX

Como o centro $\overline{O} = (x_0, y_0)$ pertence à reta focal, temos que $\ell : y = y_0$ é a equação cartesiana da reta focal.

Além disso, como $d(F_1, \overline{O}) = d(F_2, \overline{O}) = c$, onde F_1 e F_2 são os focos da elipse, temos que $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$.

Seja $P = (x, y) = (\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0)$ um ponto pertencente à elipse, onde x, y são suas coordenadas no sistema OXY e $\overline{x}$, $\overline{y}$ são suas coordenadas no sistema $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$, sendo este obtido quando o sistema OXY é transladado para a origem $\overline{O} = (x_0, y_0)$.

Então, P pertence à elipse se, e somente se,

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\,,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad d((\overline{x}+x_0, \overline{y}+y_0), (x_0-c, y_0)) + d((\overline{x}+x_0, \overline{y}+y_0), (x_0+c, y_0)) = 2a \\
&\Longleftrightarrow \quad d((\overline{x}, \overline{y}), (-c, 0)) + d((\overline{x}, \overline{y}), (c, 0)) = 2a \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{\overline{x}^2}{a^2} + \frac{\overline{y}^2}{b^2} = 1 \Longleftrightarrow \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1\,.
\end{aligned}$$

Logo, **a forma canônica da equação da elipse com centro no ponto (x_0, y_0) e eixo focal paralelo ao eixo OX é:**

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1\,, \qquad \text{onde} \qquad b^2 = a^2 - c^2}$$

Os focos são $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$; a reta focal é $\ell : y = y_0$; os vértices sobre a reta focal são $A_1 = (x_0 - a, y_0)$ e $A_2 = (x_0 + a, y_0)$; a reta não focal é $\ell' : x = x_0$ e os vértices sobre a reta não focal são $B_1 = (x_0, y_0 - b)$ e $B_2 = (x_0, y_0 + b)$.

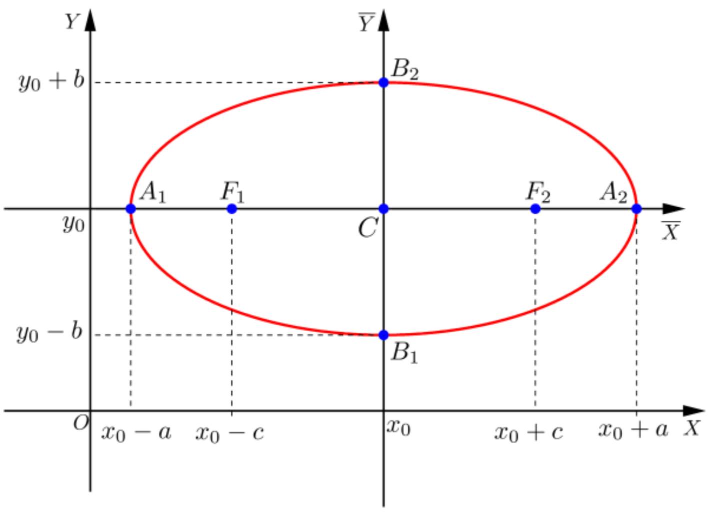

Figura 14: Gráfico da elipse $\mathcal{E} : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1\,.$

• Caso II. Reta focal paralela ao eixo OY

Procedendo de maneira análoga ao caso anterior, verifica-se que **a forma canônica da equação da elipse com centro no ponto** (x_0, y_0) **e eixo focal paralelo ao eixo** OY **é:**

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1\,, \qquad \text{onde} \qquad b^2 = a^2 - c^2}$$

Neste caso, os focos são $F_1 = (x_0, y_0 - c)$ e $F_2 = (x_0, y_0 + c)$; a reta focal é $\ell : x = x_0$; os vértices sobre a reta focal são $A_1 = (x_0, y_0 - a)$ e $A_2 = (x_0, y_0 + a)$; a reta não focal é $\ell' : y = y_0$ e os vértices sobre a reta não focal são $B_1 = (x_0 - b, y_0)$ e $B_2 = (x_0 + b, y_0)$.

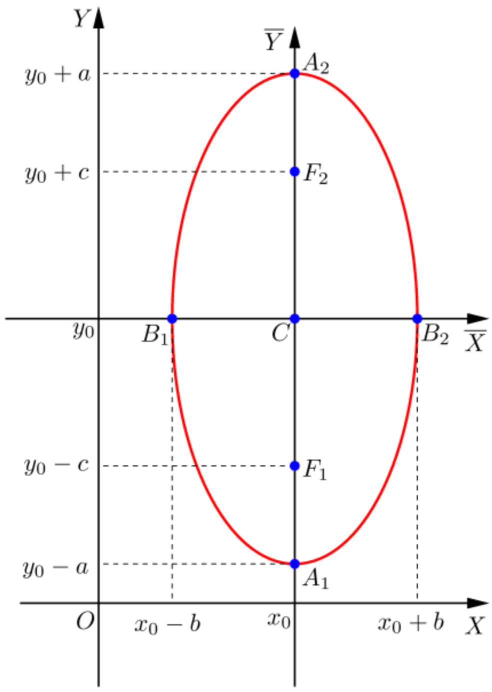

Figura 15: Gráfico da elipse $\mathcal{E} : \frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$.

Exemplo 6

Os focos de uma elipse $\mathcal{E}$ são $(3, 8)$ e $(3, 2)$, e o comprimento do seu eixo não focal é 8. Determine a equação da elipse $\mathcal{E}$, os seus vértices e a sua excentricidade.

Solução.

Como $F_1 = (3,2)$ e $F_2 = (3,8)$ são os focos da elipse, a reta focal de $\mathcal{E}$ é $\ell : x = 3$ (paralela ao eixo OY) e o centro de $\mathcal{E}$ é $C = \dfrac{F_1 + F_2}{2} = (3,5)$. Além disso, $2b = 8$, isto é, $b = 4$, $c = d(C, F_1) = d(C, F_2) = 3$ e $a^2 = b^2 + c^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$, isto é, $a = 5$. Portanto, $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{5}$; $A_1 = (3,0)$ e $A_2 = (3,10)$ são os vértices de $\mathcal{E}$ sobre a reta focal; $\ell' : y = 5$ é a reta não focal; $B_1 = (-1,5)$ e $B_2 = (7,5)$ são os vértices de $\mathcal{E}$ sobre a reta não focal e

$$\mathcal{E} : \frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$$

é a equação da elipse. $\square$

Exemplo 7

A equação de uma elipse é $\mathcal{E} : x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 6 = 0$. Determine a equação da elipse na forma canônica, o seu centro, os seus vértices, os seus focos e a sua excentricidade.

Solução.

Completando os quadrados na equação de $\mathcal{E}$, temos:

$$\mathcal{E} : (x^2 + 2x) + 4(y^2 - 3y) = -6$$

$$\mathcal{E} : (x^2 + 2x + 1) + 4\left(y^2 - 3y + \frac{9}{4}\right) = -6 + 1 + 4 \times \frac{9}{4} = 4$$

$$\mathcal{E} : (x+1)^2 + 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 4$$

$$\mathcal{E} : \frac{(x+1)^2}{4} + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 1\,,$$

sendo esta última equação a forma canônica de $\mathcal{E}$. Desta equação, obtemos que o centro da elipse é $C = \left(-1, \dfrac{3}{2}\right)$, $a = 2$, $b = 1$ e, portanto, $c^2 = a^2 - b^2 = 2^2 - 1^2 = 3$, ou seja, $c = \sqrt{3}$.

A reta focal de $\mathcal{E}$ é $\ell : y = \dfrac{3}{2}$, paralela ao eixo OX, e a reta não focal é $\ell' : x = -1$, paralela ao eixo$-OY$.

Os focos da elipse são $F_1 = \left(-1-\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$ e $F_2 = \left(-1+\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$; os vértices sobre a reta focal são $A_1 = \left(-1-2, \frac{3}{2}\right) = \left(-3, \frac{3}{2}\right)$ e $A_2 = \left(-1+2, \frac{3}{2}\right) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$ e os vértices sobre a reta não focal são $B_1 = \left(-1, \frac{3}{2}-1\right) = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$ e $B_2 = \left(-1, \frac{3}{2}+1\right) = \left(-1, \frac{5}{2}\right)$.

Finalmente, a excentricidade de $\mathcal{E}$ é $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. □

5. Equação do segundo grau com $B = 0$ e $AC > 0$

Consideremos a equação da elipse $\mathcal{E}$ de centro no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OX:

$$\mathcal{E} : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1\,.$$

Desenvolvendo a equação acima, obtemos:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2x_0x - 2a^2y_0y + b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0\,,$$

que é da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,,$$

onde $A = b^2$, $B = 0$, $C = a^2$, $D = -2b^2x_0$, $E = -2a^2y_0$ e $F = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2$.

Então, **$B = 0$ e A e C têm o mesmo sinal**. O mesmo vale para a equação da elipse com centro no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OY.

Reciprocamente, temos:

Proposição 1

Se os coeficientes A e C da equação do segundo grau

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

têm o mesmo sinal, então a equação representa:

- *uma elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados;*

ou

- *um ponto;*

ou

- *o conjunto vazio.*

Prova.
Dividindo a equação (1) por AC, obtemos:

$$\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{A} + \frac{D}{AC}x + \frac{E}{AC}y + \frac{F}{AC} = 0\,,$$

ou seja,

$$\frac{x^2 + \frac{D}{A}x}{C} + \frac{y^2 + \frac{E}{C}y}{A} = -\frac{F}{AC}\,.$$

Completando os quadrados, temos:

$$\frac{x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2}}{C} + \frac{y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{E^2}{4C^2}}{A} = -\frac{F}{AC} + \frac{D^2}{4A^2C} + \frac{E^2}{4AC^2}\,.$$

Isto é,

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{C} + \frac{\left(y^2 + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = \frac{C^2D^2 + ACE^2 - 4AFC^2}{4A^2C^3} = \frac{M}{4A^2C^3} \qquad (2)$$

onde $M = C^2D^2 + ACE^2 - 4AFC^2$.

Se $M = 0$, a equação (2) representa o ponto $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$, pois A e C têm o mesmo sinal.

Se $M \neq 0$, podemos escrever a equação (2) na forma:

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{M}{4A^2C^2}} + \frac{\left(y^2 + \frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{M}{4ACC^2}} = 1. \qquad (3)$$

Como $AC > 0$, a equação (3) representa uma elipse de eixos paralelos aos eixos coordenados e centro no ponto $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$, se $M > 0$.

Se $M < 0$, a equação (3) representa o conjunto vazio, pois $\frac{M}{4A^2C^2} < 0$ e

$\dfrac{M}{4ACC^2} < 0\,.$ ■

Os casos em que a equação do segundo grau $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, com $AC>0$, representa um ponto ou o conjunto vazio são denominados **casos degenerados da elipse**.

Exemplo 8

Determine se as equações abaixo representam uma elipse ou uma elipse degenerada. Caso seja uma elipse, determine seus principais elementos.

(a) $25x^2+9y^2-225=0$.

Solução.

Como $25x^2+9y^2=225$, *obtemos, dividindo por* 225, *que a equação* $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$ *representa uma elipse com:*

- $a=5$, $b=3$ *e* $c=\sqrt{25-9}=4$;
- *centro:* $C=(0,0)$;
- *reta focal:* $\ell=\text{eixo}-OY : x=0$;
- *reta não focal:* $\ell'=\text{eixo}-OX : y=0$;
- *vértices sobre a reta focal:* $A_1=(0,-5)$ *e* $A_2=(0,5)$;
- *vértices sobre a reta não focal:* $B_1=(-3,0)$ *e* $B_2=(3,0)$;
- *focos:* $F_1=(0,-4)$ *e* $F_2=(0,4)$. □

(b) $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$.

Solução.

Completando os quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned}
&4(x^2-10x)+9(y^2+4y)=-100\\
\iff\ &4(x^2-10x+25)+9(y^2+4y+4)=-100+4\times 25+9\times 4\\
\iff\ &4(x-5)^2+9(y+2)^2=36\\
\iff\ &\frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1\,.
\end{aligned}$$

Logo, a equação representa uma elipse com:

- $a=3$, $b=2$ *e* $c=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$;
- *centro:* $C=(5,-2)$;

- *reta focal:* $\ell : y = -2$, *paralela ao eixo*$-OX$*;*
- *reta não focal:* $\ell' : x = 5$, *paralela ao eixo*$-OY$*;*
- *vértices sobre a reta focal:* $A_1 = (2, -2)$ *e* $A_2 = (8, -2)$*;*
- *vértices sobre a reta não focal:* $B_1 = (5, -4)$ *e* $B_2 = (5, 0)$*;*
- *focos:* $F_1 = (5 - \sqrt{5}, -2)$ *e* $F_2 = (5 + \sqrt{5}, -2)$. □

(c) $36x^2 + 9y^2 - 108x + 6y + 82 = 0$.

Solução.
Completando os quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned} & 36(x^2 - 3x) + 9\left(y^2 + \frac{6}{9}y\right) = -82 \\ \iff\quad & 36\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + 9\left(y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}\right) = -82 + 36 \times \frac{9}{4} + 9 \times \frac{1}{9} \\ \iff\quad & 36\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 9\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = -82 + 81 + 1 \\ \iff\quad & 36\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 9\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = 0\,. \end{aligned}$$

Assim, apenas o ponto $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ *satisfaz à equação dada, isto é, a equação representa um ponto.* □

(d) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 9y + 25 = 0$.

Solução.
Completando os quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned} & 9(x^2 + 2x) + 4\left(y^2 - \frac{9}{4}y\right) = -25 \\ \iff\quad & 9(x^2 + 2x + 1) + 4\left(y^2 - \frac{9}{4}y + \frac{81}{64}\right) = -25 + 9 \times 1 + 4 \times \frac{81}{64} \\ \iff\quad & 9(x+1)^2 + 4\left(y - \frac{9}{8}\right)^2 = -16 + \frac{81}{16} = -\frac{175}{16}\,. \end{aligned}$$

Como $-\frac{175}{16} < 0$, *nenhum ponto do plano satisfaz à equação, isto é, a equação representa o conjunto vazio.* □

Capítulo 15

Hipérbole

1. Hipérbole

Definição 1

Uma **hipérbole** $\mathcal{H}$ de **focos** F_1 e F_2 é o conjunto do plano que consiste de todos os pontos P tais que o módulo da diferença das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, menor do que a distância entre os focos $2c > 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathcal{H} = \{\, P \,|\, |\, d(P, F_1) - d(P, F_2)\, | = 2a \,\} \\ 0 < a < c\,; \quad d(F_1, F_2) = 2c \end{array}}$$

Terminologia

• Os pontos F_1 e F_2 são os **focos** da hipérbole.

• A reta ℓ que contém os focos é a **reta focal**(ver figura 1.).

Figura 1: Reta focal da hipérbole.

• A interseção da hipérbole com a reta focal ℓ consiste de exatamente dois pontos, A_1 e A_2, chamados **vértices** da hipérbole.

Observemos primeiro que, se $P \in \ell - F_1F_2$ então $P \notin \mathcal{H}$. De fato, se P pertence à semirreta de origem F_1 que não contém F_2 e $d(P, F_1) = x$, então $P \notin \mathcal{H}$, pois:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = |x - (x + 2c)| = 2c > 2a.$$

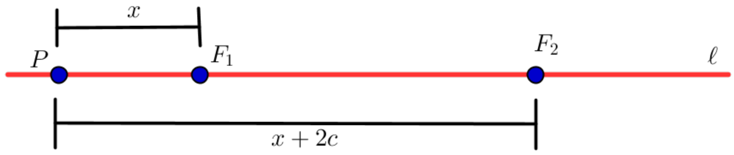

Figura 2: Posicionamento dos vértices em relação aos focos da hipérbole na reta focal.

E, se P pertence à semirreta de origem F_2 que não contém F_1 e $d(P, F_1) = x$, então $P \notin \mathcal{H}$, pois:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = |(x + 2c) - x| = 2c > 2a.$$

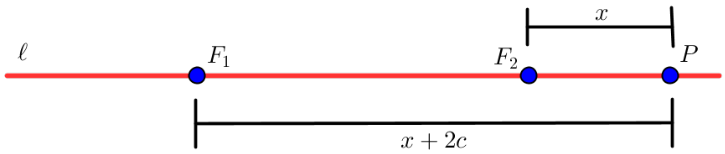

Figura 3: Posicionamento dos vértices em relação aos focos da hipérbole na reta focal.

Seja $A_1 \in F_1F_2 \cap \mathcal{H}$ tal que $d(A_1, F_1) = x$ e $0 < x < c$.

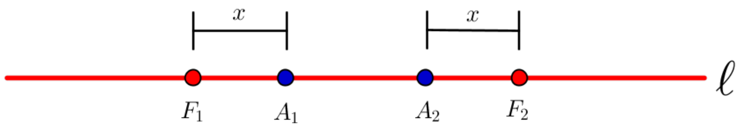

Figura 4: Posicionamento dos vértices em relação aos focos da hipérbole na reta focal.

Como $d(F_1, F_2) = 2c$, temos:

$$\begin{aligned} |d(A_1, F_1) - d(A_1, F_2)| = 2a &\iff |x - (2c - x)| = 2a \iff |2x - 2c| = 2a \\ &\iff 2c - 2x = 2a \iff x = c - a\,. \end{aligned}$$

Logo, o ponto A_1 de F_1F_2, distante $c - a$ de F_1, pertence à hipérbole.

Analogamente, o ponto A_2 de F_1F_2, distante $c - a$ de F_2, pertence à hipérbole $\mathcal{H}$.

• O segmento A_1A_2 é denominado **eixo focal** da hipérbole e seu comprimento é $d(A_1, A_2) = 2a$.

• O ponto médio C do eixo focal A_1A_2 é o **centro** da hipérbole. Este ponto é também o ponto médio do segmento F_1F_2 delimitado pelos focos: $C = \dfrac{A_1 + A_2}{2} = \dfrac{F_1 + F_2}{2}$.

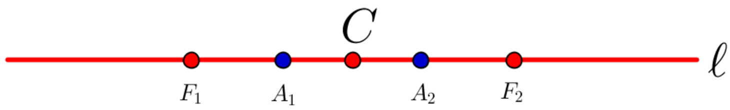

Figura 5: Posicionamento dos focos, vértices e centro da hipérbole na reta focal.

Observe que $d(C, F_1) = d(C, F_2) = c$ e $d(C, A_1) = d(C, A_2) = a$.

• A reta ℓ' que passa pelo centro C e é perpendicular à reta focal ℓ é a **reta não focal** da hipérbole. Como ℓ' é a mediatriz do segmento F_1F_2, a hipérbole não intersecta a reta não focal ℓ', pois, se $P \in \ell'$, temos:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 0 \neq 2a.$$

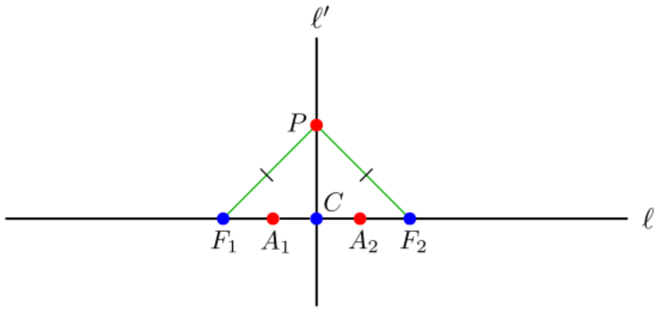

Figura 6: Pontos do eixo não focal não pertencem à hipérbole.

• O segmento B_1B_2 perpendicular ao eixo focal que tem C como ponto médio e comprimento $2b$, onde $b^2 = c^2 - a^2$, é denominado **eixo não focal** da hipérbole, e B_1 e B_2 são os vértices imaginários da hipérbole.

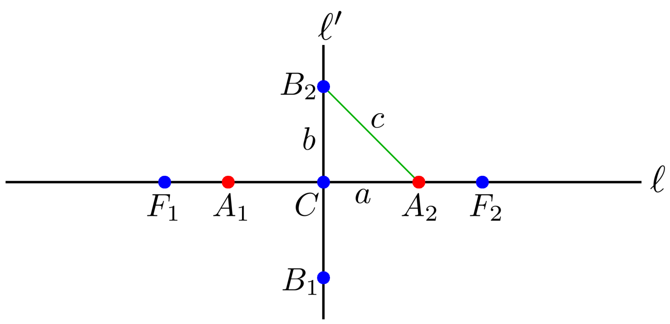

Figura 7: Relação dos comprimentos a, b e c.

• O número $e = \dfrac{c}{a}$ é chamado **excentricidade** da hipérbole. Note que $e > 1$, pois $c > a$.

• O **retângulo de base** da hipérbole $\mathcal{H}$ é o retângulo que tem os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 como pontos médios de seus lados, e as retas que contêm as diagonais do retângulo de base da hipérbole $\mathcal{H}$ são as **assíntotas** de $\mathcal{H}$.

Portanto, geometricamente, as assíntotas da hipérbole $\mathcal{H}$ são as retas que passam pelo centro da hipérbole e tem inclinação $\pm\dfrac{b}{a}$ em relação à reta focal.

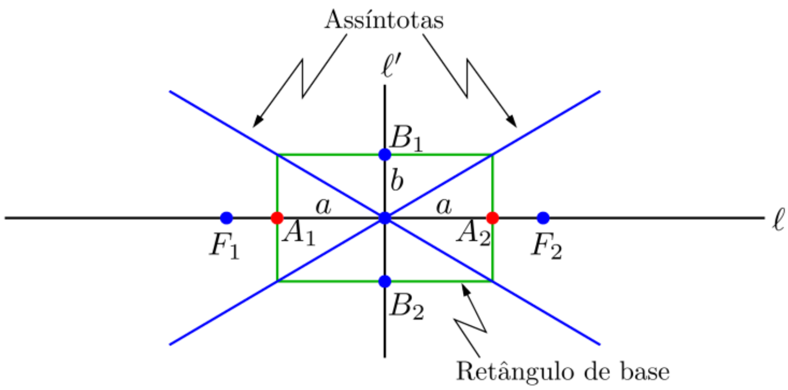

Figura 8: Retângulo de base e assíntotas da hipérbole $\mathcal{H}$.

Pelo teorema de Pitágoras, as diagonais do retângulo de base da hipérbole $\mathcal{H}$ têm comprimento $2c$, e a distância do centro de $\mathcal{H}$ a qualquer vértice do retângulo de base é igual a c.

• Dizemos que uma hipérbole é **equilátera**, se o comprimento do eixo focal for igual ao comprimento do eixo não focal, isto é, $a = b$.

O retângulo de base de uma hipérbole equilátera é, na realidade, um quadrado. Em particular, as retas que contêm as suas diagonais, isto é, suas assíntotas, intersectam-se perpendicularmente.

• Duas hipérboles cujo eixo focal de cada uma é igual ao eixo não focal da outra são denominadas **hipérboles conjugadas**. Como os retângulos de base de duas hipérboles conjugadas são iguais, elas têm o mesmo centro, mesmas assíntotas e os focos a uma mesma distância do centro.

Observação 1

1. A hipérbole $\mathcal{H}$ é simétrica em relação à reta focal, à reta não focal e ao centro.

De fato, se $P \in \mathcal{H}$ e P' é o simétrico de P em relação à reta focal, então

$$\triangle F_2PQ \equiv \triangle F_2P'Q \qquad \text{e} \qquad \triangle F_1PQ \equiv \triangle F_1P'Q\,.$$

Em particular, $|F_2P| = |F_2P'|$ e $|F_1P| = |F_1P'|$. Logo,

$$2a = |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = |d(P', F_1) - d(P', F_2)| \Longrightarrow P' \in \mathcal{H}\,.$$

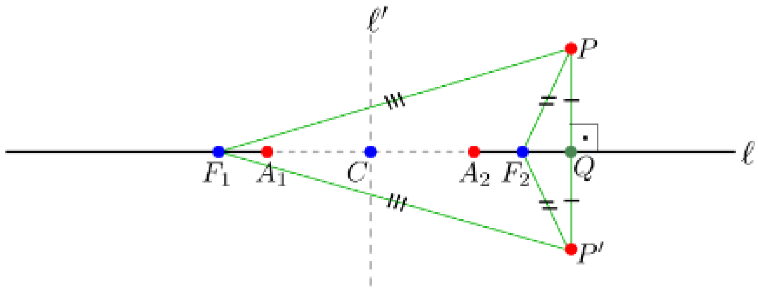

Figura 9: Simetria da hipérbole em relação à reta focal.

Se $P \in \mathcal{H}$ e P'' é o simétrico de P em relação ao centro, então:

$$\triangle PCF_2 \equiv \triangle P''CF_1 \qquad \text{e} \qquad \triangle F_1CP \equiv \triangle F_2CP''\,.$$

Em particular, $|F_2P| = |F_1P''|$ e $|F_1P| = |F_2P''|$. Logo,

$$2a = |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = |d(P'', F_2) - d(P'', F_1)| \Longrightarrow P'' \in \mathcal{H}\,.$$

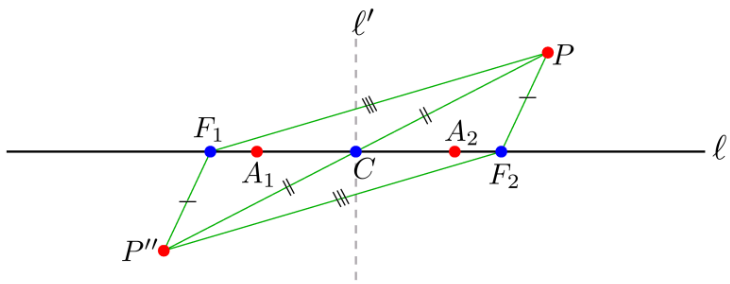

Figura 10: Simetria da hipérbole em relação ao centro.

A simetria em relação à reta não focal se verifica de maneira análoga, usando congruência de triângulos.

2. Forma canônica da hipérbole

Vamos obter a equação da hipérbole em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY em alguns casos especiais.

2.1 Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX

Neste caso, $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, $A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$, $B_1 = (0, -b)$ e $B_2 = (0, b)$. Logo,

$$P = (x, y) \in \mathcal{H} \iff |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

$$\iff \begin{cases} d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a & \text{(ramo direito de } \mathcal{H}) \\ \text{ou} \\ d(P, F_1) - d(P, F_2) = -2a & \text{(ramo esquerdo de } \mathcal{H}) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a & \text{(ramo direito de } \mathcal{H}) \\ \text{ou} \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -2a & \text{(ramo esquerdo de } \mathcal{H}). \end{cases}$$

Continuando o desenvolvimento de maneira análoga ao caso da elipse, e lembrando que $b^2 = c^2 - a^2$, chegamos à conclusão que

$$P = (x, y) \in \mathcal{H} \iff (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \iff b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \,.$$

Portanto, $P = (x, y) \in \mathcal{H}$ se, e somente se, as coordenadas x e y satisfazem à equação

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1},$$

chamada **forma canônica da equação da hipérbole de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo$-OX$**.

As assíntotas dessa hipérbole são as retas que passam pela origem (centro) e têm inclinação $\pm\frac{b}{a}$ em relação ao eixo$-OX$ (reta focal). Logo as assíntotas são as retas $y = \pm\frac{b}{a}\,x$, ou seja, $bx - ay = 0$ e $bx + ay = 0$.

2.2 Esboço da Hipérbole

Sendo $\dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{x^2}{a^2} - 1 = \dfrac{x^2 - a^2}{a^2}$, temos que $y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, onde $x \geq a$ ou $x \leq -a$.

Considere a função $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, $x \in [a, +\infty)$. Como $y = 0$ para $x = a$, y é crescente e côncava (verifique que $y' = \dfrac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}} > 0$ e $y'' = \dfrac{-ab}{(x^2 - a^2)^{3/2}} < 0$ para todo $x \in (a, +\infty)$), e o gráfico da função é da forma:

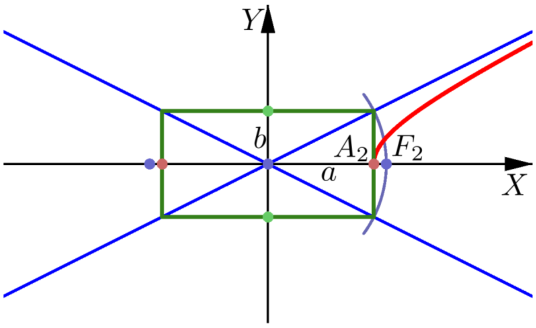

Figura 11: Gráfico da função $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, $x \in [a, +\infty]$.

Pela simetria da hipérbole em relação ao eixo$-OX$ (reta focal) e ao eixo$-OY$ (reta não focal), obtemos o seu gráfico:

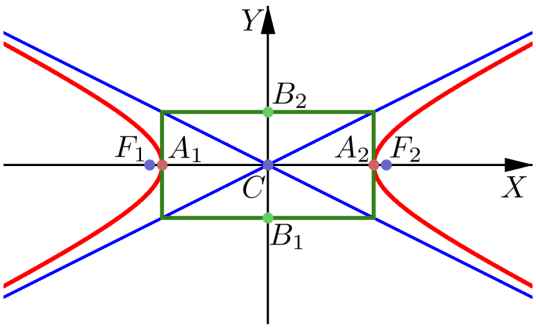

Figura 12: Gráfico da hipérbole $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Podemos, agora, explicar o porquê do nome **assíntota** para as retas que contêm as diagonais do retângulo de base.

Sejam $P = (x, y)$ um ponto da hipérbole, isto é, $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, e

$r_+ : bx - ay = 0$ uma de suas assíntotas. Então,

$$\begin{aligned} d(P, r_+) &= \frac{|bx - ay|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \times \frac{|bx + ay|}{|bx + ay|} \\ &= \frac{|b^2x^2 - a^2y^2|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \times \frac{1}{|bx + ay|} = \frac{a^2b^2}{\sqrt{b^2 + a^2}} \times \frac{1}{|bx + ay|}. \end{aligned}$$

Logo, $d(P, r_+) \to 0$, quando $x \to +\infty$ e $y \to +\infty$ ou $x \to -\infty$ e $y \to -\infty$.

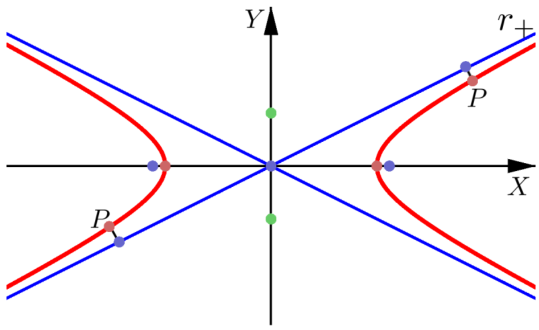

Figura 13: $d(P, r_+) \to 0$, quando $x \to \pm\infty$ e $y \to \pm\infty$.

De modo análogo, podemos verificar que $d(P, r_-) \to 0$, quando $x \to +\infty$ e $y \to -\infty$ ou $x \to -\infty$ e $y \to +\infty$, onde $P = (x, y) \in \mathcal{H}$ e $r_- : bx + ay = 0$ é a outra assíntota da hipérbole.

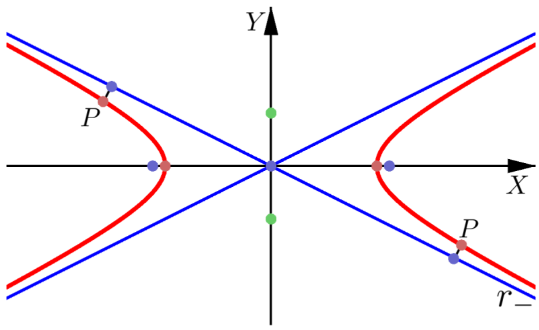

Figura 14: $d(P, r_+) \to 0$, quando $x \to \pm\infty$ e $y \to \mp\infty$.

2.3 Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY

Neste caso, temos $F_1 = (0, -c)$, $F_2 = (0, c)$, $A_1 = (0, -a)$, $A_2 = (0, a)$, $B_1 = (-b, 0)$ e $B_2 = (b, 0)$.

Procedendo como no caso anterior, obtemos que a equação da hipérbole é:

$\boxed{\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1}$ **Forma canônica da hipérbole de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo$-OY$.**

onde $b^2 = c^2 - a^2$. As assíntotas são as retas $x = \pm\dfrac{b}{a}\,y$, ou seja,

$$ax - by = 0 \qquad \text{e} \qquad ax + by = 0\,.$$

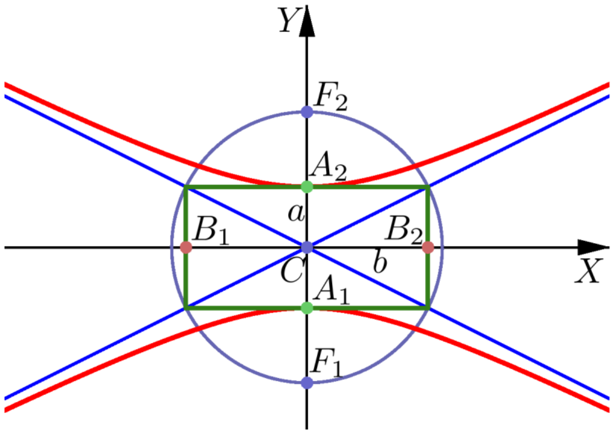

Figura 15: Hipérbole $\mathcal{H} : \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

Exemplo 1

Determine a equação da hipérbole equilátera com focos nos pontos $(-\sqrt{8}, 0)$ e $(\sqrt{8}, 0)$.

Solução.

Como $F_1 = (-\sqrt{8}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{8}, 0)$, o centro da hipérbole é $C = \dfrac{F_1 + F_2}{2} = (0, 0)$ e a reta focal é o eixo$-OX$. Sendo a hipérbole equilátera ($a = b$), $c = \sqrt{8}$ e $c^2 = a^2 + b^2$, obtemos $8 = a^2 + a^2 = 2a^2$, isto é, $a^2 = 4$. Logo, $a = b = 2$ e

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$

é a equação da hipérbole.
Além disso, $A_1 = (-2, 0)$ e $A_2 = (2, 0)$ são os vértices, $B_1 = (0, -2)$ e $B_2 = (0, 2)$ são os vértices imaginários e $y = \pm x$ são as assíntotas da hipérbole $\mathcal{H}$. $\square$

Exemplo 2

Mostre que a excentricidade de qualquer hipérbole equilátera é $\sqrt{2}$.

Solução.

Como $a = b$ e $c^2 = a^2 + b^2$, temos que $c^2 = 2a^2$, ou seja, $c = \sqrt{2}a$. Logo, $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$. □

Exemplo 3

Os vértices de uma hipérbole são os pontos $(0,3)$ *e* $(0,-3)$ *e um de seus focos é o ponto* $(0,5)$. *Determine a equação da hipérbole, o comprimento do seu eixo focal e suas assíntotas.*

Solução.

A hipérbole tem centro $C = \dfrac{(0,3)+(0,-3)}{2} = (0,0)$, reta focal=eixo$-OY$, $c = d((0,0),(0,5)) = 5$, $a = d((0,0),(0,3)) = 3$ e $b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$. Então, $\mathcal{H} : \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 1$ é a equação da hipérbole, $x = \pm\dfrac{4}{3}y$ são as suas assíntotas e $2a = 6$ o comprimento do seu eixo focal. □

Exemplo 4

O centro de uma hipérbole é a origem, sua reta focal é um dos eixos coordenados e uma de suas assíntotas é a reta $2x - 5y = 0$. *Determine a equação da hipérbole* $\mathcal{H}$, *supondo que o ponto* $(4,6) \in \mathcal{H}$.

Solução.

Como o centro é a origem e a reta focal (eixo$-OX$ ou eixo$-OY$) é uma bissetriz das assíntotas, a reta $2x + 5y = 0$ é a outra assíntota. Vamos analisar os dois casos possíveis.

- Reta focal = eixo$-OX$.

Neste caso, $\mathcal{H} : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ e $\dfrac{b}{a} = \dfrac{2}{5}$, isto é, $b = \dfrac{2}{5}a$. Como $(4,6) \in \mathcal{H}$, temos que $\dfrac{16}{a^2} - \dfrac{36}{\frac{4a^2}{25}} = 1$, ou seja, $16 \times 4 - 25 \times 36 = 4a^2$, o que é um absurdo, pois $4a^2 > 0$ e $16 \times 4 - 25 \times 36 < 0$.

• Reta focal = eixo$-OY$.

Neste caso, $\mathcal{H} : \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ e $\dfrac{b}{a} = \dfrac{5}{2}$, isto é, $a = \dfrac{2}{5}b$. Como $(4,6) \in \mathcal{H}$, temos que $\dfrac{36}{\frac{4b^2}{25}} - \dfrac{16}{b^2} = 1$, ou seja, $36 \times 25 - 16 \times 4 = 4b^2$. Logo $b^2 = 9 \times 25 - 16 = 209$, $a^2 = \dfrac{836}{25}$ e

$$\mathcal{H} : \frac{y^2}{\frac{856}{25}} - \frac{x^2}{209} = 1$$

é a equação da hipérbole. $\square$

Exemplo 5

Determine a equação, os vértices, os focos e a excentricidade da hipérbole conjugada da hipérbole

$$9x^2 - 4y^2 = 36.$$

Solução.

A hipérbole $\mathcal{H} : 9x^2 - 4y^2 = 36$, que também pode ser escrita na forma $\mathcal{H} : \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$, tem centro na origem, reta focal = eixo$-OX$, $a = 2$, $b = 3$ e $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$.

Então, a hipérbole $\mathcal{H}'$, conjugada da hipérbole $\mathcal{H}$, tem centro na origem, $a' = b = 3$, $b' = a = 2$, $c' = c = \sqrt{13}$ e reta focal = eixo$-OY$.

Logo, $\mathcal{H}' : \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{4} = 1$ é a equação da hipérbole conjugada da hipérbole $\mathcal{H}$, $F_1 = (0, -\sqrt{13})$ e $F_2 = (0, \sqrt{13})$ são seus focos, $A_1 = (0, -3)$ e $A_2 = (0, 3)$ são seus vértices e $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$ é a sua excentricidade. $\square$

3. Hipérbole com centro no ponto $\overline{O} = (x_0, y_0)$

• Caso I. Reta focal paralela ao eixo$-OX$

Como o centro $\overline{O} = (x_0, y_0)$ pertence à reta focal, temos que $\ell : y = y_0$ é a equação cartesiana da reta focal.

Além disso, como

$$d(F_1, \overline{O}) = d(F_2, \overline{O}) = c,$$

onde F_1 e F_2 são os focos da elipse, temos que $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$.

Seja $P = (\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0)$ um ponto pertencente à hipérbole, onde

$$x = \overline{x} + x_0 \text{ e } y = \overline{y} + y_0$$

são suas coordenadas no sistema OXY, e $\overline{x}$, $\overline{y}$ são suas coordenadas no sistema $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$, obtido quando o sistema OXY é transladado para a origem $\overline{O} = (x_0, y_0)$.

Então, P pertence à hipérbole se, e somente se,

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\,,$$

ou seja,

$$\iff \quad |d((\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0), (x_0 - c, y_0)) - d((\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0), (x_0 + c, y_0))| = 2a$$

$$\iff \quad |d((\overline{x}, \overline{y}), (-c, 0)) - d((\overline{x}, \overline{y}), (c, 0))| = 2a$$

$$\iff \quad \frac{\overline{x}^2}{a^2} - \frac{\overline{y}^2}{b^2} = 1 \iff \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1\,.$$

Logo **a forma canônica da equação da hipérbole com centro no ponto** (x_0, y_0) **e reta focal paralela ao eixo**$-OX$ **é:**

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1\,, \qquad \text{onde} \qquad b^2 = c^2 - a^2}$$

Os focos são $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$; a reta focal é $\ell : y = y_0$; os vértices são $A_1 = (x_0 - a, y_0)$ e $A_2 = (x_0 + a, y_0)$; a reta não focal é $\ell' : x = x_0$; os vértices imaginários são $B_1 = (x_0, y_0 - b)$ e $B_2 = (x_0, y_0 + b)$, e as assíntotas são as retas $(y - y_0) = \pm b/a(x - x_0)$, ou seja, $b(x-x_0)-a(y-y_0)=0 \quad$ e $\quad b(x-x_0)+a(y-y_0)=0\,.$

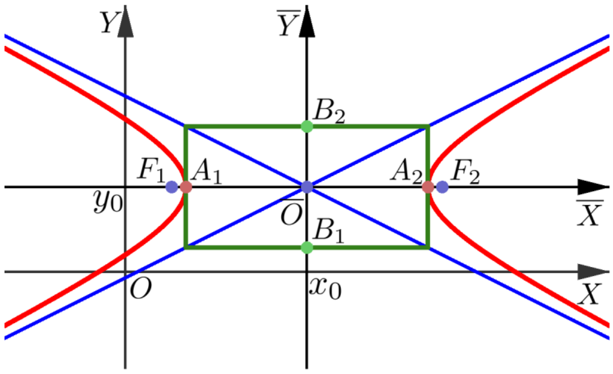

Figura 16: Gráfico da hipérbole $\mathcal{H}:\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1\,.$

• Caso II. Reta focal paralela ao eixo$-OY$

Procedendo como no caso anterior, verifica-se **a forma canônica da equação da hipérbole com centro no ponto (x_0,y_0) e reta focal paralela ao eixo$-OY$ é:**

$$\boxed{\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1\,, \qquad \text{onde} \qquad b^2=c^2-a^2}$$

Neste caso, os focos são $F_1=(x_0,y_0-c)$ e $F_2=(x_0,y_0+c)$; a reta focal é $\ell : x=x_0$; os vértices são $A_1=(x_0,y_0-a)$ e $A_2=(x_0,y_0+a)$; a reta não focal é $\ell' : y=y_0$; os vértices imaginários são $B_1=(x_0-b,y_0)$ e $B_2=(x_0+b,y_0)$, e as assíntotas são as retas $(x-x_0)=\pm b/a(y-y_0)$, ou seja, $a(x-x_0)-b(y-y_0)=0$ e $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$.

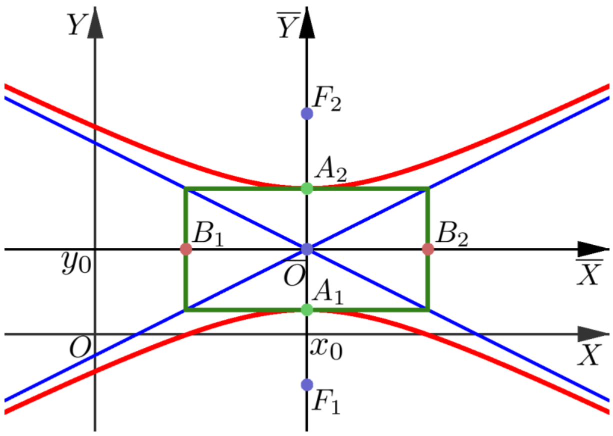

Figura 17: Gráfico da hipérbole $\mathcal{H}:\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1\,.$

Exemplo 6

Determine o ângulo agudo de interseção das assíntotas da hipérbole

$$9x^2 - y^2 - 36x - 2y + 44 = 0.$$

Solução.
A equação da hipérbole se escreve na forma:

$$\begin{aligned}
&9(x^2 - 4x) - (y^2 + 2y) = -44\\
&9(x-2)^2 - (y+1)^2 = -44 + 36 - 1 = -9\\
&\frac{(y+1)^2}{9} - (x-2)^2 = 1\,.
\end{aligned}$$

Logo, $C = (2, -1)$ é o centro, a reta focal é $\ell : x = 2$, paralela ao eixo$-OY$, $a = 3$, $b = 1$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10}$ e as assíntotas são $x - 2 = \pm\frac{1}{3}(y+1)$, ou seja, $y = 3x - 7$ e $y = -3x + 5$.
Assim, $\operatorname{tg}\beta = 3$, $\operatorname{tg}\alpha = -3$, $\theta = \alpha - \beta$ e

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta} = \frac{-6}{1-9} = \frac{3}{4}\,,$$

onde β e α são os ângulos que as retas $y = 3x - 7$ e $y = -3x + 5$ fazem, respectivamente, com o semieixo OX positivo, e θ é o ângulo agudo entre as assíntotas. □

Exemplo 7

As retas $r : 2x + y = 3$ e $s : 2x - y = 1$ são as assíntotas de uma hipérbole que passa pelo ponto $(6, 2)$. Determine sua equação.

Solução.
O centro $C = (x, y)$ da hipérbole é o ponto de interseção das assíntotas, isto é, (x, y) é a solução do sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 3\\ 2x - y = 1\,. \end{cases}$$

Logo, $C = (1, 1)$ é o centro. A reta focal ℓ e a reta não focal ℓ' são as bissetrizes das assíntotas, ou seja,

$$\begin{aligned}(x,y)\in\ell\cup\ell' &\iff d((x,y),\ell)=d((x,y),\ell')\\ &\iff \tfrac{|2x+y-3|}{\sqrt{5}}=\tfrac{|2x-y-1|}{\sqrt{5}}\\ &\iff 2x+y-3=\pm(2x-y-1)\\ &\iff y=1 \text{ ou } x=1.\end{aligned}$$

Portanto, a reta focal é a reta $x=1$ ou a reta $y=1$. Vamos analisar os dois casos possíveis.

• Reta focal $\ell : y=1$, paralela ao eixo$-OX$.

Neste caso, $\mathcal{H} : \dfrac{(x-1)^2}{a^2}-\dfrac{(y-1)^2}{b^2}=1$ e $\dfrac{b}{a}=2$, ou seja, $b=2a$. Como $b^2=4a^2$ e $(6,2)\in\mathcal{H}$, temos que $\mathcal{H} : 4(x-1)^2-(y-1)^2=4a^2$ e $4\times 25-1=99=4a^2$.

Portanto, $\mathcal{H} : 4(x-1)^2-(y-1)^2=99$, ou seja, $\mathcal{H} : \dfrac{(x-1)^2}{\frac{99}{4}}-\dfrac{(y-1)^2}{99}=1$.

• Reta focal $\ell : x=1$, paralela ao eixo$-OY$.

Neste caso, $\mathcal{H} : \dfrac{(y-1)^2}{a^2}-\dfrac{(x-1)^2}{b^2}=1$ e $\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{2}$, ou seja, $a=2b$. Como $a^2=4b^2$ e $(6,2)\in\mathcal{H}$, temos que $\mathcal{H} : (y-1)^2-4(x-1)^2=4b^2$ e $4b^2=1-4\times 25=-99<0$, o que é um absurdo.

Assim, a equação procurada corresponde ao primeiro caso:

$$\mathcal{H} : 4(x-1)^2-(y-1)^2=99.$$

□

4. Equação do segundo grau com $B=0$ e $AC<0$.

Consideremos a equação da hipérbole $\mathcal{H}$ com centro no ponto (x_0,y_0) e reta focal paralela ao eixo$-OX$:

$$\mathcal{H} : \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1\,.$$

Desenvolvendo a equação acima, obtemos:

$$b^2x^2-a^2y^2-2x_0b^2x+2y_0a^2y+x_0^2b^2-a^2y_0^2-a^2b^2=0,$$

que é da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,,$$

onde $A = b^2$, $B = 0$, $C = -a^2$, $D = -2x_0b^2$, $E = 2y_0a^2$, $F = x_0^2b^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2$. Em particular, **os coeficientes A e C têm sinais opostos, e $B = 0$**. Podemos verificar que o mesmo ocorre quando desenvolvemos a equação da hipérbole de reta focal paralela ao eixo$-OY$.

Reciprocamente, temos a seguinte proposição:

Proposição 1

Se os coeficientes A e C da equação

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

têm sinais opostos, então a equação representa:

- *uma hipérbole de eixos paralelos aos eixos coordenados;*

ou

- *um par de retas concorrentes.*

Prova.

Suponhamos que $A > 0$ e $C < 0$. Então,

$$\begin{aligned}
&Ax^2 + Dx - (-Cy^2 - Ey) = -F\,,\\
&\frac{\left(x^2 + \dfrac{D}{A}x\right)}{-C} - \frac{\left(y^2 + \dfrac{E}{C}y\right)}{A} = \frac{F}{AC}\,,\\
&\frac{\left(x + \dfrac{D}{2A}\right)^2}{-C} - \frac{\left(y + \dfrac{E}{2C}\right)^2}{A} = \frac{F}{AC} - \frac{D^2}{4A^2C} - \frac{E^2}{4AC^2}\,,\\
&\frac{\left(x + \dfrac{D}{2A}\right)^2}{-C} - \frac{\left(y + \dfrac{E}{2C}\right)^2}{A} = \frac{4ACF - CD^2 - AE^2}{4A^2C^2}\,.
\end{aligned}$$

Logo, a equação (1) representa uma hipérbole com eixos paralelos aos eixos coordenados, se $4ACF - CD^2 - AE^2 \neq 0$, e representa o par de retas concorrentes

$$y + \frac{E}{2C} = \pm\sqrt{\frac{-A}{C}}\left(x + \frac{D}{2A}\right)\,,$$

se $4ACF - CD^2 - AE^2 = 0$ ■

O caso em que a equação do segundo grau $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, com $AC<0$, representa um par de retas concorrentes é chamado **caso degenerado da hipérbole**.

Exemplo 8

Determine se as equações abaixo representam uma hipérbole ou uma hipérbole degenerada. Caso seja uma hipérbole, determine seus principais elementos.

(a) $9x^2 - 25y^2 - 225 = 0$.

Solução.

Como $9x^2 - 25y^2 = 225$*, obtemos, dividindo por* 225*, a equação*

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1\,,$$

que representa uma hipérbole com:

- $a = 5$, $b = 3$ *e* $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$;
- *centro:* $C = (0,0)$;
- *reta focal:* $\ell = \text{eixo}-OX : y = 0$;
- *reta não focal:* $\ell' = \text{eixo}-OY : x = 0$;
- *vértices:* $A_1 = (-5,0)$ *e* $A_2 = (5,0)$;
- *vértices imaginários (na reta não focal):* $B_1 = (0,-3)$ *e* $B_2 = (0,3)$;
- *focos:* $F_1 = (-\sqrt{34},0)$ *e* $F_2 = (\sqrt{34},0)$;
- *assíntotas:* $y = \pm\frac{3}{5}\,x$*, ou seja* $3x \pm 5y = 0$. $\square$

(b) $x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + 9 = 0$.

Solução.

Completando os quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned}
& x^2 + 6x - 2(y^2 - 2y) = -9 \\
\iff\quad & (x^2 + 6x + 9) - 2(y^2 - 2y + 1) = -9 + 9 - 2 \\
\iff\quad & (x+3)^2 - 2(y-1)^2 = -2 \\
\iff\quad & (y-1)^2 - \frac{(x+3)^2}{2} = 1\,.
\end{aligned}$$

Logo a equação representa uma hipérbole com:

- $a = 1$, $b = \sqrt{2}$ e $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$;
- *centro:* $C = (-3, 1)$;
- *reta focal:* $\ell : x = -3$, *paralela ao eixo*$-OY$;
- *reta não focal:* $\ell' : y = 1$, *paralela ao eixo*$-OX$;
- *vértices:* $A_1 = (-3, 0)$ e $A_2 = (-3, 2)$;
- *vértices imaginários (na reta não focal):* $B_1 = (-3-\sqrt{2}, 1)$ e $B_2 = (-3+\sqrt{2}, 1)$;
- *focos:* $F_1 = (-3, 1 - \sqrt{3})$ e $F_2 = (-3, 1 + \sqrt{3})$;
- *assíntotas* $(x+3) = \pm\sqrt{2}(y-1)$, *ou seja,* $x+\sqrt{2}y = -3+\sqrt{2}$ e $x-\sqrt{2}y = -3-\sqrt{2}$.

□

(c) $9x^2 - 16y^2 + 90x - 128y - 31 = 0$.

Solução.

Completando os quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned}
& 9(x^2 + 10x) - 16(y^2 + 8y) = 31 \\
\Longleftrightarrow\ & 9(x^2 + 10x + 25) - 16(y^2 + 8y + 16) = 31 + 9 \times 25 - 16 \times 16 \\
\Longleftrightarrow\ & 9(x+5)^2 - 16(y+4)^2 = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & 9(x+5)^2 = 16(y+4)^2 \\
\Longleftrightarrow\ & 3(x+5) = \pm 4(y+4) \\
\Longleftrightarrow\ & 3(x+5) \pm 4(y+4) = 0\,.
\end{aligned}$$

Logo, a equação representa o par de retas, $3x + 4y = -31$ e $3x - 4y = 1$, *que se cortam no ponto* $(-5, -4)$. □

Capítulo 16

Parábola

1. Parábola

Definição 1

Sejam $\mathcal{L}$ uma reta no plano e F um ponto no plano não pertencente a $\mathcal{L}$. A **parábola** $\mathcal{P}$ de **diretriz** $\mathcal{L}$ e **foco** F é o conjunto que consiste de todos os pontos P do plano, equidistantes do ponto F e da reta $\mathcal{L}$, isto é,

$$\boxed{\mathcal{P} = \{\, P \mid d(P,F) = d(P,\mathcal{L}) \,\}\,.}$$

Terminologia

• Como dissemos na definição, o ponto F é o **foco** e a reta $\mathcal{L}$ é a **diretriz** da parábola.

• A reta ℓ que contém o foco e é perpendicular à diretriz $\mathcal{L}$ é chamada **reta focal** da parábola.

• O **vértice** da parábola é o ponto V da reta focal, equidistante de F e de $\mathcal{L}$. Em particular, $V \in \mathcal{P}$.

• Se A é o ponto onde $\mathcal{L}$ intersecta ℓ, então V é o ponto médio do segmento AF, ou seja,

$$V = \frac{A+F}{2}.$$

• O número $2p = d(F, \mathcal{L})$ é o **parâmetro** da parábola. Note que $d(V, F) = d(V, \mathcal{L}) = p$.

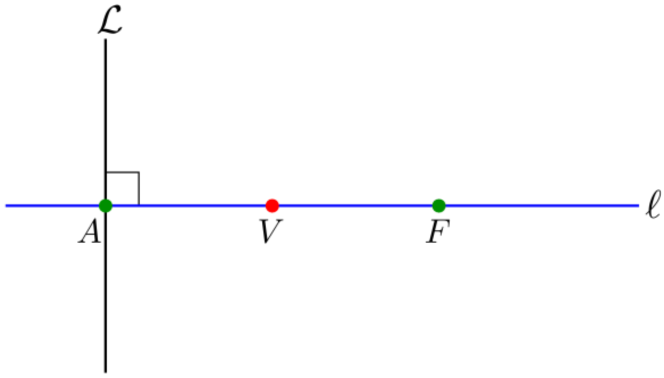

Figura 1: Posição do vértice em relação ao foco e à diretriz da parábola.

Observação 1

Toda parábola é simétrica em relação à sua reta focal.

De fato, seja $\mathcal{P}$ uma parábola de foco F, vértice V, diretriz $\mathcal{L}$ e reta focal ℓ.

Seja $P \in \mathcal{P}$ e seja P' o ponto simétrico de P em relação à reta focal ℓ.

O segmento $PP' \perp \ell$ intersecta a reta focal ℓ num ponto Q que é o ponto médio do segmento PP'.

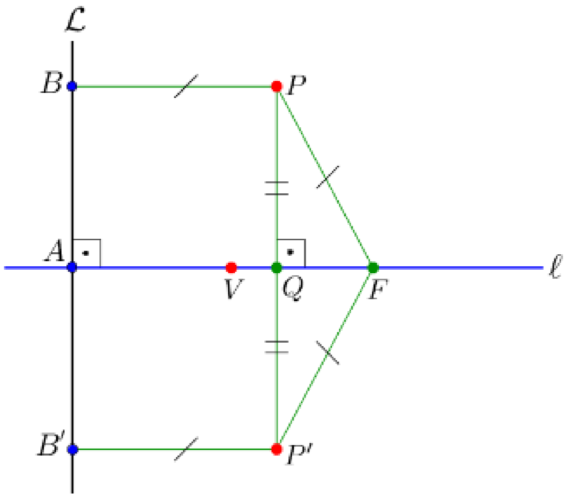

Figura 2: Simetria da parábola em relação à reta focal ℓ.

Os triângulos $\triangle PQF$ e $\triangle P'QF$ são congruentes, pois o lado QF é comum, $d(P, Q) = d(P', Q)$ e os ângulos $\widehat{PQF}$ e $\widehat{P'QF}$ são retos. Em particular, $d(P, F) = d(P', F)$.

Além disso, $d(P, \mathcal{L}) = d(Q, \mathcal{L}) = d(P', \mathcal{L})$, pois $BPQA$ e $AQP'B'$ são retângulos.

Como $P \in \mathcal{P}$, temos $d(P, F) = d(P, \mathcal{L})$. Portanto, $d(P', F) = d(P', \mathcal{L})$, isto é, $P' \in \mathcal{P}$.

2. Formas canônicas da parábola

Vamos estabelecer as formas canônicas da parábola em relação a um sistema de coordenadas OXY no plano. Para isso, vamos considerar primeiro os casos em que o vértice da parábola é a origem e a reta focal é um dos eixos coordenados. E, por último, vamos considerar os casos em que o vértice é um ponto qualquer e a reta focal é paralela a um dos eixos coordenados.

2.1 Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo$-OX$

Caso I. O foco F está **à direita** da diretriz $\mathcal{L}$.

Como o vértice da parábola $\mathcal{P}$ é a origem $V = (0,0)$, temos que o foco é o ponto $F = (p,0)$ e a diretriz é a reta $\mathcal{L} : x = -p$, onde $2p = d(F,\mathcal{L})$.

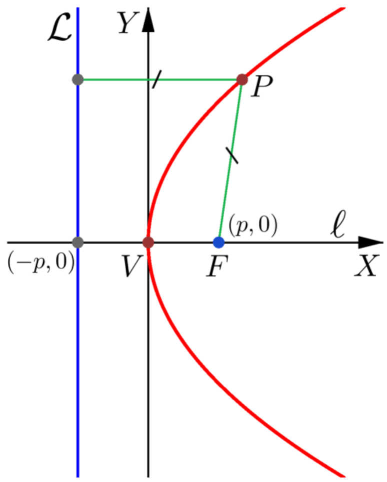

Figura 3: Parábola $\mathcal{P} : y^2 = 4px$.

Logo,

$$\begin{aligned}
& P = (x,y) \in \mathcal{P} \\
\iff & d(P,F) = d(P,\mathcal{L}) \\
\iff & \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p| \\
\iff & (x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2 \\
\iff & x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2 \\
\iff & -2px + y^2 = 2px \\
\iff & \boxed{y^2 = 4px}
\end{aligned}$$

Caso II. O foco F está **à esquerda** da diretriz $\mathcal{L}$.

Neste caso, temos

$$F = (-p,0) \text{ e } \mathcal{L} : x = p,$$

onde $2p = d(F,\mathcal{L})$.

Então,

$$
\begin{aligned}
& P=(x,y)\in\mathcal{P} \\
\Longleftrightarrow\ & d(P,F)=d(P,\mathcal{L}) \\
\Longleftrightarrow\ & \sqrt{(x+p)^2+y^2}=|x-p| \\
\Longleftrightarrow\ & (x+p)^2+y^2=(x-p)^2 \\
\Longleftrightarrow\ & x^2+2px+p^2+y^2=x^2-2px+p^2 \\
\Longleftrightarrow\ & 2px+y^2=-2px \\
\Longleftrightarrow\ & \boxed{y^2=-4px}
\end{aligned}
$$

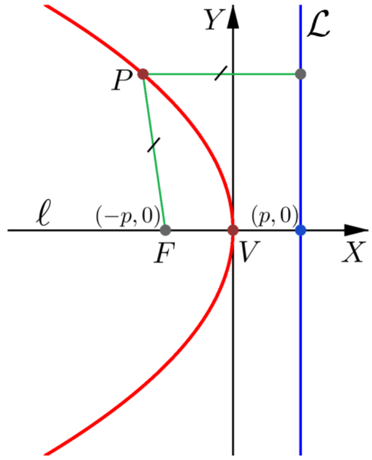

Figura 4: Parábola $\mathcal{P} : y^2 = -4px$.

2.2 Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo$-OY$

Caso I. O foco F está **acima** da diretriz $\mathcal{L}$.

Neste caso, $F = (0, p)$ e $\mathcal{L} : y = -p$, onde $2p = d(F, \mathcal{L})$. Logo, $P = (x, y) \in \mathcal{P}$ se, e somente se,

$$\sqrt{x^2+(y-p)^2}=|y+p| \Longleftrightarrow \boxed{x^2=4py}$$

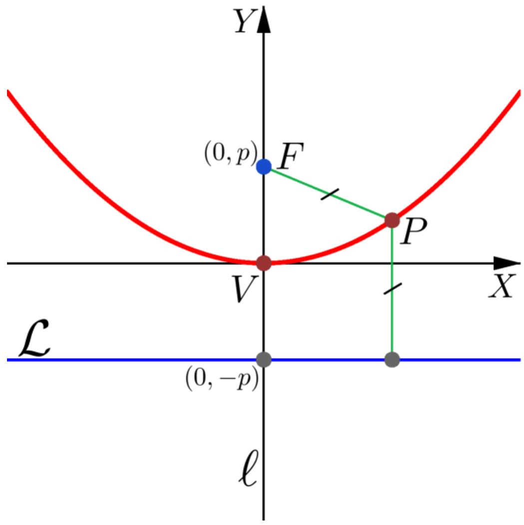

Figura 5: Parábola $\mathcal{P} : x^2 = 4py$.

Caso II. O foco F está **abaixo** da diretriz $\mathcal{L}$.

Neste caso, $F = (0, -p)$ e $\mathcal{L} : y = p$, onde $2p = d(F, \mathcal{L})$. Logo, $P = (x, y) \in \mathcal{P}$ se, e somente se,

$$\sqrt{x^2 + (y+p)^2} = |y - p| \iff \boxed{x^2 = -4py}$$

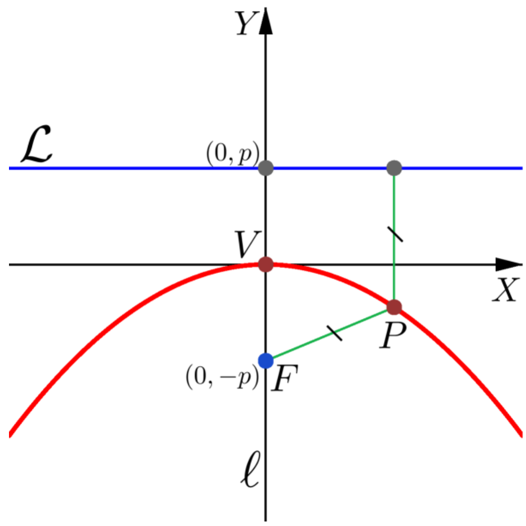

Figura 6: Parábola $\mathcal{P} : x^2 = -4py$.

Exemplo 1

Determine a equação da parábola $\mathcal{P}$ com vértice V na origem, cujo foco é o ponto:

(a) $F = (3, 0)$.

Solução.
Temos $p = d(V, F) = 3$ e reta focal $=$ eixo$-OX$. Como o foco F está à direita do vértice, temos que a diretriz é a reta $\mathcal{L} : x = -3$ e a equação da parábola é $\mathcal{P} : y^2 = 12x$. $\square$

(b) $F = (0, -2)$.

Solução.
Temos $p = d(V, F) = 2$ e reta focal $=$ eixo$-OY$. Como o foco F está abaixo do vértice, temos que a diretriz é a reta $\mathcal{L} : y = 2$ e a equação da parábola é $\mathcal{P} : x^2 = -8y$. $\square$

Exemplo 2

Uma parábola $\mathcal{P}$ com vértice V na origem, cuja reta focal é o eixo$-OY$, passa pelo ponto $(4,-2)$. Determine sua equação, o foco F e a equação da diretriz $\mathcal{L}$.

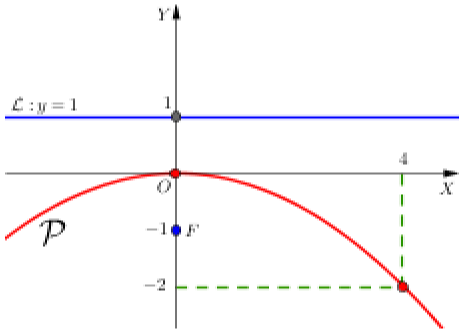

Figura 7: Parábola $\mathcal{P}: x^2 = -8y$.

Solução.

A parábola tem equação $\mathcal{P}: x^2 = \pm 4py$, com $p = d(V,F) > 0$.

Como $(2\sqrt{2}, -2) \in \mathcal{P}$, temos que $\mathcal{P}: x^2 = -4py$ e $8 = 8p$. Logo, $p = 1$, $F = (0,-1)$, $\mathcal{L}: y = 1$ e a equação da parábola é $\mathcal{P}: x^2 = -4y$. □

Exemplo 3

Um círculo $\mathcal{C}$ com centro no ponto $C = (4,-1)$ passa pelo foco F da parábola $\mathcal{P}: x^2 = -16y$. Mostre que a diretriz $\mathcal{L}$ da parábola é tangente ao círculo $\mathcal{C}$.

Solução.

A reta focal da parábola $\mathcal{P}$ é o eixo$-OY$, o vértice é a origem, o foco está abaixo da diretriz e $4p = 16$. Então, $F = (0,-4)$ e $\mathcal{L}: y = 4$.

A equação do círculo é:

$$\mathcal{C}: (x-4)^2 + (y+1)^2 = r^2.$$

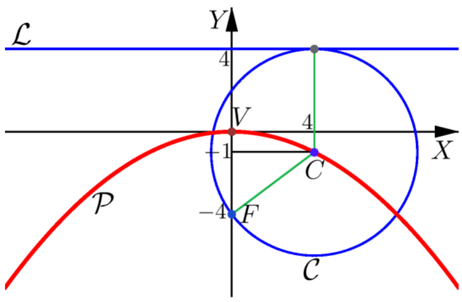

Figura 8: Parábola $\mathcal{P}$ e círculo $\mathcal{C}$.

Como $F = (0,-4) \in \mathcal{C}$, temos $16+9 = r^2$, ou seja, $r = 5$. Então,

$$(x,y) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{L} \iff (x-4)^2 + (4+1)^2 = 5^2$$
$$\iff (x-4)^2 = 0 \iff x = 4 \iff (x,y) = (4,4).$$

Logo, $\mathcal{L}$ tangencia $\mathcal{C}$ no ponto $(4,4)$. □

2.3 Parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OX$

Para obtermos a forma canônica da parábola de vértice no ponto $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OX$, consideremos um sistema de coordenadas $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$, com origem $\overline{O} = V = (x_0, y_0)$ e eixos $\overline{O}\,\overline{X}$ e $\overline{O}\,\overline{Y}$ paralelos e de igual sentido aos eixos OX e OY, respectivamente.

Caso I. O foco F está **à direita** da diretriz $\mathcal{L}$.

Sabemos que a equação da parábola no sistema de coordenadas $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ é $\overline{y}^2 = 4p\overline{x}$. Além disso, neste sistema de coordenadas, o foco é $\overline{F} = (p, 0)$; o vértice é $\overline{V} = (0, 0)$; a diretriz é $\overline{\mathcal{L}} : \overline{x} = -p$ e a reta focal é $\overline{\ell} : \overline{y} = 0$.

Como $x = \overline{x} + x_0$ e $y = \overline{y} + y_0$, temos que a equação da parábola no sistema OXY é:

$$\boxed{(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0).}$$

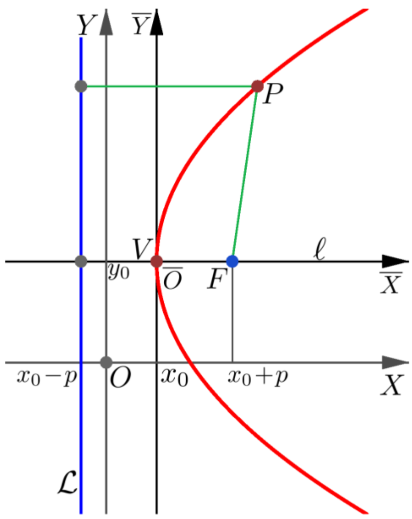

Figura 9: Parábola $(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$.

Além disso, no sistema de eixos OXY, a parábola tem foco $F = (x_0 + p, y_0)$; vértice $V = (x_0, y_0)$; diretriz $\mathcal{L} : x - x_0 = -p$, ou seja, $\mathcal{L} : x = x_0 - p$ e reta focal $\ell : y - y_0 = 0$, ou seja, $\ell : y = y_0$.

Caso II. O foco F está **à esquerda** da diretriz $\mathcal{L}$.

Neste caso, a equação da parábola no sistema $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ é $\overline{y}^2 = -4p\overline{x}$, e seus elementos são: foco $\overline{F} = (-p, 0)$; vértice $\overline{V} = (0, 0)$; diretriz $\overline{\mathcal{L}} : \overline{x} = p$ e reta focal $\overline{\ell} : \overline{y} = 0$.

Passando para as coordenadas x, y do sistema OXY, a equação da parábola fica na forma

$$\boxed{(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0),}$$

e seus elementos são: foco $F = (x_0 - p, y_0)$; vértice $V = (x_0, y_0)$; diretriz $\mathcal{L} : x - x_0 = p$, ou seja, $\mathcal{L} : x = x_0 + p$, e reta focal $\ell : y - y_0 = 0$, ou seja, $\ell : y = y_0$.

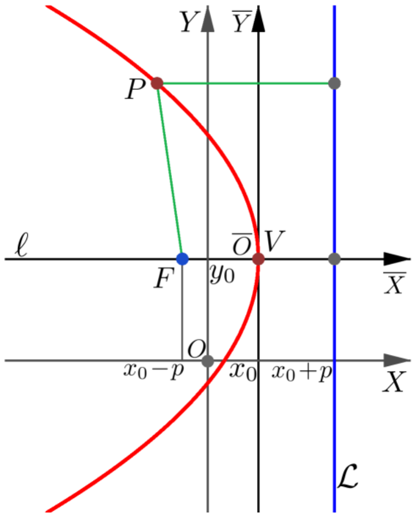

Figura 10: Parábola $(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$.

2.4 Parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OY$

Como nos casos anteriores, considerando um sistema de eixos ortogonais $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$, com origem $\overline{O} = V = (x_0, y_0)$ e eixos $\overline{O}\,\overline{X}$ e $\overline{O}\,\overline{Y}$ paralelos e de igual sentido aos eixos OX e OY, respectivamente, obtemos as equações e os elementos das parábolas, com vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OY$.

Caso I. O foco F está **acima** da diretriz $\mathcal{L}$.

Neste caso, o foco é $F = (x_0, y_0 + p)$; a diretriz é $\mathcal{L} : y = y_0 - p$; a reta focal é $\ell : x = x_0$ e a equação da parábola é:

$$\boxed{(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)}$$

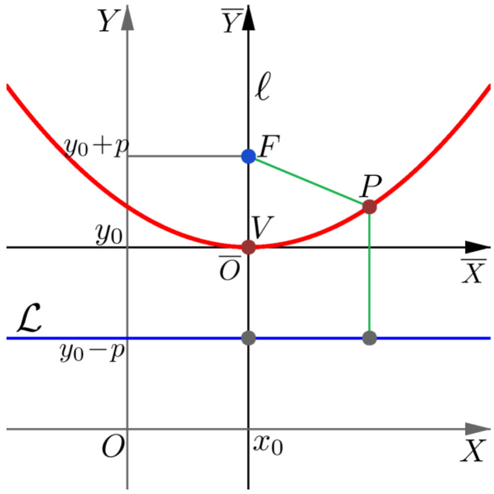

Figura 11: Parábola $\mathcal{P} : (x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$.

Caso II. O foco F está **abaixo** da diretriz $\mathcal{L}$.

Neste caso, o foco é $F = (x_0, y_0 - p)$; a diretriz é $\mathcal{L} : y = y_0 + p$; a reta focal é $\ell : x = x_0$ e a equação da parábola é:

$$\boxed{(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)}$$

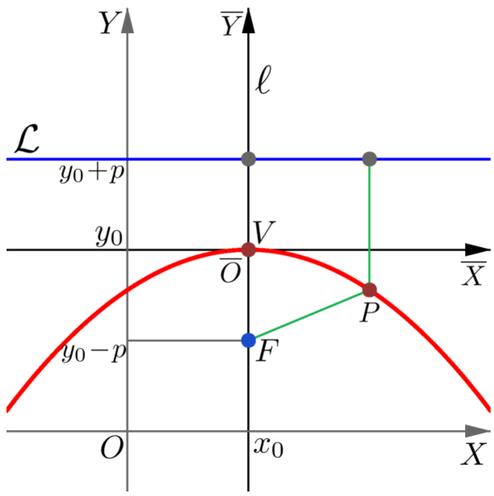

Figura 12: Parábola $\mathcal{P} : (x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$.

Exemplo 4

Determine a equação da parábola $\mathcal{P}$ de vértice $V = (3,4)$ e foco $F = (3,2)$. Determine também a equação de sua diretriz.

Solução.
Como $V = (3,4)$ e $F = (3,2)$, $\ell : x = 3$ é a reta focal e F está abaixo de V, ou seja, abaixo da diretriz $\mathcal{L}$. Logo, a equação da parábola é da forma:

$$\mathcal{P} : (x-3)^2 = -4p(y-4).$$

Temos que $p = d(V,F) = d((3,4),(3,2)) = 2$. Então, $\mathcal{L} : y = 6$ é a diretriz e

$$\mathcal{P} : (x-3)^2 = -8(y-4)$$

é a equação da parábola. $\square$

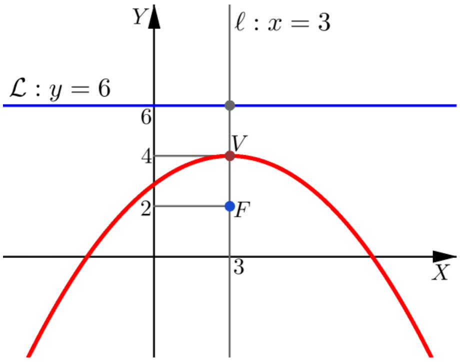

Figura 13: Parábola $\mathcal{P} : (x-3)^2 = -8(y-4)$.

Exemplo 5

Determine a equação da parábola $\mathcal{P}$ cuja reta focal é paralela ao eixo$-OX$ e passa pelos pontos $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$, $(0,5)$ e $(-6,-7)$.

Solução.
Como a reta focal da parábola $\mathcal{P}$ é paralela ao eixo$-OX$, sua equação deve ser da forma $\mathcal{P} : (y-y_0)^2 = \pm 4p(x-x_0)$, que se escreve também na forma:

$$\mathcal{P} : y^2 + Dx + Ey + F = 0\,.$$

Substituindo as coordenadas dos pontos dados nessa equação, temos:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}D - E + F &= -1 \\ 5E + F &= -25 \\ -6D - 7E + F &= -49\,. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $D = 8$, $E = -2$ e $F = -15$.
Portanto, a equação da parábola é

$$y^2 + 8x - 2y - 15 = 0\,,$$

isto é,

$$y^2 - 2y + 1 = 15 - 8x + 1\,,$$

ou, ainda,

$$\mathcal{P} : (y-1)^2 = -8(x-2).$$

Assim, a parábola $\mathcal{P}$ tem vértice $V = (2,1)$ e reta focal $\ell : y = 1$, paralela ao eixo$-OX$. Como $4p = 8$, isto é, $p = 2$, e o foco F está à esquerda da diretriz, temos que $F = (0,1)$ e a diretriz $\mathcal{L} : x = 4$. $\square$

3. Equação geral do segundo grau com $B = 0$ e $AC = 0$

Consideremos a equação canônica da parábola de vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OX$:

$$(y - y_0)^2 = \pm 4p(x - x_0)\,.$$

Desenvolvendo e agrupando os termos dessa equação, obtemos:

$$y^2 \mp 4px - 2y_0 y + y_0^2 \pm 4px_0 = 0\,.$$

Esta equação é da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

onde $A = 0$, $B = 0$, $C = 1$, $D = \mp 4p$, $E = -2y_0$ e $F = y_0^2 \pm 4px_0$.

Analogamente, desenvolvendo a equação da parábola de vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OY$

$$(x - x_0)^2 = \pm 4p(y - y_0)\,,$$

obtemos a equação

$$x^2 - 2x_0 x \mp 4py + x_0^2 \pm 4py_0 = 0\,,$$

que é da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

onde $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, $D = -2x_0$, $E = \mp 4p$ e $F = x_0^2 \pm 4py_0$.

No primeiro caso, $A = 0$, $B = 0$ e $C \neq 0$ e, no segundo caso, $A \neq 0$, $B = 0$ e $C = 0$. Portanto, em qualquer caso, $B = 0$ e $AC = 0$.

Reciprocamente, temos a seguinte proposição:

Proposição 1

Seja a equação do segundo grau com $B = 0$:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Se $A = 0$ e $C \neq 0$, esta equação representa:

- *uma parábola cuja reta focal é paralela ao eixo$-OX$, se $D \neq 0$;*

ou

- *duas retas distintas paralelas ao eixo$-OX$, se $D = 0$ e $E^2 - 4CF > 0$;*

ou

- *uma reta paralela ao eixo$-OX$, se $D = 0$ e $E^2 - 4CF = 0$;*

ou

- *o conjunto vazio, se $D = 0$ e $E^2 - 4CF < 0$.*

O mesmo vale para o caso em que $C = 0$ e $A \neq 0$, trocando "paralelo ao eixo$-OX$" por "paralelo ao eixo$-OY$".

Prova.

Suponhamos $A = 0$, $C \neq 0$ e $D \neq 0$. Então, a equação do segundo grau se escreve na forma:

$$y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{D}{C}x + \frac{F}{C} = 0.$$

Completando o quadrado, obtemos:

$$\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 + \frac{D}{C}x + \frac{F}{C} - \frac{E^2}{4C^2} = 0\,.$$

Como $D \neq 0$, podemos escrever a equação na forma

$$\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -\frac{D}{C}\left(x + \frac{C}{D}\left(\frac{F}{C} - \frac{E^2}{4C^2}\right)\right)\,,$$

que é a equação de uma parábola com reta focal paralela ao eixo$-OX$ e vértice

$$V = \left(-\frac{4C^2F - CE^2}{4C^2D}, -\frac{E}{2C}\right).$$

Se $D = 0$, a equação $Cy^2 + Ey + F = 0$ representa:

- duas retas paralelas ao eixo$-OX$,

$$y = \frac{-E + \sqrt{E^2 - 4CF}}{2C} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{-E - \sqrt{E^2 - 4CF}}{2C}\,,$$

se $E^2 - 4CF > 0$;

- uma reta paralela ao eixo$-OX$, $y = -\dfrac{E}{2C}$, se $E^2 - 4CF = 0$;
- o conjunto vazio, se $E^2 - 4CF < 0$. ■

Os casos em que a equação do segundo grau $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F = 0$, com $AC = 0$, representa duas retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio são chamados **casos degenerados da parábola**.

Exemplo 6

Verifique se as equações abaixo representam uma parábola ou uma parábola degenerada. Caso seja uma parábola, determine seus principais elementos.

(a) $x^2 - 8y = 0$.

Solução.

Como $x^2 = 8y$, a equação representa uma parábola com:

- *vértice: $V = (0, 0)$;*
- *reta focal = eixo$-OY$: $x = 0$;*
- *parâmetro: $2p = 4$ ($\Longrightarrow p = 2$);*
- *foco: $F = (0, 2)$, acima da diretriz;*
- *diretriz: $\mathcal{L} : y = -2$.* □

(b) $2y^2 + 5x + 8y - 7 = 0$.

Solução.

Completando o quadrado, obtemos

$$\begin{aligned} & 2(y^2 + 4y) = -5x + 7 \\ \Longleftrightarrow\ & 2(y^2 + 4y + 4) = -5x + 7 + 8 \\ \Longleftrightarrow\ & 2(y + 2)^2 = -5x + 15 \\ \Longleftrightarrow\ & 2(y + 2)^2 = -5(x - 3) \\ \Longleftrightarrow\ & (y + 2)^2 = -\frac{5}{2}(x - 3)\,, \end{aligned}$$

que representa uma parábola com:

- *vértice: $V = (3, -2)$;*

• *reta focal:* $\ell : y = -2$, *paralela ao eixo*$-OX$;

• *parâmetro:* $2p = \dfrac{5}{4}$ $(\Longrightarrow p = \dfrac{5}{8})$;

• *foco:* $F = \left(3 - \dfrac{5}{8}, -2\right) = \left(\dfrac{19}{8}, -2\right)$, *à esquerda da diretriz;*

• *diretriz:* $\mathcal{L} : x = 3 + \dfrac{5}{8} = \dfrac{29}{8}$. □

(c) $3y^2 + 7y - 6 = 0$.

Solução.
Como $A = B = D = 0$ *e seu discriminante é* $49 + 4 \times 3 \times 6 = 121 > 0$, *a equação (c) representa o par de retas* $y = \dfrac{-7 \pm 11}{6}$, *ou seja,* $y = -3$ *e* $y = \dfrac{2}{3}$, *paralelas ao eixo*$-OX$. □

(d) $9x^2 + 42x + 49 = 0$

Solução.
Como $B = C = E = 0$ *e seu discriminante é* $42^2 - 4 \times 9 \times 49 = 1764 - 1764 = 0$, *a equação (d) representa a reta* $x = -\dfrac{42}{18} = -\dfrac{21}{9} = -\dfrac{7}{3}$, *paralela ao eixo*$-OY$.
□

(e) $3y^2 - 2y + 1 = 0$

Solução.
Como $A = B = D = 0$ *e seu discriminante é* $4 - 12 = -8 < 0$, *a equação (e) representa o conjunto vazio.* □

O exemplo 7 mostra como determinar a equação de uma parábola usando sua definição e conhecendo alguns de seus elementos.

Exemplo 7

Sejam $V = (-2, -1)$ *o vértice de uma parábola* $\mathcal{P}$ *e* $\mathcal{L} : x + 2y = 1$ *a equação de sua diretriz. Encontre a equação da parábola e seu foco.*

Solução.
A reta focal ℓ é a reta perpendicular à diretriz que passa pelo vértice.

Como $(1, 2) \perp \mathcal{L}$, temos $(2, -1) \perp \ell$ e, portanto, $\ell : 2x - y = -4 + 1 = -3$.
Seja $A = (x, y)$ o ponto de interseção das retas ℓ e $\mathcal{L}$. Então, as coordenadas x e y satisfazem ao sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y = -3 \\ -2x - 4y = -2\,. \end{cases}$$

Logo, $-5y = -5$, isto é, $y = 1$ e $x = 1 - 2y = -1$.
Como V é o ponto médio do segmento AF, temos que $F = 2V - A$, ou seja,

$$F = 2(-2, -1) - (-1, 1) = (-3, -3)\,.$$

Então, $P = (x, y) \in \mathcal{P}$ se, e somente se, $d(P, F) = d(P, \mathcal{L})$, isto é, se, e só se,

$$\begin{aligned}
& \left(\sqrt{(x+3)^2 + (y+3)^2}\right)^2 = \left(\frac{|x + 2y - 1|}{\sqrt{5}}\right)^2 \\
\iff\ & (x+3)^2 + (y+3)^2 = \frac{(x + 2y - 1)^2}{5} \\
\iff\ & x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 = \frac{x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y + 1}{5} \\
\iff\ & 5x^2 + 30x + 5y^2 + 30y + 90 = x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y + 1 \\
\iff\ & \boxed{\mathcal{P} : 4x^2 - 4xy + y^2 + 32x + 34y + 89 = 0\,,}
\end{aligned}$$

que é a equação da parábola. □

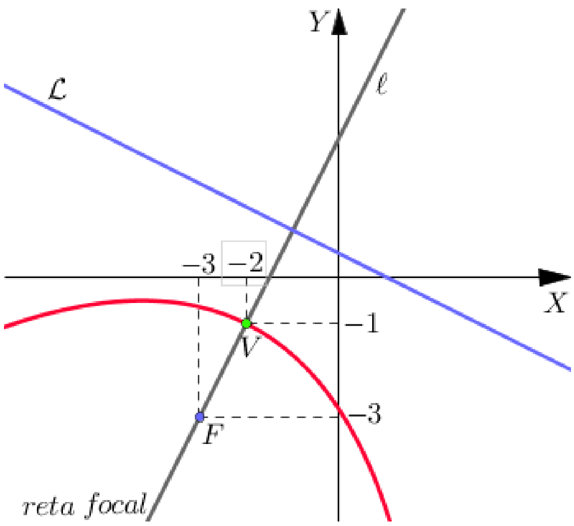

Figura 14: Parábola $\mathcal{P} : 4x^2 - 4xy + y^2 + 32x + 34y + 89 = 0$.

Capítulo 17

Rotação das cônicas

1. Rotação dos eixos coordenados

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais no plano e seja $O\overline{X}\,\overline{Y}$ o sistema de eixos obtido girando os eixos OX e OY de um ângulo θ, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, no sentido positivo.

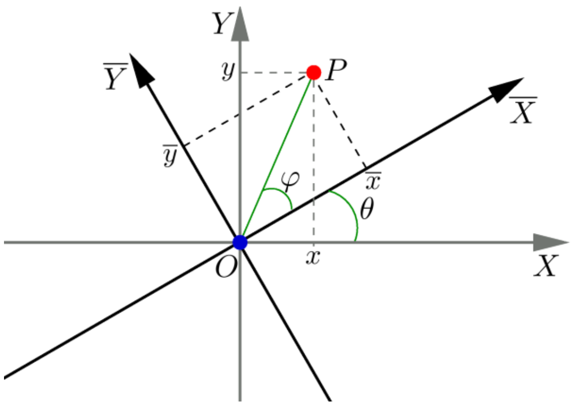

Figura 1: Sistema $O\overline{X}\overline{Y}$ obtido girando de θ o sistema OXY.

Sejam (x, y) e $(\overline{x}, \overline{y})$ as coordenadas de um ponto P nos sistemas OXY e $O\overline{X}\,\overline{Y}$, respectivamente, φ o ângulo que o vetor $\overrightarrow{OP}$ faz com o semieixo positivo $O\overline{X}$ e $r = d(P, O)$. Então,

$$\begin{cases} \overline{x} = r\,\cos\varphi \\ \overline{y} = r\,\operatorname{sen}\varphi\,, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x = r\cos(\varphi+\theta) \\ y = r\operatorname{sen}(\varphi+\theta)\,. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} x = r\,\cos\theta\,\cos\varphi - r\,\operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\varphi \\ y = r\,\operatorname{sen}\theta\,\cos\varphi + r\,\cos\theta\,\operatorname{sen}\varphi\,, \end{cases} \qquad \text{ou seja,} \qquad \boxed{\begin{cases} x = \cos\theta\,\overline{x} - \operatorname{sen}\theta\,\overline{y} \\ y = \operatorname{sen}\theta\,\overline{x} + \cos\theta\,\overline{y} \end{cases}}$$

A **mudança de coordenadas pela rotação de um ângulo θ dos eixos OX e OY** pode ser escrita também na forma matricial

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}}$$

ou na forma vetorial

$$\boxed{(x,y) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\overline{x} + (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\overline{y}}$$

A mudança de coordenadas **inversa** (obtida pela rotação de $-\theta$ dos eixos $O\overline{X}$ e $O\overline{Y}$) se expressa, em termos de matrizes, da seguinte maneira:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

pois $\cos(-\theta) = \cos\theta$ e $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$. Então,

$$\boxed{\begin{cases} \overline{x} = \cos\theta\,x + \operatorname{sen}\theta\,y \\ \overline{y} = -\operatorname{sen}\theta\,x + \cos\theta\,y \end{cases}}$$

ou seja,

$$\boxed{(\overline{x},\overline{y}) = (\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta)\,x + (\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\,y}$$

Exemplo 1

Por uma rotação de 45^o dos eixos coordenados OX e OY, uma certa equação é transformada na equação $4\overline{x}^2 - 9\overline{y}^2 = 36$. Encontre a equação, o centro, os vértices, os vértices imaginários, os focos e as assíntotas da hipérbole nas coordenadas x e y.

Solução.

Como

$$\begin{cases} \overline{x} = \cos\theta\, x + \operatorname{sen}\theta\, y & = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ \overline{y} = -\operatorname{sen}\theta\, x + \cos\theta\, y & = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)\,, \end{cases}$$

a equação acima, nas coordenadas x, y, se escreve na forma:

$$4 \times \frac{2}{4}(x+y)^2 - 9 \times \frac{2}{4}(-x+y)^2 = 36\,,$$

ou seja,

$$4(x^2+2xy+y^2) - 9(x^2-2xy+y^2) = 72\,,$$

isto é,

$$\boxed{-5x^2 + 26xy - 5y^2 - 72 = 0}$$

Como, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, a equação pode ser escrita na forma $\dfrac{\overline{x}^2}{9} - \dfrac{\overline{y}^2}{4} = 1$, ela representa uma hipérbole com $a = 3$; $b = 2$; $c = \sqrt{13}$; centro $C = (0,0)$; reta focal $\ell : \overline{y} = 0$; vértices $A_1 = (-3,0)$ e $A_2 = (3,0)$; focos $F_1 = (-\sqrt{13}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{13}, 0)$; reta não focal $\ell' : \overline{x} = 0$; vértices imaginários $B_1 = (0,-2)$ e $B_2 = (0,2)$, e assíntotas $\overline{y} = \pm\dfrac{2}{3}\overline{x}$, ou seja, $2\overline{x} \pm 3\overline{y} = 0$.

Usando a mudança de coordenadas

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\overline{x} - \overline{y}) \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\overline{x} + \overline{y})\,, \end{cases}$$

vemos que, nas coordenadas x e y, o centro é $C = (0,0)$, os vértices são $A_1 = \left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ e $A_2 = \left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, os vértices imaginários são $B_1 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}, -\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)$, $B_2 = \left(-\dfrac{2}{\sqrt{2}}, \dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)$ e os focos são $F_1 = \left(-\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}, -\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}\right)$ e $F_2 = \left(\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}, \dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}\right)$.

Usando agora a mudança de coordenadas inversa

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ \overline{y} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)\,, \end{cases}$$

obtemos que, nas coordenadas x e y, a reta focal é $\ell : -x+y=0$, a reta não focal é $\ell' : x+y=0$ e as assíntotas são:

$$2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,(x+y) \pm 3\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,(-x+y) = 0 \Longleftrightarrow 2\,(x+y) \pm 3\,(-x+y) = 0\,,$$

ou seja, $\quad r_1 : y = \dfrac{1}{5}\,x \quad$ e $\quad r_2 : y = 5\,x\,.$

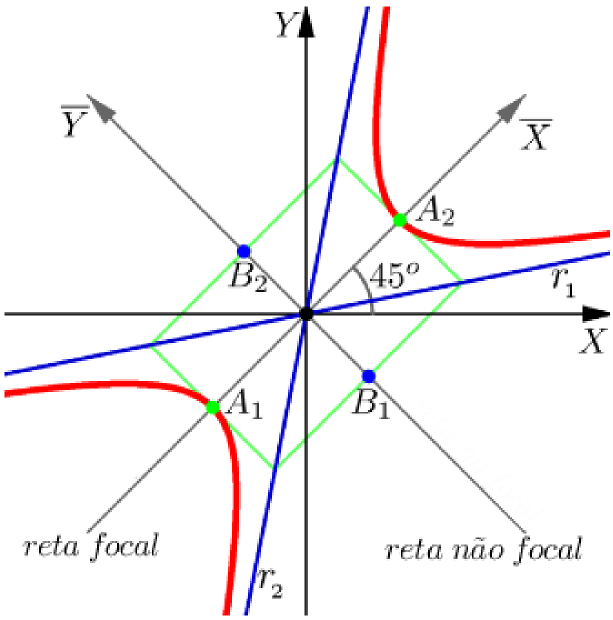

Figura 2: Hipérbole $-5x^2 + 26xy - 5y^2 - 72 = 0$.

□

2. Redução de uma equação do segundo grau à sua forma canônica

Consideremos a equação do segundo grau:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,. \tag{1}$$

Após uma rotação positiva de um ângulo θ, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, dos eixos OX e OY, obtemos um novo sistema de eixos ortogonais $O\overline{X}$ e $O\overline{Y}$. As coordenadas (x, y) e $(\overline{x}, \overline{y})$ de um ponto P do plano nos sistemas de eixos OXY e $O\overline{X}\,\overline{Y}$, respectivamente, estão relacionadas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} x &= \cos\theta\,\overline{x} - \operatorname{sen}\theta\,\overline{y} \\ y &= \operatorname{sen}\theta\,\overline{x} + \cos\theta\,\overline{y}\,. \end{aligned}$$

Substituindo x por $\cos\theta\,\overline{x} - \operatorname{sen}\theta\,\overline{y}$ e y por $\operatorname{sen}\theta\,\overline{x} + \cos\theta\,\overline{y}$ na equação (1), obtemos a equação nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$:

$$\boxed{A_\theta \overline{x}^2 + B_\theta \overline{x}\,\overline{y} + C_\theta \overline{y}^2 + D_\theta \overline{x} + E_\theta \overline{y} + F_\theta = 0} \tag{2}$$

onde

$$\begin{aligned} A_\theta &= A\cos^2\theta + B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\operatorname{sen}^2\theta \\ B_\theta &= 2(C-A)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \\ C_\theta &= A\operatorname{sen}^2\theta - B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\cos^2\theta \\ D_\theta &= D\cos\theta + E\operatorname{sen}\theta \\ E_\theta &= -D\operatorname{sen}\theta + E\cos\theta \\ F_\theta &= F\,. \end{aligned}$$

Por uma verificação direta, temos que:

$$\begin{pmatrix} A_\theta & B_\theta/2 \\ B_\theta/2 & C_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{3}$$

e

$$\boxed{\begin{pmatrix} D_\theta \\ E_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}}$$

Determinemos o ângulo $\theta = \theta_0$, $0 < \theta_0 < \dfrac{\pi}{2}$, para o qual o coeficiente B_{θ_0} da equação nas variáveis $\overline{x}$ e $\overline{y}$ é igual a zero.

Sendo

$$B_{\theta_0} = (C-A)\operatorname{sen}2\theta_0 + B\cos 2\theta_0 = 0,$$

temos que

1. $\theta_0 = 45^o$, se $A = C$.

2. $\text{tg}\, 2\theta_0 = \dfrac{B}{A-C}$, se $A \neq C$.

Pela relação $1 + \text{tg}^2\, 2\theta_0 = \sec^2 2\theta_0$ e por $\text{tg}\, 2\theta_0$ e $\cos 2\theta_0$ terem o mesmo sinal, pois $0 < 2\theta_0 < 180^o$, segue que

$$\cos 2\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\, 2\theta_0}}\,, \quad \text{se} \quad \frac{B}{A-C} > 0\,,$$

e

$$\cos 2\theta_0 = \frac{-1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\, 2\theta_0}}\,, \quad \text{se} \quad \frac{B}{A-C} < 0\,.$$

Além disso, como $\cos 2\theta_0 = \cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta$ e $\cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta = 1$, temos que

$$\bullet\, \cos 2\theta_0 = \cos^2\theta_0 - (1 - \cos^2\theta_0) = 2\cos^2\theta_0 - 1$$

$$\bullet\, \cos 2\theta_0 = (1 - \text{sen}^2\,\theta_0) - \text{sen}^2\,\theta_0 = 1 - 2\,\text{sen}^2\,\theta_0,$$

ou seja,

$$\boxed{\cos\theta_0 = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta_0}{2}} \qquad \text{e} \qquad \text{sen}\,\theta_0 = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta_0}{2}}}$$

Fazendo $\theta = \theta_0$, $\overline{A} = A_{\theta_0}$, $\overline{C} = C_{\theta_0}$, $\overline{D} = D_{\theta_0}$, $\overline{E} = E_{\theta_0}$ e $\overline{F} = F_{\theta_0} = F$, a equação do segundo grau (2) fica na forma

$$\boxed{\overline{A}\overline{x}^2 + \overline{C}\overline{y}^2 + \overline{D}\overline{x} + \overline{E}\overline{y} + \overline{F} = 0,}$$

onde:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \overline{A} & 0 \\ 0 & \overline{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & \text{sen}\,\theta_0 \\ -\text{sen}\,\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & -\text{sen}\,\theta_0 \\ \text{sen}\,\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix}}$$

e

$$\boxed{\begin{pmatrix} \overline{D} \\ \overline{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & \text{sen}\,\theta_0 \\ -\text{sen}\,\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}}$$

Definição 1

O **indicador** da equação do segundo grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

é o número

$$\boxed{I = B^2 - 4AC = -4 \det \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}}$$

Como o determinante de um produto de matrizes é igual ao produto dos determinantes das matrizes fatores, temos, por (3), que

$$I_\theta = B_\theta^2 - 4A_\theta C_\theta = -4 \det \begin{pmatrix} A_\theta & B_\theta/2 \\ B_\theta/2 & C_\theta \end{pmatrix} = -4 \det \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} = I\,,$$

pois $\det \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = 1$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Em particular, fazendo $\theta = \theta_0$, temos que $I = B^2 - 4AC = -4\overline{A}\,\overline{C}$. Dizemos, então, que a equação do segundo grau (1) é do tipo:

- **elíptico**, se $I = B^2 - 4AC = -4\overline{A}\,\overline{C} < 0$;
- **parabólico**, se $I = B^2 - 4AC = -4\overline{A}\,\overline{C} = 0$;
- **hiperbólico**, se $I = B^2 - 4AC = -4\overline{A}\,\overline{C} > 0$.

3. Exemplos

Exemplo 2

(a) *Reduza, por uma rotação dos eixos coordenados, a equação*

$$x^2 + 2xy + y^2 - x + y + 1 = 0 \tag{4}$$

à sua forma canônica.

(b) *Determine o foco, o vértice e a diretriz da cônica nas coordenadas x, y.*

(c) *Faça um esboço da curva.*

Solução.

(a) Os coeficientes da equação são $A = 1$, $B = 2$, $C = 1$, $D = -1$, $E = 1$, $F = 1$, e seu indicador é $I = B^2 - 4AC = 2^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$. Então, a equação é do tipo parabólico.

Sendo $A = C = 1$, o ângulo de rotação necessário para eliminar o termo misto (xy) é $\theta = 45^o$, e as relações de mudança de coordenadas, por esta rotação, são:

$$\begin{cases} x = \cos(45^o)\,\overline{x} - \operatorname{sen}(45^o)\,\overline{y} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} - \overline{y}) \\ \\ y = \operatorname{sen}(45^o)\,\overline{x} + \cos(45^o)\,\overline{y} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} + \overline{y}) \end{cases} \tag{5}$$

e

$$\begin{cases} \overline{x} = \cos(45^o)\,x + \operatorname{sen}(45^o)\,y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \\ \\ \overline{y} = -\operatorname{sen}(45^o)\,x + \cos(45^o)\,y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x + y) \end{cases} \tag{6}$$

Nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, a equação (4) se escreve na forma:

$$\overline{A}\,\overline{x}^2 + \overline{C}\,\overline{y}^2 + \overline{D}\,\overline{x} + \overline{E}\,\overline{y} + \overline{F} = 0\,,$$

onde $\overline{F} = F = 1$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \overline{A} & 0 \\ 0 & \overline{C} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2/2 \\ 2/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ou seja,} \quad \overline{A} = 2\,,\ \overline{C} = 0\,, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\overline{D}\\ \overline{E}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \sqrt{2}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

ou seja, $\overline{D} = 0$, $\overline{E} = \sqrt{2}$.

Portanto, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, a equação da cônica se escreve na forma:

$$2\overline{x}^2 + \sqrt{2}\,\overline{y} + 1 = 0\,,$$

isto é,

$$\overline{x}^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overline{y} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

que é a forma canônica de uma parábola.

(b) A parábola, nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, possui os seguintes elementos:

- vértice: $V = \left(0, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
- reta focal: $\ell : \overline{x} = 0$;
- parâmetro: $2p = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \Longrightarrow p = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$;
- foco: $F = \left(0, -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{8}\right) = \left(0, -\dfrac{5\sqrt{2}}{8}\right)$;
- diretriz: $\overline{y} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{8} = -\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$.

Determinação dos elementos da parábola nas coordenadas x e y.

Por (5), $V = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ é o vértice, $F = \left(\dfrac{5}{8}, -\dfrac{5}{8}\right)$ é o foco e, por (6), $\ell : x + y = 0$ é a reta focal e $\mathcal{L} : x - y = \dfrac{3}{4}$ é a diretriz da parábola nas coordenadas x e y.

(c) Na figura 3 mostramos o esboço da parábola.

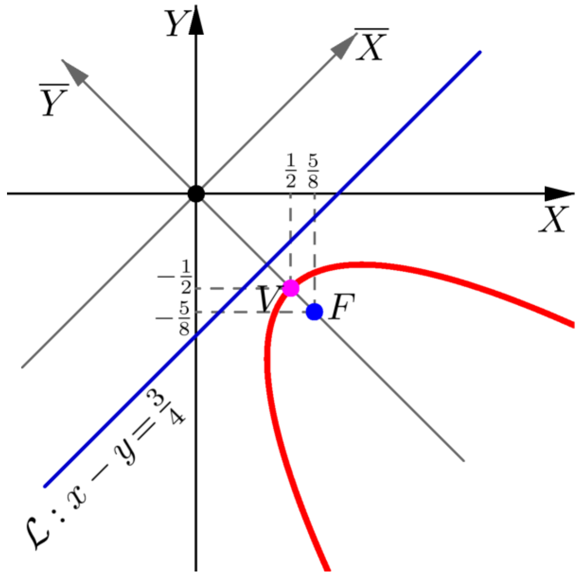

Figura 3: Parábola $x^2 + 2xy + y^2 - x + y + 1 = 0$.

□

Exemplo 3

(a) *Reduza, por uma rotação dos eixos coordenados, a equação*

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 + 20x + 20y + 44 = 0$$

à sua forma canônica.

(b) *Determine os focos, os vértices, o centro, a reta focal e a reta não focal da cônica nas coordenadas x, y.*

(c) *Faça um esboço da curva.*

Solução.

(a) Os coeficientes da equação são $A = 5$, $B = 4$, $C = 2$, $D = 20$, $E = 20$, $F = 44$, e seu indicador é $I = B^2 - 4AC = 16 - 40 = -24 < 0$. Portanto, a equação é do tipo elíptico.

Como $A \neq C$, temos que $\text{tg}\, 2\theta = \dfrac{B}{A - C} = \dfrac{4}{3} > 0$. Logo,

$$\cos 2\theta = \sqrt{\frac{1}{1 + \text{tg}^2\, 2\theta}} = \sqrt{\frac{1}{1 + 16/9}} = \frac{3}{5} > 0\,,$$

da qual obtemos:

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+3/5}{2}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\,,$$
$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-3/5}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\,.$$

As relações de mudança de coordenadas são:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(2\overline{x} - \overline{y}) \\ y = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(\overline{x} + 2\overline{y}) \end{cases}, \tag{7}$$

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(2x + y) \\ \overline{y} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(-x + 2y) \end{cases}, \tag{8}$$

e a equação nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$ fica na forma:

$$\overline{A}\,\overline{x}^2 + \overline{C}\,\overline{y}^2 + \overline{D}\,\overline{x} + \overline{E}\,\overline{y} + \overline{F} = 0,$$

onde $\overline{F} = F = 44$;

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \overline{A} & 0 \\ 0 & \overline{C} \end{pmatrix} &= \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{D} \\ \overline{E} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12\sqrt{5} \\ 4\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Logo, $\overline{A} = 6, \overline{C} = 1, \overline{D} = 12\sqrt{5}, \overline{E} = 4\sqrt{5}, \overline{F} = 4$, e a equação dada, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, transforma-se na equação:

$$6\overline{x}^2 + \overline{y}^2 + 12\sqrt{5}\,\overline{x} + 4\sqrt{5}\,\overline{y} + 44 = 0\,.$$

Completando os quadrados, temos:

$$\begin{aligned}
&6(\overline{x}^2 + 2\sqrt{5}\overline{x}) + (\overline{y}^2 + 4\sqrt{5}\,\overline{y}) = -44\\
&6(\overline{x}^2 + 2\sqrt{5}\overline{x} + 5) + (\overline{y}^2 + 4\sqrt{5}\,\overline{y} + 20) = -44 + 30 + 20\\
&6(\overline{x} + \sqrt{5})^2 + (\overline{y} + 2\sqrt{5})^2 = 6\\
&\mathcal{E} : (\overline{x} + \sqrt{5})^2 + \frac{(\overline{y} + 2\sqrt{5})^2}{6} = 1\,,
\end{aligned}$$

que é a forma canônica de uma elipse.

(b) A equação representa uma elipse $\mathcal{E}$ com $a = \sqrt{6}$, $b = 1$ e $c = \sqrt{5}$ que, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ tem:

- centro: $C = (-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$;
- reta focal: $\ell : \overline{x} = -\sqrt{5}$, paralela ao eixo$-O\overline{Y}$;
- reta não focal: $\ell' : \overline{y} = -2\sqrt{5}$, paralela ao eixo$-O\overline{X}$;
- vértices sobre o eixo focal: $A_1 = (-\sqrt{5}, -2\sqrt{5}-\sqrt{6})$ e $A_2 = (-\sqrt{5}, -2\sqrt{5}+\sqrt{6})$;
- vértices sobre o eixo não focal: $B_1 = (-\sqrt{5}-1, -2\sqrt{5})$ e $B_2 = (-\sqrt{5}+1, -2\sqrt{5})$;
- focos: $F_1 = (-\sqrt{5}, -2\sqrt{5}-\sqrt{5}) = (-\sqrt{5}, -3\sqrt{5})$ e $F_2 = (-\sqrt{5}, -2\sqrt{5}+\sqrt{5}) = (-\sqrt{5}, -\sqrt{5})$;
- excentricidade: $e = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$.

Determinação dos elementos da elipse nas coordenadas x e y.

Temos, por (8), que

- $\ell : 2x + y = -5$ é a reta focal;
- $\ell' : x - 2y = 10$ é a reta não focal;

e, por (7),

- $C = (0, -5)$ é o centro;
- $F_1 = (1, -7)$ e $F_2 = (-1, -3)$ são os focos;
- $A_1 = \left(\dfrac{\sqrt{30}}{5}, -5 - \dfrac{2\sqrt{30}}{5}\right)$ e $A_2 = \left(-\dfrac{\sqrt{30}}{5}, -5 + \dfrac{2\sqrt{30}}{5}\right)$ são os vértices sobre a reta focal;
- $B_1 = \left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, -5 - \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$ e $B_2 = \left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, -5 + \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$ são os vértices sobre a reta não focal da elipse nas coordenadas x e y.

(c) Na figura 4, mostramos o esboço da elipse.

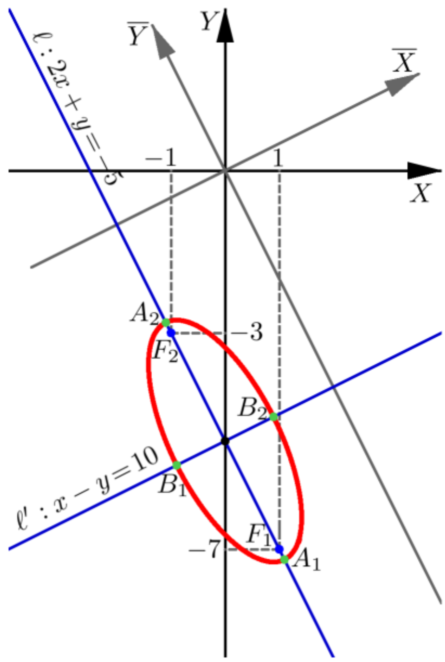

Figura 4: Elipse $x^2 + 2xy + y^2 - x + y + 1 = 0$.

□

Exemplo 4

(a) *Reduza, por uma rotação dos eixos coordenados, a equação abaixo à sua forma canônica:*

$$11x^2 + 10\sqrt{3}xy + y^2 - (22 + 10\sqrt{3})x - (2 + 10\sqrt{3})y - (4 - 10\sqrt{3}) = 0.$$

(b) *Determine os focos, os vértices, o centro, a reta focal e as assíntotas, se existirem, da cônica nas coordenadas x, y.*

(c) *Faça um esboço da curva.*

Solução.

(a) Os coeficientes da equação são:

$$A = 11,\ B = 10\sqrt{3},\ C = 1,$$
$$D = -(22 + 10\sqrt{3}),\ E = -(2 + 10\sqrt{3}),\ F = -(4 - 10\sqrt{3}),$$

e seu indicador é $I = B^2 - 4AC = 300 - 44 = 256 > 0$. Então, a equação é do tipo hiperbólico.

Como $A \neq C$, $\operatorname{tg} 2\theta_0 = \dfrac{B}{A - C} = \sqrt{3} > 0$ e $\cos 2\theta_0 = \sqrt{\dfrac{1}{1+3}} = \dfrac{1}{2} > 0$. Logo,

$$\cos\theta_0 = \sqrt{\frac{1+1/2}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$
$$\operatorname{sen}\theta_0 = \sqrt{\frac{1-1/2}{2}} = \frac{1}{2}\,,$$

isto é, $\theta_0 = 30^o$.
Assim, as relações de mudança de coordenadas são:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,\overline{x} - \overline{y}) \\ y = \frac{1}{2}(\overline{x} + \sqrt{3}\,\overline{y}) \end{cases}, \tag{9}$$

$$\begin{cases} \overline{x} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x + y) \\ \overline{y} = \frac{1}{2}(-x + \sqrt{3}y) \end{cases}, \tag{10}$$

e a equação, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, é dada por:

$$\overline{A}\,\overline{x}^2 + \overline{C}\,\overline{y}^2 + \overline{D}\,\overline{x} + \overline{E}\,\overline{y} + \overline{F} = 0,$$

onde $\overline{F} = F = -(4 - 10\sqrt{3})$;

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \overline{A} & 0 \\ 0 & \overline{C} \end{pmatrix} &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 16\sqrt{3} & 16 \\ 4 & -4\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

e

$$\begin{pmatrix} \overline{D} \\ \overline{E} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -(22+10\sqrt{3}) \\ -(2+10\sqrt{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16\sqrt{3} - 16 \\ -4 + 4\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, a equação dada transforma-se na equação:

$$16\overline{x}^2 - 4\overline{y}^2 - 16(\sqrt{3}+1)\overline{x} - 4(1-\sqrt{3})\overline{y} - (4 - 10\sqrt{3}) = 0\,.$$

Completando os quadrados nesta equação, obtemos:

$$16(\overline{x}^2 - (\sqrt{3}+1)\overline{x}) - 4(\overline{y}^2 + (1-\sqrt{3})\overline{y}) = 4 - 10\sqrt{3}$$

$$16\left(\overline{x}^2 - (\sqrt{3}+1)\overline{x} + \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{4}\right) - 4\left(\overline{y}^2 + (1-\sqrt{3})\overline{y} + \frac{(1-\sqrt{3})^2}{4}\right) =$$

$$4 - 10\sqrt{3} + 4(\sqrt{3}+1)^2 - (1-\sqrt{3})^2$$

$$16\left(\overline{x} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 - 4\left(\overline{y} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 16$$

$$\mathcal{H} : \left(\overline{x} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 - \frac{\left(\overline{y} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2}{4} = 1\,,$$

que é a forma canônica de uma hipérbole.

(b) A equação representa uma hipérbole com $a^2 = 1$, $b^2 = 4$, $c^2 = a^2+b^2 = 5$, que tem, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$:

- centro: $C = \left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$;
- reta focal: $\ell : \overline{y} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, paralela ao eixo$-O\overline{X}$;
- reta não focal: $\ell' : \overline{x} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$, paralela ao eixo$-O\overline{Y}$;
- focos: $F_1 = \left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} - \sqrt{5}, \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ e $F_2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} + \sqrt{5}, \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$;
- vértices: $A_1 = \left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ e $A_2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}+3}{2}, \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$;
- vértices imaginários: $B_1 = \left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}-5}{2}\right)$ e $B_2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}+3}{2}\right)$;
- excentricidade: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$;
- assíntotas: $2\left(\overline{x} - \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right) \pm \left(\overline{y} - \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = 0$.

Determinação dos elementos da hipérbole nas coordenadas x e y.

Temos, por (10), que:

- $\ell : x - \sqrt{3}y = 1 - \sqrt{3}$ é a reta focal;
- $\ell' : \sqrt{3}\,x + y = \sqrt{3} + 1$ é a reta não focal;

- $\begin{cases} r_1 : (2\sqrt{3}-1)(x-1)+(\sqrt{3}+2)(y-1)=0 \\ r_2 : (2\sqrt{3}+1)(x-1)+(2-\sqrt{3})(y-1)=0 \end{cases}$ são as assíntotas;

e, por (9),

- $C=(1,1)$ é o centro;
- $F_1=\left(1-\dfrac{\sqrt{15}}{2}, 1-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$ e $F_2=\left(1+\dfrac{\sqrt{15}}{2}, 1+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$ são os focos;
- $A_1=\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ e $A_2=\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ são os vértices;
- $B_1=(2, 1-\sqrt{3})$ e $B_2=(0, 1+\sqrt{3})$ são os vértices imaginários da hipérbole nas coordenadas x e y.

(c) Na figura 5 mostramos o esboço da hipérbole.

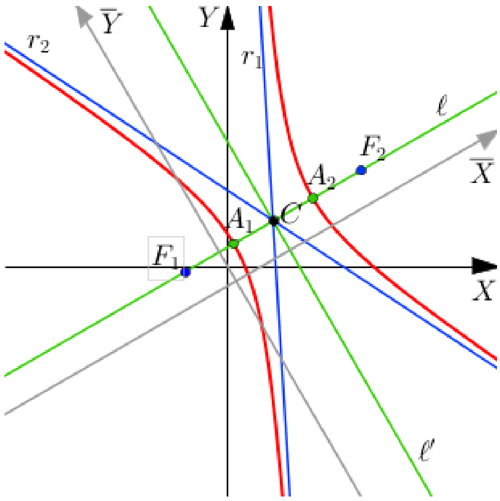

Figura 5: Hipérbole $11x^2+10\sqrt{3}xy+y^2-(22+10\sqrt{3})x-(2+10\sqrt{3})y-(4-10\sqrt{3})=0$.

□

Capítulo 18

Exemplos

1. Exemplos diversos

Exemplo 1

Determine os focos, os vértices, o centro, a reta focal e a reta não focal e faça um esboço da curva abaixo:

$$9x^2 - 18x + 25y^2 - 50y = 191.$$

Solução.

Completando os quadrados na equação, temos:

$$\begin{aligned}
& 9(x^2 - 2x) + 25(y^2 - 2y) = 191 \\
\iff\ & 9(x^2 - 2x + 1) + 25(y^2 - 2y + 1) = 191 + 9 + 25 \\
\iff\ & 9(x-1)^2 + 25(y-1)^2 = 225 \\
\iff\ & \mathcal{E} : \frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1\,.
\end{aligned}$$

Assim, a cônica é a elipse de centro $C = (1, 1)$; reta focal $\ell : y = 1$, paralela ao eixo$-OX$; reta não focal $\ell' : x = 1$, paralela ao eixo$-OY$; $a^2 = 25$, $b^2 = 9$, $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$; vértices sobre a reta focal $A_1 = (1-a, 1) = (-4, 1)$ e $A_2 = (1+a, 1) = (6, 1)$; focos $F_1 = (1-c, 1) = (-3, 1)$ e $F_2 = (1+c, 1) = (5, 1)$; vértices sobre a reta não focal $B_1 = (1, 1-b) = (1, -2)$ e $B_2 = (1, 1+b) = (1, 4)$

e excentricidade $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5}$. □

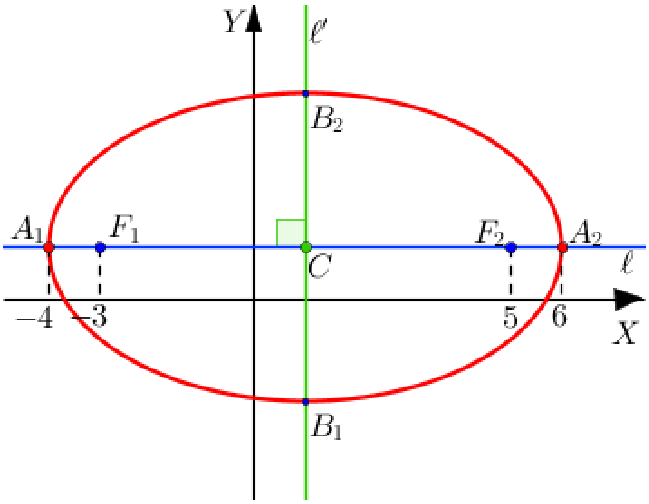

Figura 1: Elipse $\mathcal{E} : 9x^2 - 18x + 25y^2 - 50y = 191$.

Exemplo 2

Considere a elipse de centro $C = (1, 1)$, foco $(3, 2)$ e excentricidade $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. Determine os vértices e o outro foco da elipse. Faça também um esboço da curva.

Solução.

Seja $F_2 = (3, 2)$ o foco dado. Temos que $c = d(C, F_2) = \sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2}$ $= \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$. Como $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$, segue que $a = 3$ e $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 5 = 4$.

Seja F_1 o outro foco. Então, $C = \dfrac{F_1 + F_2}{2}$, isto é,

$$F_1 = 2C - F_2 = 2(1, 1) - (3, 2) = (-1, 0).$$

Seja ℓ a reta focal. Como $\overrightarrow{CF_2} = (2, 1) \parallel \ell$, isto é, $(1, -2) \perp \ell$, e $C = (1, 1) \in \ell$, a equação de ℓ é dada por:

$$\ell : x - 2y = -1\,.$$

Sejam $A_1 = (2y_1 - 1, y_1)$ e $A_2 = (2y_2 - 1, y_2)$ os vértices sobre a reta focal. Como $d(A_1, C) = d(A_2, C) = a = 3$, y_1 e y_2 são as raízes da equação:

$$\begin{array}{rrcr}
& d((2y-1,y),C)^2 = 3^2 & \Longleftrightarrow & (2y-1-1)^2+(y-1)^2=9 \\
\Longleftrightarrow & 4(y-1)^2+(y-1)^2=9 & \Longleftrightarrow & 5(y-1)^2=9 \\
\Longleftrightarrow & (y-1)^2=\dfrac{9}{5} & \Longleftrightarrow & y-1=\pm\dfrac{3}{\sqrt{5}} \\
\Longleftrightarrow & y=1\pm\dfrac{3}{\sqrt{5}} & \Longleftrightarrow & y_1=1-\dfrac{3}{\sqrt{5}}\,, \quad \text{e} \quad y_2=1+\dfrac{3}{\sqrt{5}}\,.
\end{array}$$

Logo,

$$x_1 = 2y_1 - 1 = 2\left(1-\frac{3}{\sqrt{5}}\right)-1 = 1-\frac{6}{\sqrt{5}}\,,$$
$$x_2 = 2y_2 - 1 = 2\left(1+\frac{3}{\sqrt{5}}\right)-1 = 1+\frac{6}{\sqrt{5}}\,,$$

e

$$A_1 = \left(1-\frac{6}{\sqrt{5}}, 1-\frac{3}{\sqrt{5}}\right),$$
$$A_2 = \left(1+\frac{6}{\sqrt{5}}, 1+\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$$

são os vértices sobre a reta focal.

Seja ℓ' a reta não focal. Então, $(1,-2) \parallel \ell' \parallel \dfrac{(1,-2)}{\sqrt{5}}$ e $C=(1,1)\in\ell'$. Logo,

$$\ell' : \begin{cases} x = 1+\dfrac{t}{\sqrt{5}} \\ y = 1-\dfrac{2t}{\sqrt{5}} \end{cases} ; \quad t\in\mathbb{R}$$

é uma equação paramétrica da reta não focal.

Seja B um dos vértices sobre a reta não focal. Então,

$$B=(1,1)+t\left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{e} \quad |BC| = |t|\left|\left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right| = |t| = b = 2\,,$$

ou seja, $t=\pm 2$. Portanto,

$$B_1 = (1,1)-2\left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}, 1+\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$
$$B_2 = (1,1)+2\left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}, 1-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

são os vértices sobre a reta não focal.

Como $(2,1)\perp\ell'$ e $C=(1,1)\in\ell'$, $\ell' : 2x+y=3$ é a equação cartesiana da reta não focal.

Na figura 2 mostramos o esboço da elipse $\mathcal{E}$. $\square$

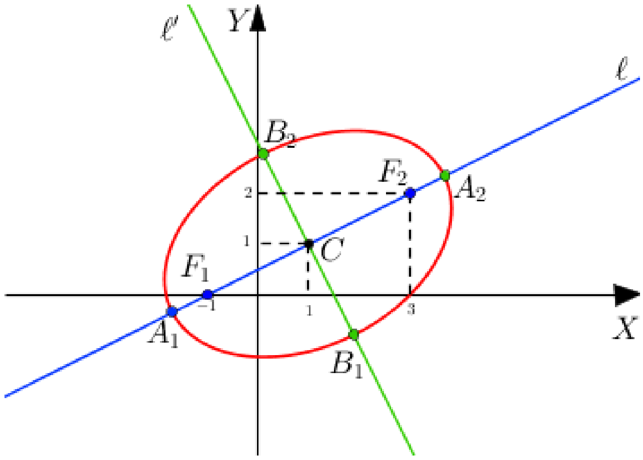

Figura 2: Elipse $\mathcal{E} : 5x^2 - 4xy + 8y^2 - 6x - 12y - 27 = 0$.

Exemplo 3

Determine o vértice e a equação da parábola $\mathcal{P}$ que tem a reta $\mathcal{L} : 2x + y = 1$ como diretriz e foco na origem.

Solução.

Temos que um ponto $P = (x, y)$ pertence à parábola $\mathcal{P}$ se, e só se, $d(P, F) = d(P, \mathcal{L})$, ou seja, se, e somente se,

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{|2x + y - 1|}{\sqrt{5}} \quad &\iff \quad x^2 + y^2 = \frac{(2x + y - 1)^2}{5} \\ &\iff \quad 5x^2 + 5y^2 = 4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 1 \,. \end{aligned}$$

Logo, $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x + 2y - 1 = 0$ é a equação da parábola $\mathcal{P}$.

A reta focal ℓ da parábola é a reta perpendicular à diretriz $\mathcal{L}$ que passa pelo foco $F = (0, 0)$. Então, $\ell : x - 2y = 0$.

Seja $A = (x, y)$ o ponto de interseção de ℓ e $\mathcal{L}$. Então, as coordenadas x e y satisfazem ao sistema

$$\begin{cases} x = 2y \\ 2x + y = 1. \end{cases}$$

Substituindo $x = 2y$ na segunda equação, obtemos $5y = 1$, isto é, $y = \dfrac{1}{5}$.

Logo, $x = 2y = \dfrac{2}{5}$ e $A = \left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{5}\right)$.

Seja V o vértice da parábola. Como $d(V,F) = d(V,\mathcal{L}) = d(V,A)$, segue que V é o ponto médio do segmento FA, isto é,

$$V = \frac{A+F}{2} = \left(\frac{2}{10}, \frac{1}{10}\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{10}\right).$$

A figura 3 mostra o esboço da parábola $\mathcal{P}$.

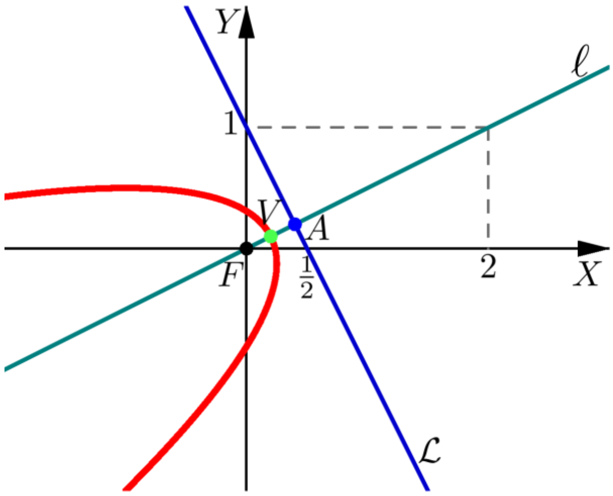

Figura 3: Parábola $\mathcal{P} : x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x + 2y - 1 = 0$.

□

Exemplo 4

Determine a equação da hipérbole $\mathcal{H}$ que passa pelo ponto $Q = (-1, -5)$ e tem os eixos coordenados como assíntotas.

Solução.

Como as assíntotas da hipérbole são os eixos coordenados e a reta focal é uma das bissetrizes das assíntotas, temos que $\ell : x = -y$ ou $\ell : x = y$.

Se a reta focal ℓ fosse a reta $x = -y$, a hipérbole estaria inteiramente contida nos 2^o e 4^o quadrantes, o que é um absurdo, pois o ponto $Q = (-1, -5)$, pertencente à hipérbole $\mathcal{H}$, está no 3^o quadrante.

Portanto, $\ell : x = y$. Observe que a hipérbole é equilátera, pois o ângulo que as assíntotas fazem com a reta focal é igual a 45^o, isto é, a inclinação b/a das assíntotas em relação à reta focal é igual a $1 (= \operatorname{tg} 45^o)$.

Além disso, o centro C da hipérbole, ponto de interseção das assíntotas, é a origem. Então, seus focos são da forma $F_1 = (-m, -m)$ e $F_2 = (m, m)$ para algum $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$.

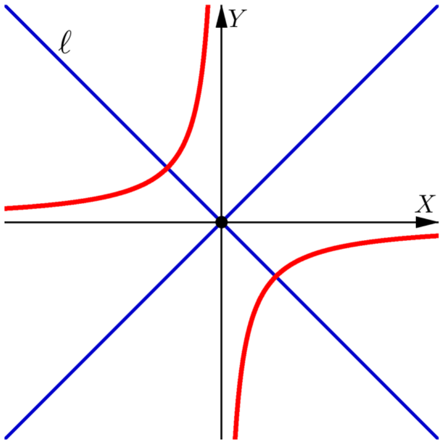

Figura 4: Caso $\ell : x = -y$.

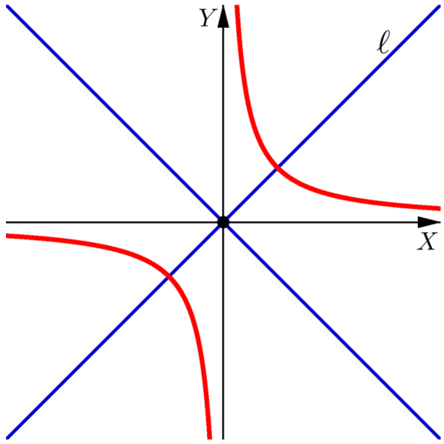

Figura 5: Caso $\ell : x = y$.

Sendo $c = d(F_1, C) = d(F_2, C)$, $c^2 = a^2 + b^2$ e $a = b$, temos que:

$$a^2 + a^2 = c^2 = m^2 + m^2\,, \qquad \text{ou seja,} \qquad a = m.$$

Assim, um ponto $P = (x, y)$ pertence à hipérbole $\mathcal{H}$ se, e só se,

$$\begin{aligned}
&\left| \sqrt{(x+m)^2 + (y+m)^2} - \sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2} \right| = 2m \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{(x+m)^2 + (y+m)^2} = \pm 2m + \sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2} \\
\Leftrightarrow\ & (x+m)^2 + (y+m)^2 = 4m^2 + (x-m)^2 + (y-m)^2 \pm 4m\sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2} \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + 2mx + m^2 + y^2 + 2my + m^2 = 4m^2 + x^2 - 2mx + m^2 + y^2 - 2my + m^2 \\
& \pm 4m\sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2} \\
\Leftrightarrow\ & 2mx + 2my = 4m^2 - 2mx - 2my \pm 4m\sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2} \\
\Leftrightarrow\ & 4mx + 4my = 4m^2 \pm 4m\sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2} \\
\Leftrightarrow\ & x + y = m \pm \sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2} \\
\Leftrightarrow\ & x + y - m = \pm\sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2} \\
\Leftrightarrow\ & (x + y - m)^2 = (x-m)^2 + (y-m)^2 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + y^2 + 2xy + m^2 - 2mx - 2my = x^2 - 2mx + m^2 + y^2 - 2my + m^2 \\
\Leftrightarrow\ & 2xy = m^2 \\
\Leftrightarrow\ & xy = \frac{m^2}{2}\,.
\end{aligned}$$

Como $Q = (-1, -5) \in \mathcal{H}$, temos que $\dfrac{m^2}{2} = (-1)(-5)$, isto é, $m^2 = 10$. Logo,

$xy = 5$ é a equação da hipérbole $\mathcal{H}$. $\square$

Exemplo 5

Seja $\mathcal{C}$ uma cônica centrada no ponto $C = (1, 2)$, de excentricidade $e = \dfrac{1}{2}$, reta focal paralela ao eixo$-OX$ e $d(F, V) = 1$, onde F é um foco e V é o vértice sobre a reta focal mais próximo de F.

Classifique a cônica e determine seus vértices, seus focos e sua equação.

Solução.

A cônica $\mathcal{C}$ é uma elipse, pois $e = \dfrac{1}{2} < 1$. Então,

$$1 = d(F, V) = d(C, V) - d(C, F) = a - c = a - ae$$
$$\iff 1 = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \iff a = 2\,.$$

Sendo $a = 2$, temos que $c = ae = 2 \times \dfrac{1}{2} = 1$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$.

Além disso, a reta $\ell : y = 2$, paralela ao eixo$-OX$, é a reta focal da cônica $\mathcal{C}$. Logo,

$$\mathcal{C} : \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{3} = 1$$

é a equação canônica da elipse.

Nesta elipse:

- $A_1 = (-1, 2)$ e $A_2 = (3, 2)$ são os vértices sobre a reta focal.
- $B_1 = (1, 2 - \sqrt{3})$ e $B_2 = (1, 2 + \sqrt{3})$ são os vértices sobre a reta não focal.
- $F_1 = (0, 2)$ e $F_2 = (2, 2)$ são os focos. $\square$

Exemplo 6

Seja $\mathcal{C}$ uma cônica centrada no ponto $C = (1, 2)$, de excentricidade $e = 2$, reta focal paralela ao eixo$-OY$ e $d(F, V) = 2$, onde F é um foco e V é o vértice mais próximo de V.

Classifique a cônica e determine seus vértices, seus focos, suas diretrizes e sua equação.

Solução.

A cônica $\mathcal{C}$ é uma hipérbole, pois $e = 2 > 1$. Então,

$$2 = d(F,V) = d(F,C) - d(C,V) = c - a = ae - a$$
$$\Longleftrightarrow 2 = 2a - a = a \Longleftrightarrow a = 2.$$

Logo, $c = ae = 4$ e $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Como a reta focal $\ell : x = 1$ é paralela ao eixo$-OY$, obtemos que:

$$\mathcal{C} : \frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{12} = 1\,,$$

é a equação da hipérbole com:

- vértices: $A_1 = (1,0)$ e $A_2 = (1,4)$;
- vértices imaginários: $B_1 = (1-2\sqrt{3}, 2)$ e $B_2 = (1+2\sqrt{3}, 2)$;
- focos: $F_1 = (1,-2)$ e $F_2 = (1,6)$;
- assíntotas: $x - 1 = \pm\sqrt{3}\,(y-2)$. □

Exemplo 7

Classifique, em função do parâmetro $k \in \mathbb{R}$, a família de curvas

$$4x^2 + ky^2 + 8kx + 20k + 24 = 0\,,$$

indicando, nos casos não degenerados, se a reta focal é paralela ao eixo$-OX$ ou ao eixo$-OY$.

Solução.

Completando o quadrado na equação, temos que:

$$\begin{aligned}
& 4x^2 + ky^2 + 8kx + 20k + 24 = 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & 4(x^2 + 2kx) + ky^2 = -20k - 24 \\
\Longleftrightarrow\quad & 4(x^2 + 2kx + k^2) + ky^2 = -20k - 24 + 4k^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & 4(x+k)^2 + ky^2 = 4(k^2 - 5k - 6) \\
\Longleftrightarrow\quad & 4(x+k)^2 + ky^2 = 4(k+1)(k-6)\,.
\end{aligned}$$

Estudo do sinal dos coeficientes k e $(k+1)(k-6)$ da equação:

	$-\infty<k<-1$	$k=-1$	$-1<k<0$	$k=0$	$0<k<6$	$k=6$	$6<k<+\infty$
k	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(k+1)(k-6)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$

Então, para:

- $k \in (-\infty, -1)$, a equação representa uma hipérbole de centro $(-k, 0)$ e reta focal $=$ eixo$-OX$.
- $k = -1$, a equação $4(x-1)^2 - y^2 = 0$ representa o par de retas concorrentes $y = \pm 2(x-1)$ que passam pelo ponto $(1, 0)$.
- $k \in (-1, 0)$, a equação representa uma hipérbole de centro $(-k, 0)$ e reta focal $\ell : x = -k$ paralela ao eixo$-OY$.
- $k = 0$, a equação $4x^2 = -24$ representa o conjunto vazio.
- $k \in (0, 6)$, a equação representa o conjunto vazio, pois $4(x+k)^2 + ky^2 \geq 0$ e $4(k+1)(k-6) < 0$ neste intervalo.
- $k = 6$, a equação $4(x+6)^2 + 6y^2 = 0$ representa o ponto $(-6, 0)$.
- $k \in (6, +\infty)$, a equação, que pode ser escrita na forma

$$\frac{(x+k)^2}{\dfrac{4(k+1)(k-6)}{4}} + \frac{y^2}{\dfrac{4(k+1)(k-6)}{k}} = 1\,,$$

representa uma elipse de centro $(-k, 0)$ e reta focal $\ell =$ eixo$-OX$, pois $\dfrac{4(k+1)(k-6)}{4} > \dfrac{4(k+1)(k-6)}{k}$ neste intervalo. $\square$

Exemplo 8

Sejam OXY um sistema de eixos ortogonais e $O\overline{X}\,\overline{Y}$ o sistema de eixos ortogonais, obtido pela rotação positiva do ângulo θ dos eixos OX e OY, onde $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$ e $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{3}{5}$.

Uma parábola $\mathcal{P}$, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, tem foco no ponto $F = \left(\dfrac{12}{5}, \dfrac{16}{5}\right)$ e vértice no ponto $V = \left(\dfrac{12}{5}, -\dfrac{9}{5}\right)$.

(a) *Determine a equação da parábola nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ e nas coordenadas x e y.*

(b) *Determine o foco, o vértice, a reta focal e a diretriz da parábola nas coordenadas x e y.*

(c) *Faça um esboço da curva no sistema de eixos OXY, indicando seus* *elementos.*

Solução.

(a) Como $p = d(F, V) = \dfrac{25}{5} = 5$ e, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, a reta focal $\ell : \overline{x} = \dfrac{12}{5}$ é paralela ao eixo$-O\overline{Y}$ e o foco F encontra-se acima do vértice V, temos que

$$\mathcal{P} : \left(\overline{x} - \frac{12}{5}\right)^2 = 20\left(\overline{y} + \frac{9}{5}\right)$$

é a equação da parábola, cuja diretriz é a reta $\mathcal{L} : \overline{y} = -\dfrac{9}{5} - p = -\dfrac{9}{5} - 5 = -\dfrac{34}{5}$. Usando as relações de mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \cos\theta\ x + \operatorname{sen}\theta\ y = \frac{1}{5}(4x+3y) \\ \overline{y} &= -\operatorname{sen}\theta\ x + \cos\theta\ y = \frac{1}{5}(-3x+4y)\,, \end{aligned} \qquad (1)$$

a equação da parábola, nas coordenadas x e y, é dada por:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{5}(4x+3y) - \frac{12}{5}\right)^2 = 20\left(\frac{1}{5}(-3x+4y) + \frac{9}{5}\right) \\ \iff\ & (4x+3y-12)^2 = \frac{20\times 25}{5}(-3x+4y+9) \\ \iff\ & (4x+3y)^2 - 24(4x+3y) + 144 = 100(-3x+4y+9) \\ \iff\ & 16x^2 + 24xy + 9y^2 - 96x - 72y + 144 = -300x + 400y + 900 \\ \iff\ & \boxed{\mathcal{P} : 16x^2 + 24xy + 9y^2 + 204x - 472y - 756 = 0} \end{aligned}$$

(b) Pelas relações de mudança de coordenadas (1), $\ell : \dfrac{1}{5}(4x+3y) = \dfrac{12}{5}$, isto é, $\ell : 4x + 3y = 12$, é a equação da reta focal, e $\mathcal{L} : \dfrac{1}{5}(-3x+4y) = -\dfrac{34}{5}$, isto é, $\mathcal{L} : -3x + 4y = -34$, é a equação da diretriz nas coordenadas x e y.
E, pelas relações de mudança de coordenadas

$$x = \cos\theta\,\overline{x} - \operatorname{sen}\theta\,\overline{y} = \frac{1}{5}(4\overline{x} - 3\overline{y})$$
$$y = \operatorname{sen}\theta\,\overline{x} + \cos\theta\,\overline{y} = \frac{1}{5}(3\overline{x} + 4\overline{y}),$$

obtemos que

$$F = \left(\frac{1}{5}\left(\frac{48}{5} - \frac{48}{5}\right), \frac{1}{5}\left(\frac{36}{5} + \frac{64}{5}\right)\right) = (0,4),$$
$$V = \left(\frac{1}{5}\left(\frac{48}{5} + \frac{27}{5}\right), \frac{1}{5}\left(\frac{36}{5} - \frac{36}{5}\right)\right) = (3,0)$$

são o foco e o vértice, respectivamente, da parábola nas coordenadas x e y.

(c) Na figura 6 mostramos o esboço da parábola $\mathcal{P}$.

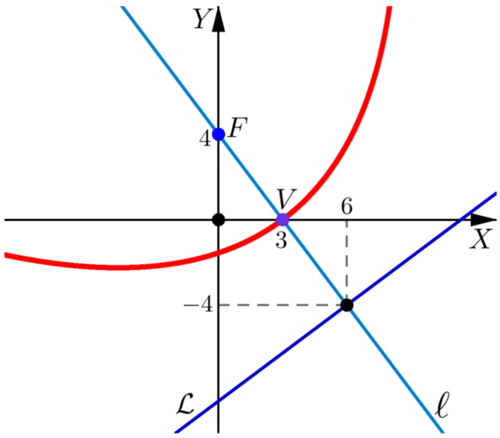

Figura 6: Parábola $\mathcal{P} : 16x^2 + 24xy + 9y^2 + 204x - 472y - 756 = 0$.

□

Exemplo 9

Esboce, detalhadamente, a região do plano dada pelo sistema de inequações:

$$\mathcal{R} : \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4 \\ 16x^2 + y^2 - 8y \geq 0 \\ -4x^2 + y^2 - 4y \leq 0 \\ |x| \leq 2\,. \end{cases}$$

Solução.

A região $\mathcal{R}$ é a interseção das quatro regiões do plano:

$$\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \geq 4\}$$

$$\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \,|\, 16x^2 + y^2 - 8y \geq 0\}$$

$$\mathcal{R}_3 = \{(x, y) \,|\, -4x^2 + y^2 - 4y \leq 0\}$$

$$\mathcal{R}_4 = \{(x, y) \,|\, |x| \leq 2\}\,.$$

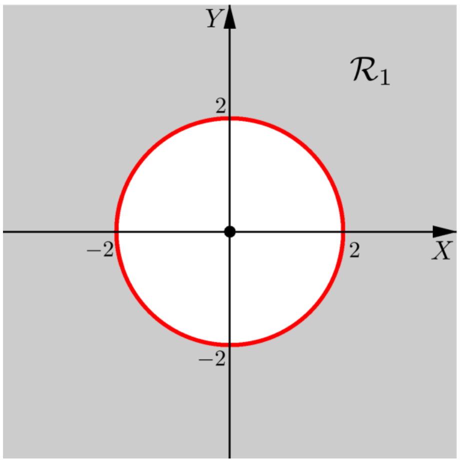

Figura 7: Circunferência $\mathcal{C}_1$ e região $\mathcal{R}_1$.

• Descrição da região $\mathcal{R}_1$.
A região $\mathcal{R}_1$ consiste dos pontos pertencentes ou exteriores à circunferência

$$\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 = 4$$

de centro na origem e raio 2.

• Descrição da região $\mathcal{R}_2$.
Para descrever a região $\mathcal{R}_2$, vamos primeiro determinar a cônica:

$$\mathcal{C}_2 : 16x^2 + y^2 - 8y = 0.$$

Completando o quadrado na equação da curva $\mathcal{C}_2$, obtemos:

$$\begin{aligned} & 16x^2 + y^2 - 8y = 0 \\ \iff\ & 16x^2 + (y^2 - 8y + 16) = 16 \\ \iff\ & 16x^2 + (y-4)^2 = 16 \\ \iff\ & \mathcal{C}_2 : x^2 + \frac{(y-4)^2}{16} = 1\,. \end{aligned}$$

Então $\mathcal{C}_2$ é a elipse de centro $(0, 4)$; reta focal $\ell =$ eixo$-OY$; reta não focal $\ell' : y = 4$; $a^2 = 16$, $b^2 = 1$, ou seja, $a = 4$ e $b = 1$; vértices sobre a reta focal $A_1 = (0, 0)$ e $A_2 = (0, 8)$; vértices sobre a reta não focal $B_1 = (-1, 4)$ e $B_2 = (1, 4)$. Portanto,

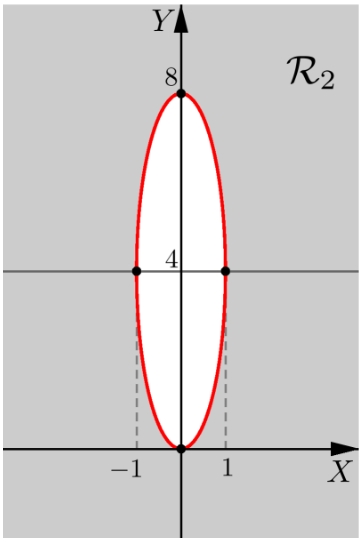

Figura 8: Elipse $\mathcal{C}_2$ e região $\mathcal{R}_2$.

$$\mathcal{R}_2 : 16x^2 + y^2 - 8y \geq 0 \Longleftrightarrow \mathcal{R}_2 : x^2 + \frac{(y-4)^2}{16} \geq 1$$

consiste dos pontos do plano exteriores ou sobre a elipse $\mathcal{C}_2$.

• Descrição da região $\mathcal{R}_3$.

Para descrever a região $\mathcal{R}_3$, vamos primeiro identificar a cônica:

$$\mathcal{C}_3 : -4x^2 + y^2 - 4y = 0.$$

Completando o quadrado na equação de $\mathcal{C}_3$, temos

$$\begin{aligned} & -4x^2 + y^2 - 4y = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & -4x^2 + (y^2 - 4y + 4) = 4 \\ \Longleftrightarrow\ & -4x^2 + (y-2)^2 = 4 \\ \Longleftrightarrow\ & \mathcal{C}_3 : -x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} = 1\,, \end{aligned}$$

que é a equação da hipérbole de centro $(0,2)$, reta focal $\ell =$ eixo$-OY$; reta não focal $\ell' : y = 2$, paralela ao eixo$-OX$; $a^2 = 4$ e $b^2 = 1$, ou seja, $a = 2$ e $b = 1$; vértices $A_1 = (0,0)$ e $A_2 = (0,4)$, e vértices imaginários $B_1 = (-1,2)$ e $B_2 = (1,2)$.

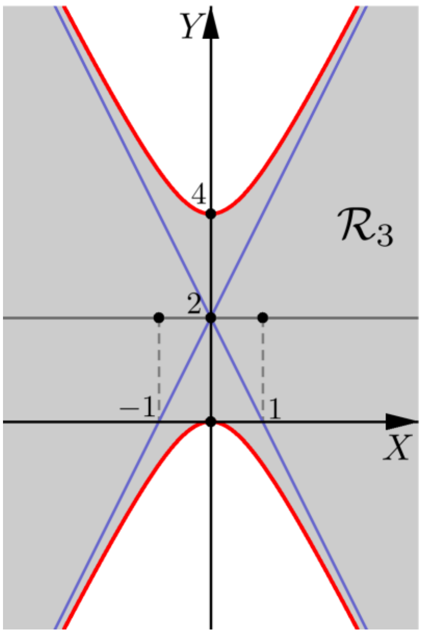

Figura 9: Hipérbole $\mathcal{C}_3$ e região $\mathcal{R}_3$.

A hipérbole divide o plano em três regiões, duas delas limitadas pelos ramos da hipérbole e a outra situada entre eles.

Como as coordenadas do centro $(0,2)$ satisfazem à inequação $-4x^2+y^2-4y \leq 0$, concluímos que a região $\mathcal{R}_3$ consiste dos pontos entre os ramos da hipérbole ou sobre eles.

• Descrição da região $\mathcal{R}_4$.
Temos que:
$$|x| \leq 2 \iff -2 \leq x \leq 2.$$
Portanto, a região $\mathcal{R}_4$ é o conjunto
$$\{(x,y) \,|\, -2 \leq x \leq 2,\ y \in \mathbb{R}\},$$
que consiste dos pontos da faixa vertical limitada pelas retas $r_1 : x = 2$ e $r_2 : x = -2$.

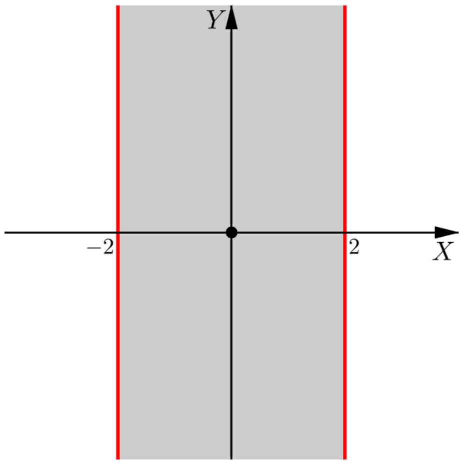

Figura 10: Retas r_1 e r_2 e região R_4.

• Descrição da região $\mathcal{R}$.
Finalmente, a região $\mathcal{R}$ consiste dos pontos exteriores à círculo $\mathcal{C}_1$ e à elipse $\mathcal{C}_2$, que estão entre os ramos da hipérbole $\mathcal{C}_3$ e na faixa $\mathcal{R}_4$, podendo tais pontos pertencerem também a uma das curvas do bordo C_1, C_2, C_3 ou a uma das retas r_1 ou r_2, como vemos nas figuras 11 e 12.

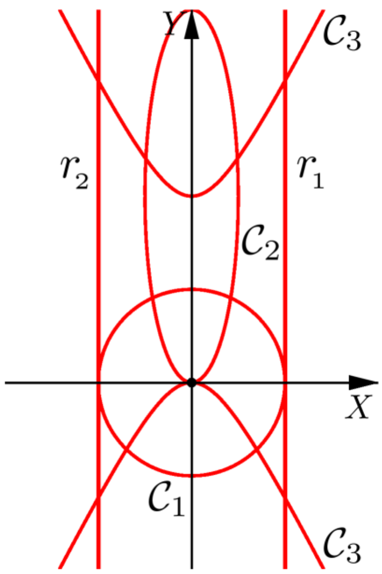

Figura 11: Curvas que limitam a região $\mathcal{R}$.

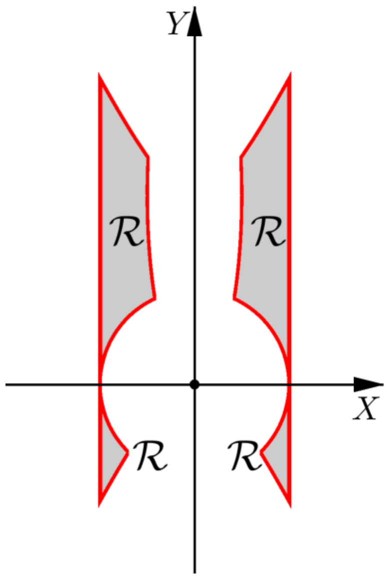

Figura 12: Região $\mathcal{R}$.

□

Exemplo 10

Classifique, em função do parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$, a família de curvas

$$x^2 + (\lambda-2)y^2 + 2\lambda x + 2(\lambda-2)y + 3\lambda - 3 = 0\,,$$

indicando, nos casos não degenerados, se a reta focal é paralela ao eixo$-OX$ ou ao eixo$-OY$.

Solução.

Completando os quadrados na equação da família, temos que:

$$\begin{aligned}
& (x^2+2\lambda x) + (\lambda-2)(y^2+2y) = 3-3\lambda \\
\iff & (x^2+2\lambda x+\lambda^2) + (\lambda-2)(y^2+2y+1) = 3-3\lambda+\lambda^2+\lambda-2 \\
\iff & (x+\lambda)^2 + (\lambda-2)(y+1)^2 = \lambda^2-2\lambda+1 \\
\iff & (x+\lambda)^2 + (\lambda-2)(y+1)^2 = (\lambda-1)^2\,. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Para fazermos a classificação da família de curvas, precisamos estudar o sinal dos coeficientes $(\lambda-2)$ e $(\lambda-1)^2$ da equação (2):

	$-\infty<\lambda<1$	$\lambda=1$	$1<\lambda<2$	$\lambda=2$	$2<\lambda<+\infty$
$\lambda-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(\lambda-1)^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$

Então, para:

- $\lambda \in (-\infty,1)$, a equação representa uma hipérbole de centro $(-\lambda,-1)$ e reta focal $\ell : y=-1$ paralela ao eixo$-OX$.
- $\lambda=1$, a equação $(x+1)^2-(y+1)^2=0$ representa o par de retas concorrentes $y+1=\pm(x+1)$ que se cortam no ponto $(-1,-1)$.
- $\lambda \in (1,2)$, a equação representa uma hipérbole de centro $(-\lambda,-1)$ e reta focal $\ell : y=-1$ paralela ao eixo$-OX$.
- $\lambda=2$, a equação $(x+2)^2=1$ representa o par de retas $x+2=\pm 1$, ou seja, $x=-3$ e $x=-1$, paralelas ao eixo$-OY$.
- $\lambda \in (2,+\infty)$, a equação, que se escreve também na forma

$$\frac{(x+\lambda)^2}{(\lambda-1)^2} + \frac{(y+1)^2}{\dfrac{(\lambda-1)^2}{\lambda-2}} = 1\,,$$

representa:

∘ uma circunferência de centro $(-3,-1)$ e raio 2, se $\lambda = 3$, pois, neste caso, $(\lambda-1)^2 = \dfrac{(\lambda-1)^2}{\lambda-2} = 4$;

∘ uma elipse de centro $(-\lambda,-1)$ e reta focal $\ell : x = -\lambda$, paralela ao eixo$-OY$, se $\lambda \in (2,3)$, pois, neste intervalo, $(\lambda-1)^2 < \dfrac{(\lambda-1)^2}{\lambda-2}$;

∘ uma elipse de centro $(-\lambda,-1)$ e reta focal $\ell : y = -1$ paralela ao eixo$-OX$, se $\lambda \in (3,+\infty)$, pois, neste intervalo, $(\lambda-1)^2 > \dfrac{(\lambda-1)^2}{\lambda-2}$. □

Exemplo 11

Considere os pontos $F = (2,1)$ e $Q = (4,0)$.

(a) *Determine as equações das parábolas de reta focal ℓ perpendicular ao vetor $\overrightarrow{v} = (1,-2)$ e foco F, que contêm o ponto Q.*

(b) *Determine os vértices das parábolas obtidas acima.*

(c) *Faça um esboço das parábolas obtidas no mesmo sistema de eixos ortogonais OXY, indicando todos os seus elementos.*

Solução.

(a) Como a diretriz $\mathcal{L}$ é perpendicular à reta focal ℓ e $\overrightarrow{v} = (1,-2) \perp \ell$, temos que $(2,1) \perp \mathcal{L}$. Então, $\mathcal{L} : 2x + y = m$, para algum $m \in \mathbb{R}$.

Além disso, como $Q = (4,0)$ pertence à parábola, segue que $d(Q,F) = d(Q,\mathcal{L})$. Isto é,

$$\begin{aligned}
\sqrt{(4-2)^2 + (0-1)^2} = \frac{|2\times 4 + 0 \times 1 - m|}{\sqrt{5}} \quad &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{5} = \frac{|8-m|}{\sqrt{5}} \\
&\Longleftrightarrow \quad |m-8| = 5 \\
&\Longleftrightarrow \quad m = 8 \pm 5\,.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{L} : 2x + y = 8 \pm 5$.

Caso 1. Parábola $\mathcal{P}_1$ de foco $F = (2, 1)$ e diretriz $\mathcal{L}_1 : 2x + y = 13$.
Neste caso, um ponto $P = (x, y) \in \mathcal{P}_1$ se, e só se, $d(P, F) = d(P, \mathcal{L}_1)$, ou seja,

$$\begin{aligned}
& d(P,F)^2 = d(P,\mathcal{L}_1)^2 \\
\iff\ & (x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{(2x+y-13)^2}{5} \\
\iff\ & 5(x^2+y^2-4x-2y+5) = 4x^2+4xy+y^2-52x-26y+169 \\
\iff\ & \boxed{\mathcal{P}_1 : x^2-4xy+4y^2+32x+16y-144=0}
\end{aligned}$$

Caso 2. Parábola $\mathcal{P}_2$ de foco $F = (2, 1)$ e diretriz $\mathcal{L}_2 : 2x + y = 3$.
Assim, um ponto $P = (x, y) \in \mathcal{P}_2$ se, e só se, $d(P, F) = d(P, \mathcal{L}_2)$, ou seja,

$$\begin{aligned}
& d(P,F)^2 = d(P,\mathcal{L}_2)^2 \\
\iff\ & (x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{(2x+y-3)^2}{5} \\
\iff\ & 5(x^2+y^2-4x-2y+5) = 4x^2+4xy+y^2-12x-6y+9 \\
\iff\ & \boxed{\mathcal{P}_2 : x^2-4xy+4y^2-8x-4y+16=0}
\end{aligned}$$

(b) Consideremos as duas parábolas obtidas no item anterior.

- O vértice V_1 da parábola $\mathcal{P}_1$ é o ponto médio do segmento A_1F, onde $A_1 = (x, y)$ é o ponto de interseção da reta focal $\ell : x - 2y = 0$ com a diretriz $\mathcal{L}_1 : 2x + y = 13$. Então, as coordenadas x e y do ponto A_1 satisfazem ao sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y = 13\,. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, obtemos $x = \dfrac{26}{5}$ e $y = \dfrac{13}{5}$, isto é, $A_1 = \left(\dfrac{26}{5}, \dfrac{13}{5}\right)$.
Logo,

$$V_1 = \frac{A_1 + F}{2} = \frac{\left(\frac{26}{5}, \frac{13}{5}\right) + (2,1)}{2} = \left(\frac{36}{10}, \frac{18}{10}\right) = \left(\frac{18}{5}, \frac{9}{5}\right)\,.$$

- O vértice V_2 da parábola $\mathcal{P}_2$ é o ponto médio do segmento A_2F, onde $A_2 = (x, y)$ é o ponto de interseção da reta focal $\ell : x - 2y = 0$ com a diretriz

$\mathcal{L}_2 : 2x + y = 3$. Logo, as coordenadas x e y do ponto A_2 satisfazem ao sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y = 3\,. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, obtemos $x = \frac{6}{5}$ e $y = \frac{3}{5}$, isto é, $A_2 = \left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$. Logo,

$$V_2 = \frac{A_2 + F}{2} = \frac{\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right) + (2,1)}{2} = \left(\frac{16}{10}, \frac{8}{10}\right) = \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)\,.$$

(c) Na figura 13, mostramos o esboço das parábolas $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ no mesmo sistema de eixos ortogonais OXY.

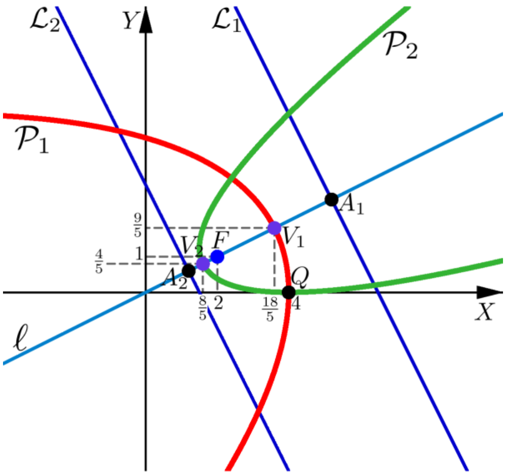

Figura 13: Parábolas $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$.

□

Exemplo 12

Sejam OXY um sistema de eixos ortogonais e $O\overline{X}\,\overline{Y}$ o sistema de eixos ortogonais obtido pela rotação positiva de 45^o dos eixos OX e OY em torno da origem. Uma hipérbole nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ tem centro na origem, um de seus vértices no ponto $(\sqrt{2}, 0)$ e a reta $\overline{y} = 2\overline{x}$ como uma de suas assíntotas.

(a) *Determine a equação da hipérbole nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ e nas coordenadas x e y.*

(b) *Determine o centro, os vértices, os vértices imaginários e as assíntotas* *da hipérbole nas coordenadas x e y.*

(c) *Faça um esboço da curva no sistema de eixos OXY, indicando todos os elementos encontrados no item* **(b)**.

Solução.

(a) Nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, a reta focal ℓ é o eixo$-O\overline{X}$, pois o centro $C = (0,0)$ e o vértice $V = (\sqrt{2},0)$ pertencem ao eixo$-O\overline{X}$. Além disso, $a = d(C,V) = \sqrt{2}$ e $\dfrac{b}{a} = 2$, pois $\overline{y} = 2\overline{x}$ é uma assíntota da hipérbole. Então, $b = 2a = 2\sqrt{2}$, e

$$\mathcal{H} : \frac{\overline{x}^2}{2} - \frac{\overline{y}^2}{8} = 1$$

é a equação da hipérbole nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$.

Usando as relações de mudança de coordenadas

$$\begin{cases} \overline{x} = \cos 45^o\, x + \operatorname{sen} 45^o\, y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\[2ex] \overline{y} = -\operatorname{sen} 45^o\, x + \cos 45^o\, y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x+y), \end{cases} \tag{3}$$

obtemos a equação da hipérbole nas coordenadas x e y:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times \frac{2}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{8} \times \frac{2}{4}(-x+y)^2 = 1 \\ \iff\ & 4(x+y)^2 - (-x+y)^2 = 16 \\ \iff\ & 4(x^2+2xy+y^2) - (x^2-2xy+y^2) = 16 \\ \iff\ & 3x^2 + 10xy + 3y^2 = 16 \\ \iff\ & \boxed{\mathcal{H} : 3x^2 + 10xy + 3y^2 - 16 = 0} \end{aligned}$$

(b) Nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, a hipérbole tem:

- centro: $C = (0,0)$;
- vértices: $A_1 = (-\sqrt{2},0)$ e $A_2 = (\sqrt{2},0)$;
- vértices imaginários: $B_1 = (0,-2\sqrt{2})$ e $B_2 = (0,2\sqrt{2})$;
- reta focal: $\ell : \overline{y} = 0$;
- reta não focal: $\ell' : \overline{x} = 0$;

• assíntotas: $\overline{y} = \pm 2\overline{x}$.

Por (3), obtemos que $\ell : -x + y = 0$ é a reta focal; $\ell' : x + y = 0$ é a reta não focal e $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x+y) = \pm 2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$, isto é, $r_- : y = -3x$ e $r_+ : y = -\dfrac{1}{3}x$ são as assíntotas da hipérbole nas coordenadas x e y.

E, pelas relações de mudança de coordenadas

$$x = \cos 45^o\,\overline{x} - \operatorname{sen} 45^o\,\overline{y} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} - \overline{y})$$

$$y = \operatorname{sen} 45^o\,\overline{x} + \cos 45^o\,\overline{y} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} + \overline{y})\,,$$

obtemos que $C = (0,0)$ é o centro, $A_1 = (-1,-1)$ e $A_2 = (1,1)$ são os vértices; $B_1 = (2,-2)$ e $B_2 = (-2,2)$ são os vértices imaginários da hipérbole nas coordenadas x e y.

(c) Na figura 14 mostramos o esboço da hipérbole $\mathcal{H}$.

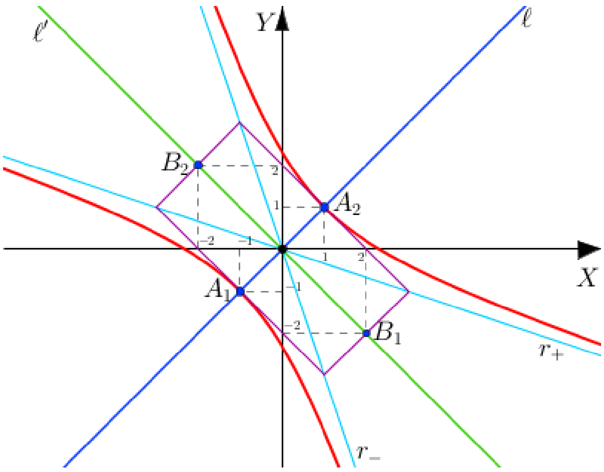

Figura 14: Hipérbole $\mathcal{H} : 3x^2 + 10xy + 3y^2 - 16 = 0$.

□

Exemplo 13

Sejam $V_1 = (7,1)$ e $V_2 = (2,5)$ os vértices de uma elipse com reta focal paralela a um dos eixos coordenados.

(a) *Determine o centro, a reta focal, a reta não focal, os vértices e os focos da elipse $\mathcal{E}$, supondo que o vértice V_1 pertença à reta focal.*

(b) *Determine o centro, a reta focal, a reta não focal, os vértices e os focos da elipse $\overline{\mathcal{E}}$, supondo que o vértice V_2 pertença à reta focal.*

(c) *Faça um esboço das duas elipses encontradas acima num mesmo sistema de eixos ortogonais, indicando todos os seus elementos.*

Solução.

Consideremos o retângulo de lados paralelos aos eixos coordenados e vértices nos pontos $V_1 = (7, 1)$ e $V_2 = (2, 5)$.

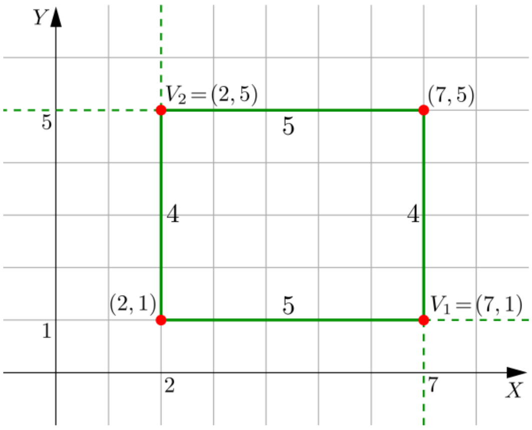

Figura 15: Retângulo de vértices V_1 e V_2.

Como $a > b$ numa elipse, temos que $a = 5$ e $b = 4$ nas elipses de vértices V_1 e V_2 e reta focal paralela a um dos eixos coordenados.

(a) Se o vértice $V_1 = (7, 1)$ pertence à reta focal da elipse, temos que $\ell : y = 1$ é a reta focal, $\ell' : x = 2$ é a reta não focal, $C = (2, 1)$ é o centro, $A_1 = (-3, 1)$ e $A_2 = V_1 = (7, 1)$ são os vértices sobre a reta focal, $B_1 = (2, -3)$ e $B_2 = V_2 = (2, 5)$ são os vértices sobre a reta não focal, $F_1 = (-1, 1)$ e $F_2 = (5, 1)$ são os focos, pois $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 3$, e

$$\mathcal{E} : \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

é a equação da elipse $\mathcal{E}$.

(b) Se o vértice $V_2 = (2, 5)$ pertence à reta focal da elipse $\overline{\mathcal{E}}$, temos que $\overline{\ell} : y = 5$ é a reta focal, $\overline{\ell}' : x = 7$ é a reta não focal, $\overline{C} = (7, 5)$ é o centro, $\overline{A}_1 = V_2 = (2, 5)$ e $\overline{A}_2 = (12, 5)$ são os vértices sobre a reta focal, $\overline{B}_1 = (7, 9)$ e $B_2 = V_1 = (7, 1)$ são os vértices sobre a reta não focal, $\overline{F}_1 = (4, 5)$ e

$\overline{F}_2 = (10, 5)$ são os focos, e

$$\overline{\mathcal{E}} : \frac{(x-7)^2}{25} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1$$

é a equação da elipse $\overline{\mathcal{E}}$.

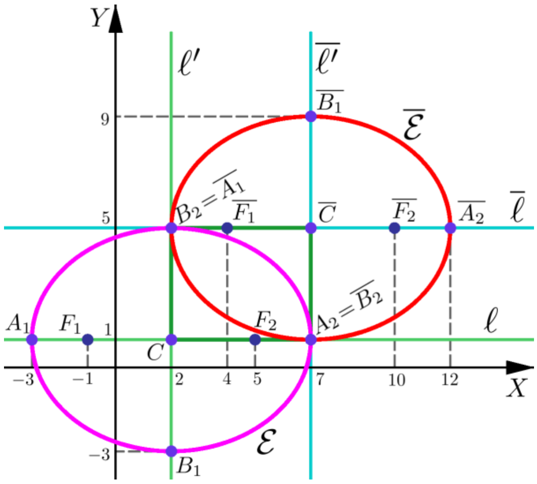

Figura 16: Elipses $\mathcal{E}$ e $\overline{\mathcal{E}}$.

(c) Na figura 16 mostramos as elipses $\mathcal{E}$ e $\overline{\mathcal{E}}$ no mesmo sistema de eixos ortogonais.

□

Exemplo 14

Considere os pontos $A = (4, 1)$ e $B = (3, 2)$.

(a) *Determine as equações e os principais elementos das duas hipérboles que possuem B como vértice imaginário, A como vértice e reta focal paralela a um dos eixos coordenados.*

(b) *Faça um esboço das duas hipérboles num mesmo sistema de eixos ortogonais, indicando todos os seus elementos (menos os focos).*

Solução.

Caso 1. Reta focal ℓ paralela ao eixo$-OX$.

Como $A = (4, 1) \in \ell$ e $B = (3, 2) \in \ell'$, onde ℓ' é a reta não focal, segue que $\ell : y = 1$ e $\ell' : x = 3$. Então, o centro C da hipérbole, ponto de interseção da reta focal com a reta não focal, tem coordenadas $x = 3$ e $y = 1$, isto é, $C = (3, 1)$.

Além disso, $a = d(C, A) = 1$, $b = d(C, B) = 1$ e $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$.

Logo,

$$\mathcal{H} : (x-3)^2 - (y-1)^2 = 1$$

é a equação da hipérbole.

Nessa hipérbole, $F_1 = (3-\sqrt{2}, 1)$ e $F_2 = (3+\sqrt{2}, 1)$ são os focos; $A_1 = (2, 1)$ e $A_2 = A = (4, 1)$ são os vértices; $B_1 = (3, 0)$ e $B_2 = B = (3, 2)$ são os vértices imaginários e $y - 1 = \pm(x-3)$ são as assíntotas.

Caso 2. Reta focal $\overline{\ell}$ paralela ao eixo$-OY$.

Neste caso, $\overline{\ell} : x = 4$ é a reta focal e $\overline{\ell'} : y = 2$ é a reta não focal da hipérbole $\overline{\mathcal{H}}$, com reta focal paralela ao eixo$-OY$, vértice $A = (4, 1)$ e vértice imaginário $B = (3, 2)$. Então $\overline{C} = (4, 2)$ é o centro, $\overline{a} = d(\overline{C}, A) = 1$, $\overline{b} = d(\overline{C}, B) = 1$ e $\overline{c} = \sqrt{\overline{a}^2 + \overline{b}^2} = \sqrt{2}$, e

$$\overline{\mathcal{H}} : (y-2)^2 - (x-4)^2 = 1$$

é a equação da hipérbole $\overline{\mathcal{H}}$.

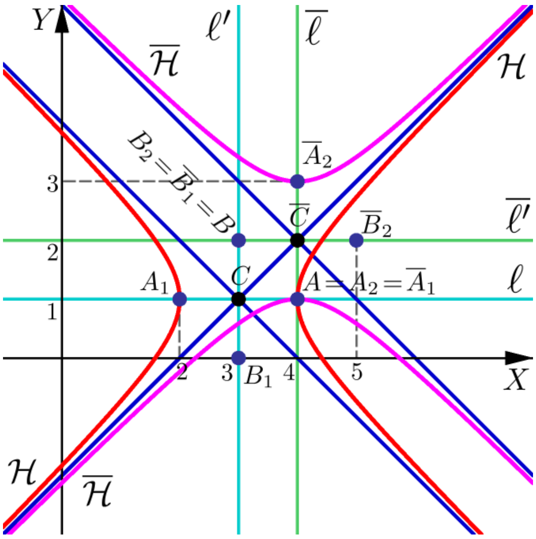

Figura 17: Hipérboles $\mathcal{H}$ e $\overline{\mathcal{H}}$.

Além disso, $\overline{F}_1 = (4, 2-\sqrt{2})$ e $\overline{F}_2 = (4, 2+\sqrt{2})$ são os focos; $\overline{A}_1 = A = (4, 1)$ e $\overline{A}_2 = (4, 3)$ são os vértices; $\overline{B}_1 = B = (3, 2)$ e $\overline{B}_2 = (5, 2)$ são os vértices imaginários e $x - 4 = \pm(y-2)$ são as assíntotas.

(b) Na figura 17 mostramos as hipérboles $\mathcal{H}$ e $\overline{\mathcal{H}}$ num mesmo sistema de eixos ortogonais.

□

Exemplo 15

Considere as curvas

$$\mathcal{C}_1 : x^2 - 20x + y + 100 = 0\,,$$
$$\mathcal{C}_2 : x^2 - y^2 - 6x = 0\,,$$
$$\mathcal{C}_3 : x^2 + 16y^2 - 6x - 7 = 0\,.$$

(a) *Classifique as curvas e determine todos os seus elementos.*

(b) *Faça um esboço detalhado da região do plano dada pelo sistema de inequações:*

$$\mathcal{R}: \begin{cases} x^2 - 20x + y + 100 \geq 0 \\ x^2 - y^2 - 6x \geq 0 \\ x^2 + 16y^2 - 6x - 7 \geq 0 \\ x \leq 10 \\ y \geq -4\,. \end{cases}$$

Observação: Ache as intersecções de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ com a reta $y = -4$.

Solução.

(a) Curva $\mathcal{C}_1 : x^2 - 20x + y + 100 = 0$.

Completando o quadrado, a equação de $\mathcal{C}_1$ na forma canônica é dada por:

$$\mathcal{C}_1 : x^2 - 20x = -y - 100$$

$$\mathcal{C}_1 : x^2 - 20x + 100 = -y - 100 + 100$$

$$\mathcal{C}_1 : (x - 10)^2 = -y.$$

Logo, $\mathcal{C}_1$ é a parábola de reta focal $\ell : x = 10$, paralela ao eixo$-OY$, vértice $V = (10, 0)$, $4p = 1$, ou seja, $p = \frac{1}{4}$, e foco $F = \left(10, -\frac{1}{4}\right)$.

Curva $\mathcal{C}_2 : x^2 - 6x - y^2 = 0$.

A equação da curva $\mathcal{C}_2$ se escreve, completando o quadrado, da seguinte forma:

$$\mathcal{C}_2 : x^2 - 6x - y^2 = 0$$

$$\mathcal{C}_2 : (x^2 - 6x + 9) - y^2 = 9$$

$$\mathcal{C}_2 : (x - 3)^2 - y^2 = 9$$

$$\mathcal{C}_2 : \frac{(x-3)^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1\,.$$

Logo, $\mathcal{C}_2$ é a hipérbole com reta focal $\ell : y = 0$; reta não focal $\ell' : x = 3$; centro $C = (3, 0)$; $a = b = 3$; $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 3\sqrt{2}$; vértices $A_1 = (0, 0)$ e $A_2 = (6, 0)$; vértices imaginários $B_1 = (3, -3)$ e $B_2 = (3, 3)$; assíntotas

$r_{\pm} : y = \pm(x-3)$ e focos $F_1 = (3-3\sqrt{2}, 0)$ e $F_2 = (3+3\sqrt{2}, 0)$.

Curva $\mathcal{C}_3 : x^2 - 6x + 16y^2 - 7 = 0$.

Completando o quadrado na equação, obtemos:

$$\mathcal{C}_3 : x^2 - 6x + 16y^2 - 7 = 0$$

$$\mathcal{C}_3 : (x^2 - 6x + 9) + 16y^2 = 7 + 9$$

$$\mathcal{C}_3 : (x-3)^2 + 16y^2 = 16$$

$$\mathcal{C}_3 : \frac{(x-3)^2}{16} + y^2 = 1\,.$$

Logo, $\mathcal{C}_3$ é a equação da elipse de reta focal $\ell : y = 0$; reta não focal $\ell' : x = 3$; centro $C = (3, 0)$; $a = 4$ e $b = 1$; $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{15}$; vértices sobre a reta focal $A_1 = (-1, 0)$ e $A_2 = (7, 0)$; vértices sobre a reta não focal $B_1 = (3, -1)$ e $B_2 = (3, 1)$; focos $F_1 = (3 - \sqrt{15}, 0)$ e $F_2 = (3 + \sqrt{15}, 0)$.

(b) A região $\mathcal{R}$ é a interseção das regiões:

$$\mathcal{R}_1 : x^2 - 20x + y + 100 \geq 0$$

$$\mathcal{R}_2 : x^2 - y^2 - 6x \geq 0$$

$$\mathcal{R}_3 : x^2 + 16y^2 - 6x - 7 \geq 0$$

$$\mathcal{R}_4 : x \leq 10$$

$$\mathcal{R}_5 : y \geq -4\,.$$

Região $\mathcal{R}_1 : x^2 - 20x + y + 100 \geq 0$.

A parábola $\mathcal{C}_1 : x^2 - 20x + y + 100 = 0$ divide o plano em duas regiões disjuntas, uma das quais contém o foco $F = \left(10, -\frac{1}{4}\right)$.

Substituindo as coordenadas do foco na expressão $x^2 - 20x + y + 100$, obtemos:

$$10^2 - 20 \times 10 - \frac{1}{4} + 100 = 100 - 200 - \frac{1}{4} + 100 = -\frac{1}{4} < 0\,.$$

Portanto, $\mathcal{R}_1$ é a união da região determinada pela parábola que não contém o foco F com os pontos da parábola, onde a igualdade na inequação, que define $\mathcal{R}_1$, é satisfeita.

Na figura 18, mostramos a região $\mathcal{R}_1$.

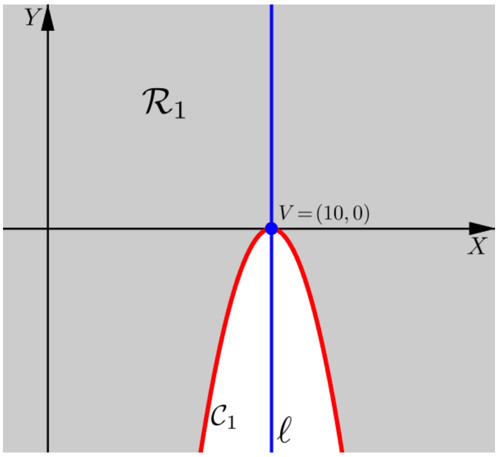

Figura 18: Região $\mathcal{R}_1$.

Região $\mathcal{R}_2 : x^2 - y^2 - 6x \geq 0$.

A hipérbole $\mathcal{C}_2 : x^2 - y^2 - 6x = 0$ divide o plano em três regiões disjuntas, uma das quais contém o centro $C = (3, 0)$ e as outras contêm os focos. A expressão $x^2 - y^2 - 6x$ tem sinal constante em cada uma destas regiões, sendo iguais os sinais nas regiões que contêm os focos.

Substituindo as coordenadas do centro na expressão $x^2 - y^2 - 6x$, obtemos:

$$3^2 - 0^2 - 6 \times 3 = 9 - 0 - 18 = -9 < 0\,.$$

Portanto, $\mathcal{R}_2$ consiste da região determinada pela hipérbole $\mathcal{C}_2$ que contêm os focos, incluindo os ramos da curva $\mathcal{C}_2$, onde a igualdade $x^2 - y^2 - 6x = 0$ é verificada.

Na figura 19, mostramos a região $\mathcal{R}_2$.

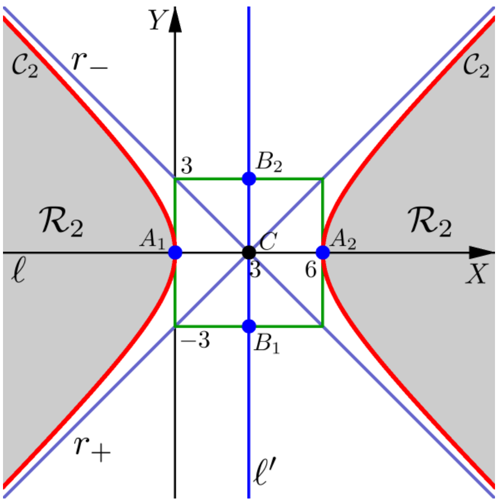

Figura 19: Região $\mathcal{R}_2$.

Região $\mathcal{R}_3 : x^2 + 16y^2 - 6x - 7 \geq 0$.

A elipse $\mathcal{C}_3 : x^2 + 16y^2 - 6x - 7 = 0$ divide o plano em duas regiões, uma das quais (denominada interior) contém o centro $C = (3, 0)$. O sinal da expressão $x^2 + 16y^2 - 6x - 7$ no centro C é:

$$3^2 + 16 \times 0^2 - 6 \times 3 - 7 = 9 + 0 - 18 - 7 = -16 < 0\,.$$

Portanto, a região $\mathcal{R}_3$ é a região exterior à elipse $\mathcal{C}_3$ mais a própria curva, onde a igualdade $x^2 + 16y^2 - 6x - 7 = 0$ é satisfeita.

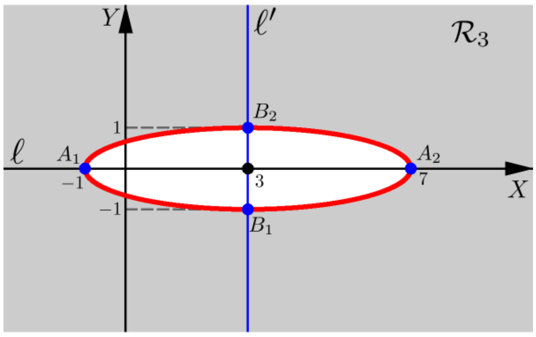

Figura 20: Região $\mathcal{R}_3$.

Regiões $\mathcal{R}_4 : x \leq 10$ e $\mathcal{R}_5 : y \geq -4$.

A região $\mathcal{R}_4$ consiste dos pontos do plano à esquerda da reta $x = 10$, incluindo os pontos da reta, e a região $\mathcal{R}_5$ consiste dos pontos do plano acima da reta horizontal $y = -4$, incluindo os pontos da reta.

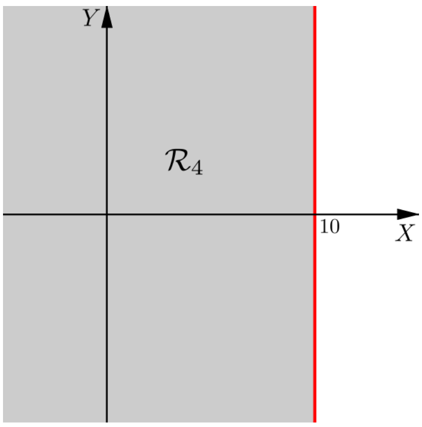

Figura 21: Região $\mathcal{R}_4$.

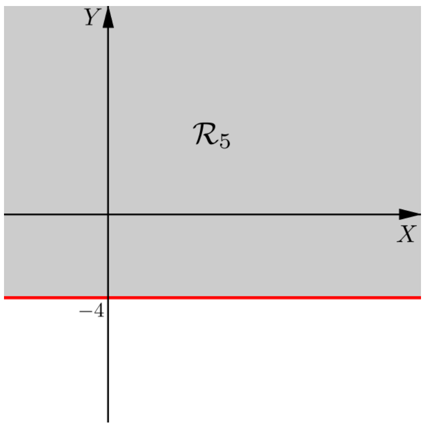

Figura 22: Região $\mathcal{R}_5$.

Região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3 \cap \mathcal{R}_4 \cap \mathcal{R}_5$.

Para esboçarmos corretamente a região $\mathcal{R}$, devemos determinar:

- as interseções da parábola $\mathcal{C}_1$ com as retas $x = 10$ e $y = -4$.

A parábola $\mathcal{C}_1$ intersecta a reta vertical $x = 10$ exatamente no vértice $(10, 0)$. Para achar a interseção de $\mathcal{C}_1$ com a reta horizontal $y = -4$, devemos substituir y por -4 na equação $\mathcal{C}_1 : y = -(x-10)^2$:

$$-4 = -(x-10)^2 \Longrightarrow (x-10)^2 = 4 \Longrightarrow x - 10 = \pm 2 \Longrightarrow x = 10 \pm 2\,.$$

Temos, então, que

$$\mathcal{C}_1 \cap \{y = -4\} = \{(8, -4), (12, -4)\}.$$

• as interseções da hipérbole $\mathcal{C}_2$ com as retas $x = 10$ e $y = -4$.

Para achar a interseção de $\mathcal{C}_2$ com a reta horizontal $y = -4$, substituímos y por -4 na equação $\mathcal{C}_2 : (x-3)^2 - y^2 = 9$:

$$(x-3)^2 - (-4)^2 = 9 \Longrightarrow (x-3)^2 - 16 = 9 \Longrightarrow (x-3)^2 = 16 + 9 = 25$$
$$\Longrightarrow x - 3 = \pm 5 \Longrightarrow x = 3 \pm 5\,.$$

Logo,

$$\mathcal{C}_2 \cap \{y = -4\} = \{(-2, -4), (8, -4)\}.$$

Em particular, observe que

$$\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \{y = -4\} = \{(8, -4)\}.$$

Para achar a interseção de $\mathcal{C}_2$ com a reta vertical $x = 10$, substituímos x por 10 na equação $\mathcal{C}_2 : (x-3)^2 - y^2 = 9$:

$$(10-3)^2 - y^2 = 9 \Longrightarrow 7^2 - y^2 = 9 \Longrightarrow y^2 = 49 - 9 = 40 \Longrightarrow y = \pm 2\sqrt{10}\,.$$

Logo,

$$\mathcal{C}_2 \cap \{x = 10\} = \{(10, -2\sqrt{10}), (10, 2\sqrt{10})\}.$$

Nas figuras 23 e 24 mostramos todas as curvas envolvidas e a região $\mathcal{R}$. □

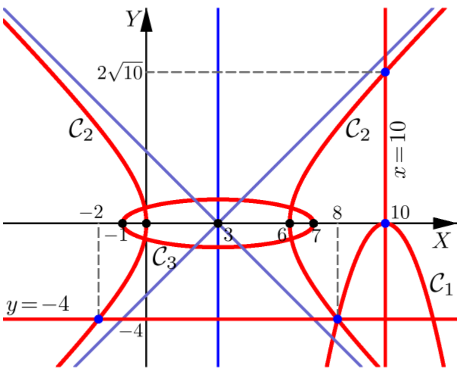

Figura 23: Curvas $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$.

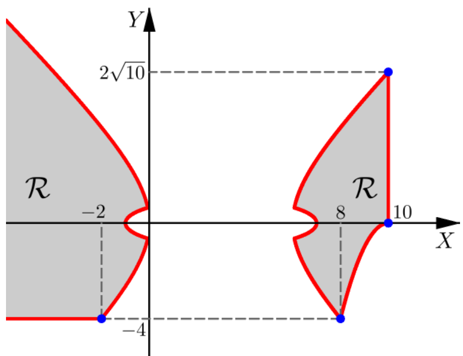

Figura 24: Região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3 \cap \mathcal{R}_4 \cap \mathcal{R}_5$.

Exemplo 16

Classifique, em função do parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$, a família de curvas

$$(\lambda-1)x^2+(\lambda-2)y^2-2\lambda(\lambda-1)x+\lambda^3-2\lambda^2-2\lambda+3=0\,,$$

indicando, nos casos não degenerados, se a reta focal é paralela ao eixo$-OX$ ou ao eixo$-OY$.

Solução.
Completando o quadrado, temos que:

$$\begin{aligned}
& (\lambda-1)x^2+(\lambda-2)y^2-2\lambda(\lambda-1)x+\lambda^3-2\lambda^2-2\lambda+3=0\\
\iff\ & (\lambda-1)(x^2-2\lambda x)+(\lambda-2)y^2=-\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda-3\\
\iff\ & (\lambda-1)(x^2-2\lambda x+\lambda^2)+(\lambda-2)y^2=-\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda-3+\lambda^2(\lambda-1)\\
\iff\ & (\lambda-1)(x-\lambda)^2+(\lambda-2)y^2=-\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda-3+\lambda^3-\lambda^2\\
\iff\ & (\lambda-1)(x-\lambda)^2+(\lambda-2)y^2=\lambda^2+2\lambda-3\\
\iff\ & (\lambda-1)(x-\lambda)^2+(\lambda-2)y^2=(\lambda-1)(\lambda+3)\,.
\end{aligned}$$

Para fazermos a classificação, precisamos estudar o sinal dos coeficientes $\lambda-1$, $\lambda-2$ e $(\lambda-1)(\lambda+3)$ da equação:

	$-\infty<\lambda<-3$	$\lambda=-3$	$-3<\lambda<1$	$\lambda=1$	$1<\lambda<2$	$\lambda=2$	$2<\lambda<+\infty$
$\lambda-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\lambda-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(\lambda-1)(\lambda+3)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$

Então, para:

• $\lambda\in(-\infty,-3)$, a equação representa o conjunto vazio, pois $(\lambda-1)(x-\lambda)^2\le 0$, $(\lambda-2)y^2\le 0$ e $(\lambda+3)(\lambda-1)>0$.

• $\lambda=-3$, a equação $-4(x+3)^2-5y^2=0$ representa o conjunto unitário que consiste do ponto $(-3,0)$.

• $\lambda\in(-3,1)$, a equação, que se escreve também na forma

$$\frac{(x-\lambda)^2}{\dfrac{(\lambda-1)(\lambda+3)}{\lambda-1}}+\frac{y^2}{\dfrac{(\lambda-1)(\lambda+3)}{\lambda-2}}=1\,,$$

representa uma elipse com centro $(\lambda,0)$ e reta focal igual ao eixo$-OX$, pois

$$\frac{(\lambda-1)(\lambda+3)}{\lambda-1}=\frac{(1-\lambda)(\lambda+3)}{1-\lambda}>\frac{(1-\lambda)(\lambda+3)}{2-\lambda}=\frac{(\lambda+3)(\lambda-1)}{\lambda-2}>0\,,$$

uma vez que $0<1-\lambda<2-\lambda$ e $\lambda+3>0$ para λ neste intervalo.

• $\lambda = 1$, a equação $-y^2 = 0$, ou seja, $y = 0$, representa uma reta (o eixo$-OX$).

• $\lambda \in (1, 2)$, a equação representa uma hipérbole de centro $(\lambda, 0)$ e reta focal igual ao eixo$-OX$, pois

$$\frac{(\lambda-1)(\lambda+3)}{\lambda-1} > 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{(\lambda-1)(\lambda+3)}{\lambda-2} < 0\,,$$

para todo λ neste intervalo.

• $\lambda = 2$, a equação $(x-2)^2 = 5$, ou seja, $x = 2 \pm \sqrt{5}$, representa um par de retas paralelas ao eixo$-OY$.

• $\lambda \in (2, +\infty)$, a equação, que se escreve na forma

$$\frac{(x-\lambda)^2}{\dfrac{(\lambda-1)(\lambda+3)}{\lambda-1}} + \frac{y^2}{\dfrac{(\lambda-1)(\lambda+3)}{\lambda-2}} = 1\,,$$

representa uma elipse de centro $(\lambda, 0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OY$, pois $\lambda - 1 > \lambda - 2 > 0$ e $(\lambda-1)(\lambda+3) > 0$ para todo λ neste intervalo. $\square$

Exemplo 17

Seja $\mathcal{P}$ uma parábola com reta focal paralela ao eixo$-OX$ e foco $F = (0, 3)$, que intersecta o eixo$-OX$ no ponto $(4, 0)$ e o eixo$-OY$ no ponto $(0, 2)$.

(a) *Determine o vértice, a diretriz e a equação da parábola $\mathcal{P}$.*

(b) *Faça um esboço de $\mathcal{P}$, indicando seus elementos.*

Solução.

(a) Como a reta focal ℓ da parábola é paralela ao eixo$-OX$ e o foco $F = (0, 3)$ pertence a ℓ, temos que $\ell : y = 3$, $V = (x_0, 3)$ é o vértice, para algum $x_0 \in \mathbb{R}$, e

$$(y-3)^2 = \pm 4p(x - x_0)$$

é a forma da equação de $\mathcal{P}$.

Além disso, como $\mathcal{P} \cap \text{eixo} - OX = \{(4, 0)\}$ e $\mathcal{P} \cap \text{eixo} - OY = \{(0, 2)\}$, obtemos:

$$(0-3)^2 = \pm 4p(4 - x_0) \qquad \text{e} \qquad (2-3)^2 = \pm 4p(0 - x_0)\,,$$

isto é,

$$9 = \pm 4p(4 - x_0) \qquad \text{e} \qquad 1 = \pm 4p(-x_0)\,.$$

Logo, $9 = \pm 16p \pm 4p(-x_0) = \pm 16p + 1$, ou seja, $8 = \pm 16p$.

Sendo $p > 0$, concluímos que $8 = 16p$, isto é, $p = \dfrac{1}{2}$, e $1 = 4p(-x_0) = -2x_0$, ou seja, $x_0 = -\dfrac{1}{2}$.

Obtemos, assim, o vértice $V = \left(-\dfrac{1}{2}, 3\right)$ da parábola e sua equação:

$$\mathcal{P} : (y-3)^2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

A diretriz de $\mathcal{P}$ é a reta $\mathcal{L} : x = -\dfrac{1}{2} - p = -1$, pois $\mathcal{L}$ é perpendicular a ℓ, o foco F está à direita de V e $d(V, \mathcal{L}) = p = \dfrac{1}{2}$.

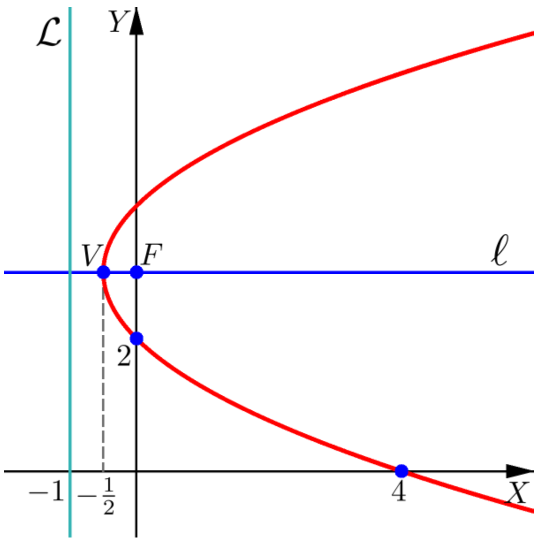

Figura 25: Parábola $\mathcal{P} : (y-3)^2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

(b) Na figura 25 mostramos o gráfico de $\mathcal{P}$ e seus principais elementos.

□

Exemplo 18

Esboçe, detalhadamente, a região do plano dada pela inequação:

$$\mathcal{R} : (|x| - 4)(4x^2 + 9y^2 - 40x - 54y + 145) < 0.$$

Solução.

Completando o quadrado na equação

$$4x^2 + 9y^2 - 40x - 54y + 145 = 0,$$

obtemos:

$$\begin{aligned} & 4(x^2-10x)+9(y^2-6y)=-145 \\ \iff & 4(x^2-10x+25)+9(y^2-6y+9)=-145+100+81 \\ \iff & 4(x-5)^2+9(y-3)^2=36 \\ \iff & \frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1\,, \end{aligned}$$

que é a equação da elipse de centro $C=(5,3)$, reta focal $\ell : y=3$ (paralela ao eixo$-OX$), $a=3$, $b=2$, vértices sobre a reta focal $A_1=(2,3)$ e $A_2=(8,3)$, e vértices sobre a reta não focal $B_1=(5,1)$ e $B_2=(5,5)$.

Então, a inequação, que define a região $\mathcal{R}$, pode ser escrita na forma:

$$\mathcal{R} : (|x|-4)\left(\frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}-1\right)<0.$$

Assim, $\mathcal{R}=\mathcal{R}_1\cup\mathcal{R}_2$, onde:

$$\mathcal{R}_1 : \begin{cases} |x|-4<0 \\ \dfrac{(x-5)^2}{9}+\dfrac{(y-3)^2}{4}-1>0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_2 : \begin{cases} |x|-4>0 \\ \dfrac{(x-5)^2}{9}+\dfrac{(y-3)^2}{4}-1<0. \end{cases}$$

A região $\mathcal{R}_1$,

$$\mathcal{R}_1=\{(x,y)|\, x\in(-4,4)\,\}\cap\left\{(x,y)\,|\,\frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}>1\right\},$$

consiste dos pontos exteriores à elipse contidos na faixa limitada pelas retas verticais $x=-4$ e $x=4$, excluindo os pontos da elipse e das retas.

Na figura 26 mostramos a região $\mathcal{R}_1$.

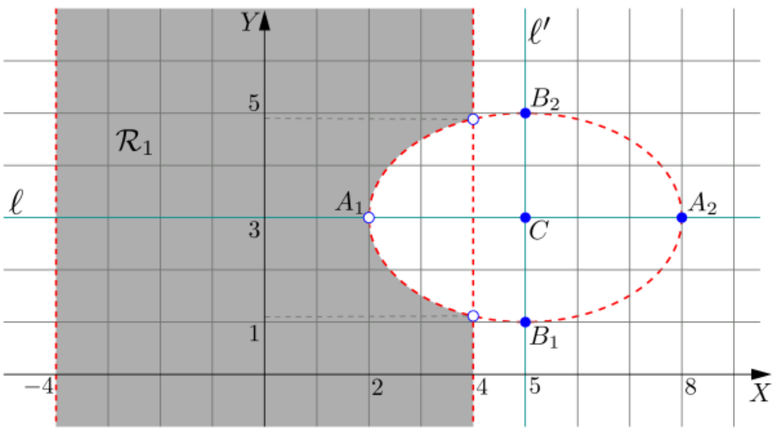

Figura 26: Região $\mathcal{R}_1$.

A região $\mathcal{R}_2$,

$$\mathcal{R}_2 = \{\, (x,y) \mid x \in (-\infty,-4) \cup (4,+\infty) \,\} \cap \left\{ (x,y) \mid \frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} < 1 \right\},$$

consiste dos pontos exteriores à faixa limitada pelas retas $x = -4$ e $x = 4$ que estão na região interior à elipse, excluindo os pontos das retas e da elipse. Na figura 27 mostramos a região $\mathcal{R}_2$:

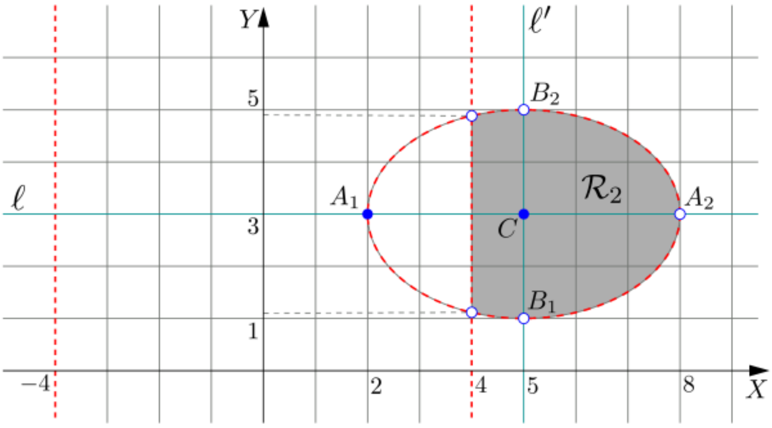

Figura 27: Região $\mathcal{R}_2$.

Portanto, o esboço da região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ é:

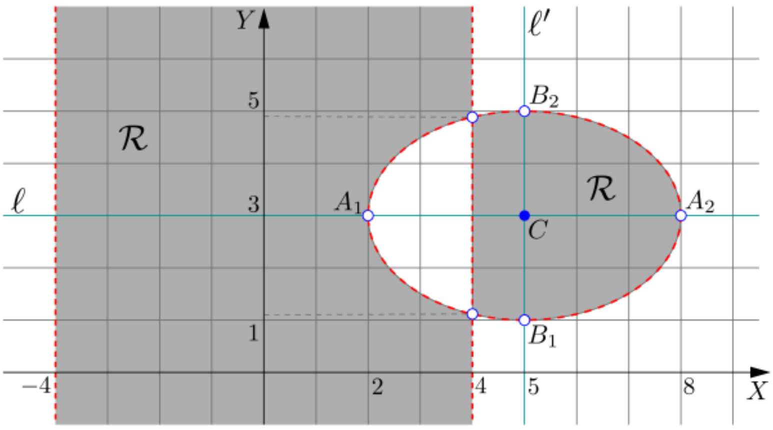

Figura 28: Região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$.

□

Exemplo 19

Verifique que a equação do segundo grau

$$-7x^2 + 8xy - y^2 + \sqrt{5}(-x+y) = 0 \qquad (4)$$

representa um par de retas concorrentes e determine suas equações.

Solução.

A equação tem coeficientes:

$$A=-7\,,B=8\,,C=-1\,,D=-\sqrt{5}\,,E=\sqrt{5}\text{ e }F=0\,.$$

Como $A\neq C$, devemos girar o eixo$-OX$ e o eixo$-OY$ de um ângulo θ, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, no sentido positivo, tal que $\operatorname{tg}2\theta=\dfrac{B}{A-C}=\dfrac{8}{-7-(-1)}=-\dfrac{8}{6}=-\dfrac{4}{3}$, e escrever a equação nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ do novo sistema de eixos ortogonais $O\,\overline{X}\,\overline{Y}$, obtido após a rotação positiva de ângulo θ do sistema de eixos ortogonais OXY.

Sendo $\operatorname{tg}2\theta=-\dfrac{4}{3}<0$, temos que $\cos 2\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{16}{9}}}=-\dfrac{3}{5}$. Logo,

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{1-\dfrac{3}{5}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\qquad\text{e}\qquad\operatorname{sen}\theta=\sqrt{\frac{1+\dfrac{3}{5}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

Efetuando a mudança de coordenadas dada pelas relações

$$\begin{cases} x=\cos\theta\,\overline{x}-\operatorname{sen}\theta\,\overline{y}\\ y=\operatorname{sen}\theta\,\overline{x}+\cos\theta\,\overline{y}\end{cases},\qquad\text{ou seja,}\qquad\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\overline{x}-2\,\overline{y})\\[2ex] y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2\overline{x}+\overline{y})\,,\end{cases}$$

na equação (4), obtemos a equação nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$

$$\overline{A}\,\overline{x}^2+\overline{C}\,\overline{y}^2+\overline{D}\,\overline{x}+\overline{E}\,\overline{y}+\overline{F}=0\,,$$

onde $\overline{F}=F=0$,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\overline{A}&0\\0&\overline{C}\end{pmatrix}&=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7&4\\4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&2\\18&-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5&0\\0&-45\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-9\end{pmatrix}\end{aligned}$$

e

$$\begin{pmatrix} \overline{D} \\ \overline{E} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Assim, a equação nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ é:

$$\overline{x}^2 - 9\overline{y}^2 + \overline{x} + 3\overline{y} = 0 \,.$$

Completando os quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned}
(\overline{x}^2 + \overline{x}) - 9(\overline{y}^2 - \frac{1}{3}\overline{y}) = 0 \iff & (\overline{x}^2 + \overline{x} + \frac{1}{4}) - 9(\overline{y}^2 - \frac{1}{3}\overline{y} + \frac{1}{36}) = \frac{1}{4} - 9 \times \frac{1}{36} \\
\iff & (\overline{x} + \frac{1}{2})^2 - 9(\overline{y} - \frac{1}{6})^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \\
\iff & (\overline{x} + \frac{1}{2})^2 = 9(\overline{y} - \frac{1}{6})^2 \\
\iff & \overline{x} + \frac{1}{2} = \pm 3(\overline{y} - \frac{1}{6}) \,.
\end{aligned}$$

Logo, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, a equação (4) representa o par de retas concorrentes:

$$\overline{x} + \frac{1}{2} = 3(\overline{y} - \frac{1}{6}) \qquad \text{e} \qquad \overline{x} + \frac{1}{2} = -3(\overline{y} - \frac{1}{6}) \,,$$

ou seja,

$$\overline{x} - 3\overline{y} = -1 \qquad \text{e} \qquad \overline{x} + 3\overline{y} = 0 \,.$$

Para achar as equações das retas nas coordenadas x e y, devemos usar as relações de mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} \overline{x} = \cos\theta \, x + \operatorname{sen}\theta \, y \\ \overline{y} = -\operatorname{sen}\theta \, x + \cos\theta \, y \end{cases} , \qquad \text{ou seja,} \qquad \begin{cases} \overline{x} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x + 2\,y) \\ \overline{y} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2x + y) \,. \end{cases}$$

Substituindo $\overline{x}$ e $\overline{y}$ nas equações das retas, obtemos:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y) - 3 \times \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x + y) = -1$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y) + 3 \times \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x + y) = 0 \,,$$

ou seja,

$$7x - y = -\sqrt{5} \qquad \text{e} \qquad -x + y = 0 \,.$$

□