Capítulo 4

Distâncias no plano e regiões no plano

1. Distância de um ponto a uma reta

Dados um ponto P e uma reta r no plano, já sabemos calcular a distância de P a cada ponto $P' \in r$.

Definição 1

Definimos a **distância**, $d(P, r)$, **do ponto P à reta r** por

$$\boxed{d(P, r) = \min\{d(P, P') \mid P' \in r\}}$$

Dizemos que um ponto $P^\star \in r$ **realiza a distância** de P à reta r, se

$$d(P, P^\star) \leq d(P, P') \text{ ,para todo } P' \in r.$$

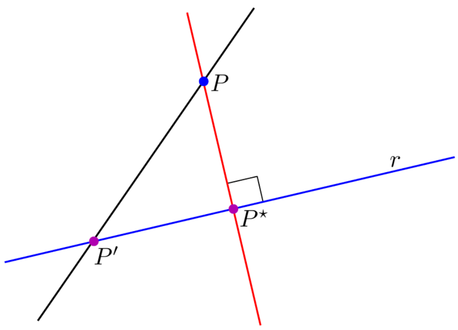

Figura 1: $P^\star$ realiza a distância de P à reta r.

Usando o *teorema de Pitágoras* é fácil verificar que o ponto $P^\star$ que realiza a distância do ponto P à reta r é o *pé da perpendicular a r que passa pelo ponto P*.

Assim,

$$d(P,r) = \min\{d(P,P') \mid P' \in r\} = d(P,P^\star)\,.$$

Teorema 1

Sejam $r : ax + by = c$ uma reta e $P = (x_0, y_0)$ um ponto no plano. Então a distância de P a r é dada por

$$\boxed{d(P,r) = \frac{|\,ax_0 + by_0 - c\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

Prova.

Seja s a reta perpendicular à reta $r : ax + by = c$ que passa pelo ponto $P = (x_0, y_0)$.

Como $\overrightarrow{u} = (a,b) \perp r$, temos que $\overrightarrow{u} \parallel s$.

Logo,

$$s : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

são as equações paramétricas de s.

Seja P^* o pé da perpendicular a r que passa por P, ou seja, $\{P^*\} = r \cap s$. Então $P^* = (x_0 + at^*, y_0 + bt^*)$, para algum $t^* \in \mathbb{R}$, e

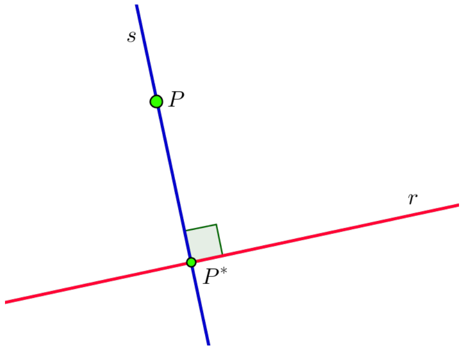

Figura 2: Demonstração do teorema 1.

$$\begin{aligned} & a(x_0 + at^*) + b(y_0 + bt^*) = c \\ \iff\ & (a^2+b^2)t^* + ax_0 + by_0 = c \\ \iff\ & t^* = \frac{c - (ax_0 + by_0)}{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

Como $d(P,r) = d(P,P^*) = ||\overrightarrow{PP^*}||$ e $\overrightarrow{PP^*} = (a,b)t^*$, temos:

$$\begin{aligned} d(P,r) &= |t^*| \cdot ||(a,b)|| = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2} \\ d(P,r) &= \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{aligned}$$

■

Exemplo 1

Calcule a distância do ponto $P = (1,-1)$ à reta $r : x + 2y = 1$.

Solução.
Vamos resolver o problema de duas maneiras:
(1) Usando a fórmula obtida no teorema anterior: sendo $x_0 = 1$, $y_0 = -1$, $a = 1$, $b = 2$ e $c = 1$, temos

$$d(P, r) = \frac{|1 \times 1 + 2 \times (-1) - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|1 - 2 - 1|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

(2) Seja r' a reta que passa pelo ponto $P = (1, -1)$ e é perpendicular à reta $r : x + 2y = 1$.

Como r tem inclinação $m = \frac{-1}{2}$, a reta r' tem inclinação

$$n = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-1/2} = 2.$$

Logo a equação de r' deve ser $r' : y = 2x + d$.
Sendo $P = (1, -1) \in r'$, temos $-1 = 2 \times 1 + d \Longrightarrow d = -1 - 2 = -3$.
Assim, $r' : y = 2x - 3$. Note, também, que a equação de r se escreve:

$$r : y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Seja $r \cap r' = \{P^\star\}$. Se $P^\star = (x, y)$ então $2x - 3 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, ou seja, $\left(2 + \frac{1}{2}\right) x = \frac{1}{2} + 3$.

Portanto, $x = \frac{2}{5} \times \frac{7}{2} = \frac{7}{5}$ e $y = 2 \times \frac{7}{5} - 3 = -\frac{1}{5} \Longrightarrow P^\star = \left(\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}\right)$.

Logo,

$$\begin{aligned} d(P, r) &= d(P, P^\star) = \sqrt{\left(\frac{7}{5} - 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{5} + 1\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{4 + 16}{5^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \end{aligned}$$

concluindo, assim, o cálculo desejado. $\square$

2. Distância entre duas retas no plano

Definimos a **distância entre r e r'** como sendo a menor distância entre um ponto de r e um ponto de r'.

Isto é,

$$\boxed{d(r,r') = \min\{d(P,P') \mid P \in r \quad \text{e} \quad P' \in r'\}}$$

Então $d(r,r') = 0$ se r e r' são coincidentes ou concorrentes.

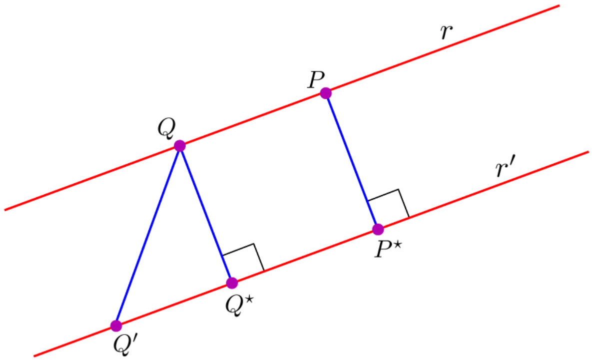

Figura 3: Distância entre duas retas paralelas.

Sejam r e r' retas paralelas.

Sabemos que, dado $P \in r$, existe um único ponto $P^\star \in r'$, pé da perpendicular a r' traçada por P, tal que

$$d(P,P') \geq d(P,P^\star)\,, \qquad \text{para todo } P' \in r'\,.$$

Como $r \parallel r'$, temos $d(Q,Q^\star) = d(P,P^\star)$, quaisquer que sejam $P, Q \in r$, pois $QPP^\star Q^\star$ é um retângulo.

Então $d(Q,Q') \geq d(Q,Q^\star) = d(P,P^\star) = d(P,r')$, quaisquer que sejam $Q \in r$ e $Q' \in r'$.

Logo,

$$d(r,r') = d(P,r')\,, \qquad \text{qualquer que seja} \quad P \in r\,.$$

Como conseqüencia do teorema 1, temos o seguinte corolário.

Corolário 1

Sejam $r : ax+by = c$ e $r' : ax+by = c'$ retas paralelas ($c \neq c'$) ou coincidentes ($c = c'$). Então,

$$\boxed{d(r,r') = \frac{|\,c - c'\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

Prova.
Seja $P = (x_0, y_0)$ um ponto da reta r. Então

$$d(r, r') = d(P, r') = \frac{|ax_0 + by_0 - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,.$$

Como $ax_0 + by_0 = c$, obtemos $d(r, r') = \dfrac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,.$ ■

Exemplo 2

Determine as equações das retas paralelas à reta $r : 2x + y = 1$ que distam 3 unidades de r.

Solução.
Seja $s : 2x + y = c$ uma reta paralela à reta r. Temos,

$$d(r, s) = 3 \iff \frac{|c - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 3 \iff |c - 1| = 3\sqrt{5}\,.$$

Logo $c = 1 + 3\sqrt{5}$ ou $c = 1 - 3\sqrt{5}$, ou seja,

$$s_1 : 2x + y = 1 + 3\sqrt{5} \qquad \text{e} \qquad s_2 : 2x + y = 1 - 3\sqrt{5}\,,$$

são as retas paralelas a r que distam 3 unidades da reta r.
Vejamos outra solução para o mesmo problema sem usar a fórmula da distância entre duas retas paralelas.

Seja $t : y = \dfrac{1}{2}x$ a reta perpendicular à reta r que passa pela origem.

Logo $r \cap t = \{P\}$, onde $P = \left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{5}\right)$ (verifique!).

Sejam $(2y, y)$ os pontos pertencentes à reta t que distam 3 de r, ou seja,

$$d\left((2y, y)\,, \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)\right) = 3\,.$$

Então,

$$4\left(y - \frac{1}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{5}\right)^2 = 9$$

$$\iff \left(y - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{9}{5} \iff y = \pm\frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{1}{5}.$$

Como $t : x = 2y$, os pontos ao logo de t que estão a distância 3 de P são:

$$P_1 = \left(\frac{6}{\sqrt{5}} + \frac{2}{5}, \frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{1}{5}\right)$$

$$P_2 = \left(-\frac{6}{\sqrt{5}} + \frac{2}{5}, -\frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{1}{5} \right).$$

Consideremos agora as retas s_1 e s_2 paralelas à reta r que passam por P_1 e P_2, respectivamente.
Como

$$d(s_1, r) = d(P_1, P) = 3$$
$$d(s_2, r) = d(P_2, P) = 3,$$

s_1 e s_2 são as retas paralelas a r que distam 3 unidades de r, e suas equações são:

$$s_1 : 2x + y = 2\left(\frac{6\sqrt{5}+2}{5}\right) + \frac{3\sqrt{5}+1}{5} = \frac{15\sqrt{5}+5}{5} = 3\sqrt{5}+1$$
$$s_2 : 2x + y = 2\left(\frac{-6\sqrt{5}+2}{5}\right) + \frac{-3\sqrt{5}+1}{5} = \frac{-15\sqrt{5}+5}{5} = -3\sqrt{5}+1.$$

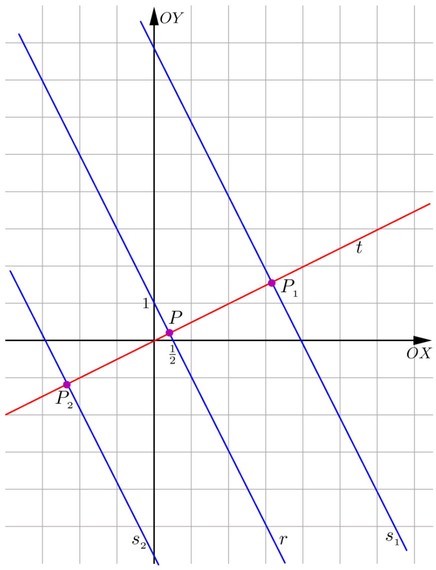

Figura 4: Retas a distância 3 de r.

□

3. Esboço de regiões no plano

Consideremos a reta $r : ax + by = c$ e a reta s que passa pelos pontos $(0,0)$ e (a,b). Então $s : bx - ay = 0$, pois $(0,0)$ e (a,b) satisfazem a equação de s.

Afirmativa 1: As retas r e s são perpendiculares.

De fato, $a \cdot b + b \cdot (-a) = 0$. Logo, pelo proposição **??** do capítulo 3, temos $r \perp s$.

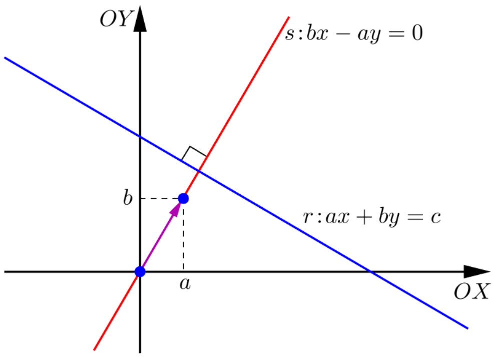

Figura 5: Retas r e s perpendiculares.

Afirmativa 2: Por cada ponto (x_0, y_0) do plano passa uma única reta r' paralela à reta r.

Para verificar esta afirmativa, basta tomar $r' : ax + by = c$, onde $c = ax_0 + by_0$.

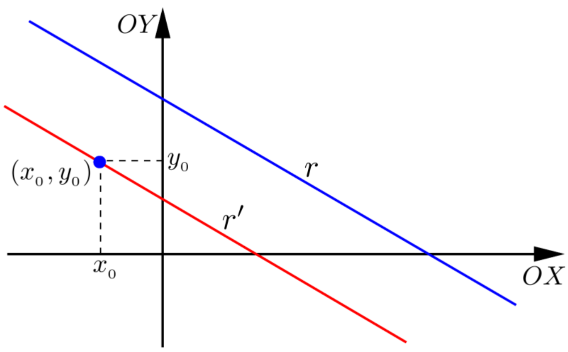

Figura 6: Retas r e r' paralelas.

Afirmativa 3: O plano π é união de retas paralelas a uma reta dada. Isto é,

$$\pi = \bigcup_{c \in \mathbb{R}} \{ (x, y) \mid ax + by = c \} .$$

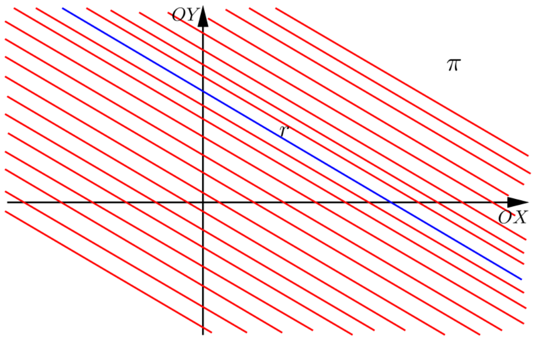

Figura 7: Plano π visto como união de retas paralelas.

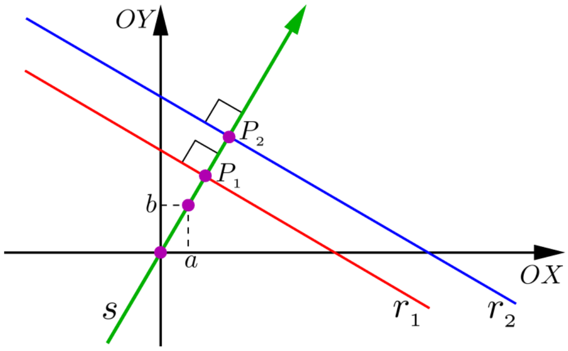

Figura 8: Retas paralelas r_1 e r_2 com perpendicular s passando pela origem.

Afirmativa 4: Consideremos as retas paralelas $r_1 : ax + by = c_1$ e $r_2 : ax + by = c_2$, e os pontos P_1 e P_2, tais que $\{P_1\} = r_1 \cap s$ e $\{P_2\} = r_2 \cap s$, onde $s : bx - ay = 0$.

O sentido de percurso de P_1 para P_2 na reta s coincide com o sentido de percurso de $(0, 0)$ para (a, b) em s **se, e só se,** $c_1 < c_2$.

De fato, analisemos a situação nos quatro casos seguintes:

- **Caso 1.** $b = 0$**,**
- **Caso 2.** $a = 0$**,**
- **Caso 3.** $a > 0$**,** $b \neq 0$**,**
- **Caso 4.** $a < 0$ **e** $b \neq 0$**.**

Vejamos:

Caso 1. $b = 0$**.** Neste caso, temos: $r_1 : x = \dfrac{c_1}{a}$, $r_2 : x = \dfrac{c_2}{a}$, e $s : y = 0$.

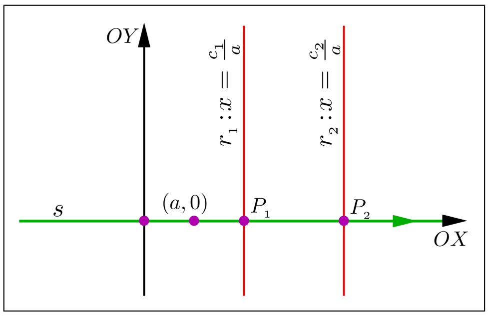

Figura 9: Caso $b = 0$ e $a > 0$.

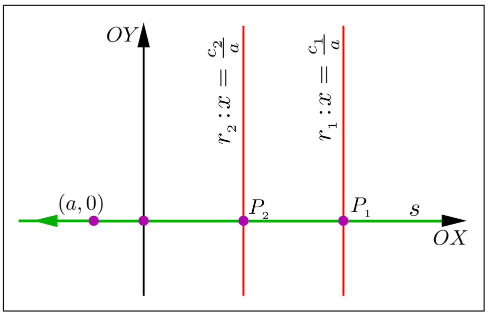

Figura 10: Caso $b = 0$ e $a < 0$.

Se $a > 0$, então $\dfrac{c_1}{a} < \dfrac{c_2}{a} \iff c_1 < c_2$.

Se $a < 0$, então $\dfrac{c_2}{a} < \dfrac{c_1}{a} \iff c_1 < c_2$.

Caso 2. $a = 0$**.** Neste caso, temos: $r_1 : y = \dfrac{c_1}{b}$, $r_2 : y = \dfrac{c_2}{b}$, e $s : x = 0$.

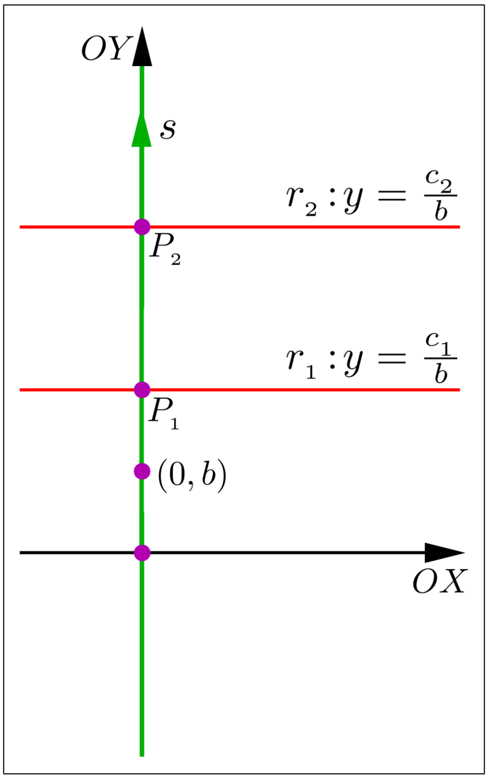

Figura 11: Caso $a = 0$ e $b > 0$.

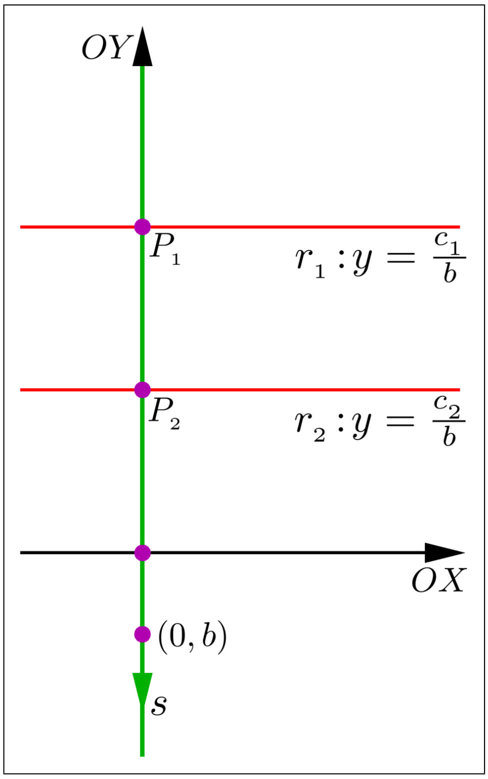

Figura 12: Caso $a = 0$ e $b < 0$.

Se $b > 0$, então $\dfrac{c_1}{b} < \dfrac{c_2}{b} \iff c_1 < c_2$.

Se $b < 0$, então $\dfrac{c_2}{b} < \dfrac{c_1}{b} \iff c_1 < c_2$.

Caso 3. $a > 0$ **e** $b \neq 0$**.** Se $P_1 = (x_1, y_1)$, temos

$$P_1 \in s \iff y_1 = \frac{b}{a} x_1 \quad \text{e} \quad P_1 \in r_1 \iff a x_1 + b y_1 = c_1.$$

Logo, $ax_1 + \frac{b^2}{a}x_1 = c_1 \Longleftrightarrow \boxed{x_1 = \frac{ac_1}{a^2+b^2}}$

Analogamente, se $P_2 = (x_2, y_2) \in s \cap r_2$, então $\boxed{x_2 = \frac{ac_2}{a^2+b^2}}$

Subcaso $a > 0$ e $b > 0$. Pelas formas das abscissas x_1 e x_2, temos

$$x_1 < x_2 \Longleftrightarrow \frac{ac_1}{a^2+b^2} < \frac{ac_2}{a^2+b^2} \Longleftrightarrow c_1 < c_2.$$

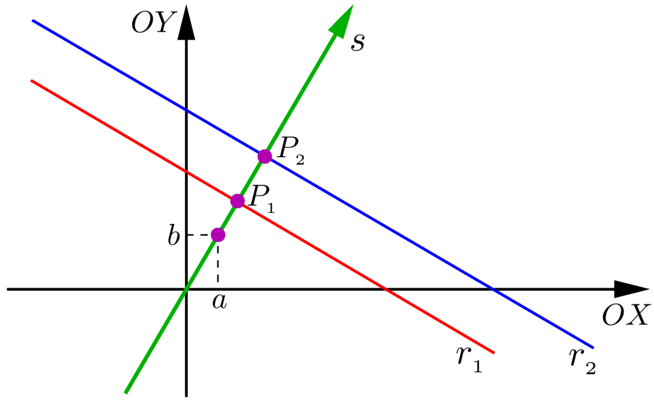

Figura 13: $a > 0$ e $b > 0$. O sentido de percurso em s é de x crescente.

Subcaso $a > 0$ e $b < 0$. Fazendo uma análise como no subcaso anterior, vemos que

$$x_1 < x_2 \Longleftrightarrow c_1 < c_2.$$

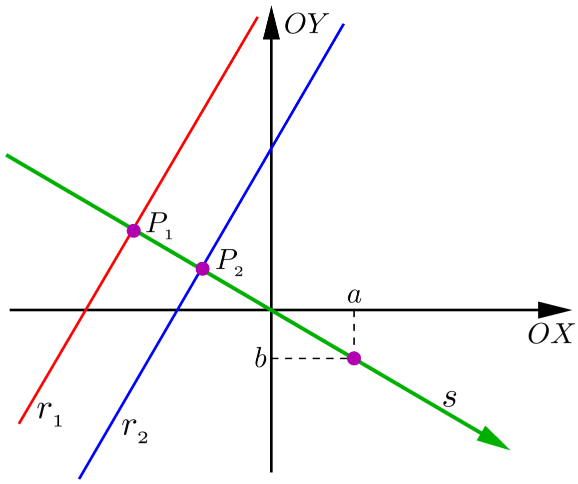

Figura 14: $a > 0$ e $b < 0$. O sentido de percurso em s é de x crescente.

Caso 4. $a < 0$ **e** $b \neq 0$**.**

As abscissas x_1 de P_1 e x_2 de P_2 satisfazem as mesmas relações que no caso anterior.

Subcaso $a < 0$ **e** $b > 0$**.** Como $a < 0$, temos,

$$x_2 = \frac{ac_2}{a^2+b^2} < x_1 = \frac{ac_1}{a^2+b^2} \iff c_1 < c_2.$$

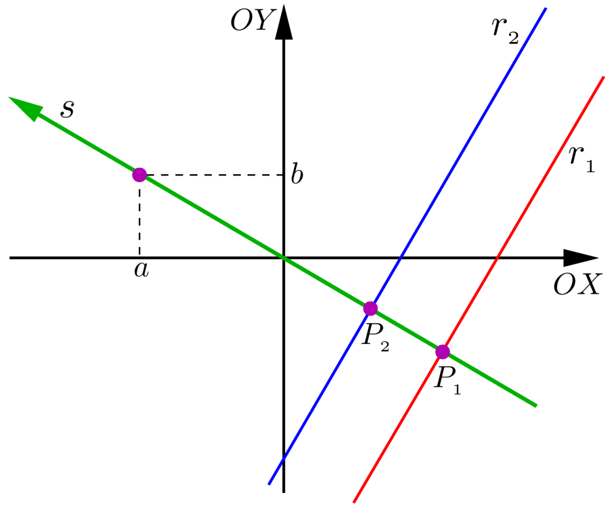

Figura 15: $a < 0$ e $b > 0$. O sentido de percurso em s é de x decrescente.

Subcaso $a < 0$ **e** $b < 0$**.** A análise é feita da mesma forma que o subcaso anterior.

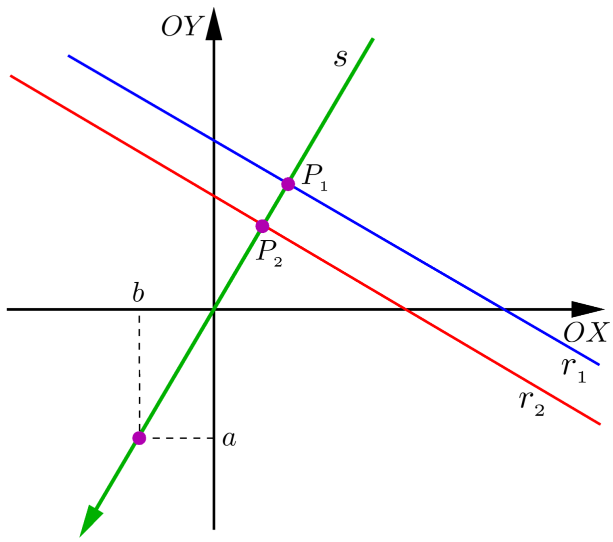

Figura 16: $a < 0$ e $b < 0$. O sentido de percurso em s é de x decrescente.

Exemplo 3

Faça um esboço detalhado da região $\mathcal{R}$ do plano cujos pontos têm coordenadas satisfazendo simultaneamente as desigualdades do sistema abaixo.

$$\mathcal{R} : \begin{cases} y \leq 2x \\ x + y \geq 1 \,. \end{cases}$$

Solução.

A região $\mathcal{R}$ procurada é a interseção das regiões $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ dadas por:

$$\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \,|\, 2x - y \geq 0\} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{R}_2 = \{(x, y) \,|\, x + y \geq 1\} \,.$$

(a) Determinando a região $\mathcal{R}_1$

Considere a reta $r_1 : 2x - y = 0$.
O ponto $(a, b) = (2, -1)$ pertence à reta s_1 perpendicular a r_1 que passa pela origem e o número $c = 2x - y$ aumenta conforme se avança ao longo da reta s seguindo o sentido da origem para o ponto $(a, b) = (2, -1)$, ou seja, o sentido do vetor $\overrightarrow{v} = (a, b)$.

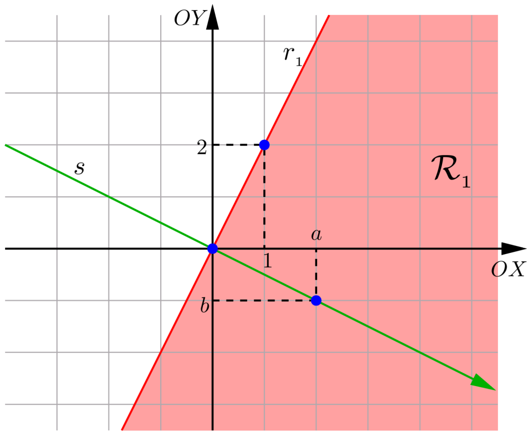

Figura 17: Região $\mathcal{R}_1$. $a = 2 > 0$ e $b = -1 < 0$. O sentido de percurso em s é de x crescente.

Portanto, a região $\mathcal{R}_1$ é o semiplano determinado por r_1 que fica acima de r_1, como vemos na figura 17, incluindo a própria reta r_1.

(b) Determinando a região $\mathcal{R}_2$

Para determinar a região $\mathcal{R}_2$, consideremos agora a reta $r_2 : x + y = 1$.
Neste caso, $a = 1 > 0$ e $b = 1 > 0$. O ponto $(a, b) = (1, 1)$ pertence à reta s_1 perpendicular a r que passa pela origem. Como no item anterior, o número $c = x + y$ aumenta conforme se avança ao longo da reta s_2 seguindo o sentido do vetor $\overrightarrow{v} = (a, b)$.
Assim, as coordenadas de um ponto pertencente a uma reta $x + y = c$ satisfazem a desigualdade $x + y \geq 1$ se, e somente se, a reta está contida na região sombreada indicada na figura 18. Ou seja, a região $\mathcal{R}_2$ é o semiplano determinado por r_2 que fica acima de r_2, incluindo a reta r_2.

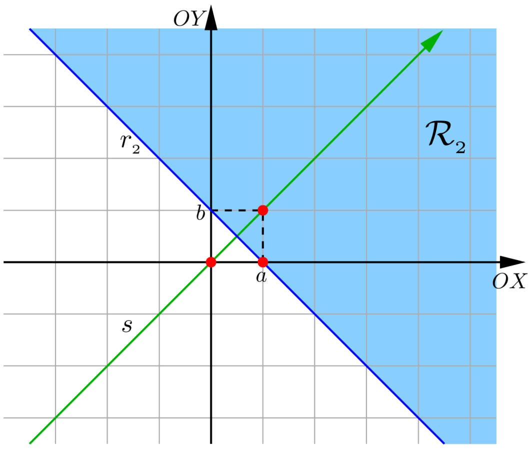

Figura 18: Região $\mathcal{R}_2$. $a = 1 > 0$ e $b = 1 > 0$. O sentido de percurso em s é de x crescente.

(c) Determinando a região $\mathcal{R}$

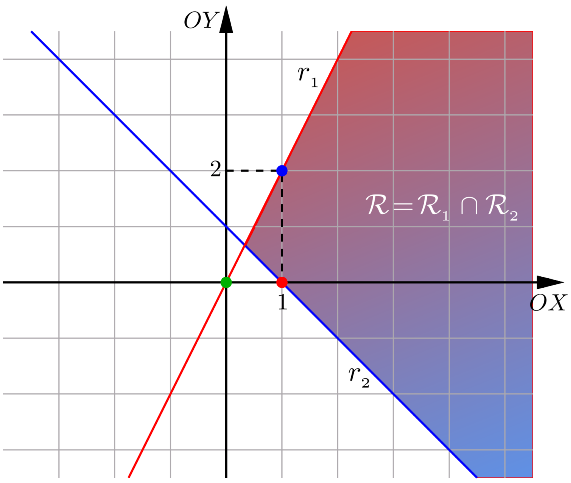

Figura 19: Região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ procurada.

Finalmente, a região $\mathcal{R}$ procurada é a interseção das regiões $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$, formada pelos pontos do plano que pertencem ao semiplano abaixo da reta r_1 e ao semiplano acima da reta r_2, simultaneamente. Esboçamos a região $\mathcal{R}$ na figura 19. $\square$

Exemplo 4

Determinar e esboçar a região $\mathcal{R}$ do plano dada pelo seguinte sistema de desigualdades:

$$\mathcal{R} : \begin{cases} |y| \leq x - 1 \\ x - y > 2\,. \end{cases}$$

Solução.

A região $\mathcal{R}$ é a interseção de duas regiões $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$.

A primeira região consiste dos pontos do plano cujas coordenadas satisfazem a primeira desigualdade:

$$\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \,|\, |y| \leq x - 1\}\,.$$

A segunda região consiste dos pontos do plano cujas coordenadas satisfazem a segunda desigualdade:

$$\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \,|\, x + y > 2\}\,.$$

(a) Determinação da região $\mathcal{R}_1$

Começamos lembrando que $|y| = \begin{cases} y\,, & \text{se } y \geq 0 \\ -y\,, & \text{se } y < 0\,. \end{cases}$

Portanto, a desigualdade $|y| \leq x - 1$ equivale a duas desigualdades condicionadas:

• Na condição $y \geq 0$, temos $|y| = y$.

Logo a desigualdade $|y| \leq x - 1$ equivale a $y \leq x - 1$, ou seja, $x - y \geq 1$.

Designamos por $\mathcal{S}_1$ o conjunto dos pontos do plano cujas coordenadas satisfazem, simultaneamente, as desigualdades $y \geq 0$ e $x - y \geq 1$:

$$\mathcal{S}_1 = \{(x, y) \,|\, y \geq 0 \quad \text{e} \quad x - y \geq 1\}\,, \quad \text{ou seja,} \quad \mathcal{S}_1 : \begin{cases} x - y \geq 1 \\ y \geq 0\,. \end{cases}$$

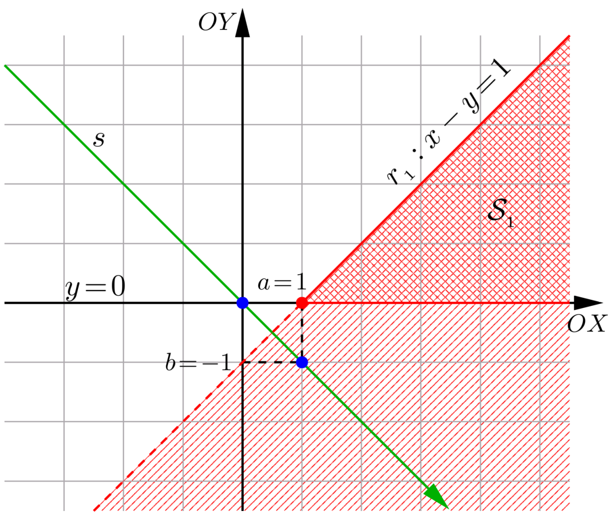

Figura 20: Região $\mathcal{S}_1$ determinada pelas desigualdades $x - y \geq 1$ e $y \geq 0$.

• Na condição $y < 0$, temos $|y| = -y$.

Logo a desigualdade $|y| \leq x - 1$ equivale a $-y \leq x - 1$, ou seja, $x + y \geq 1$. Designamos por $\mathcal{S}_2$ o conjunto dos pontos do plano cujas coordenadas satisfazem, simultaneamente, as desigualdades $y < 0$ e $x + y \geq 1$:

$$\mathcal{S}_2 = \{(x,y) \,|\, y < 0 \quad \text{e} \quad x + y \geq 1\}, \qquad \text{ou seja,} \qquad \mathcal{S}_2 : \begin{cases} x + y \geq 1 \\ y < 0\,. \end{cases}$$

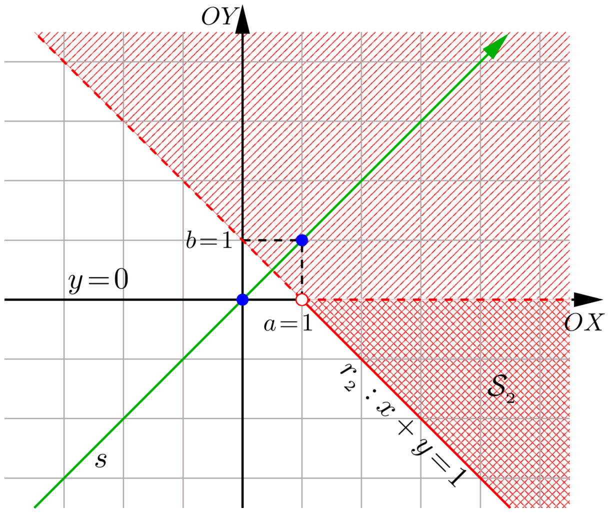

Figura 21: Região $\mathcal{S}_2$ determinada pelas desigualdades $x + y \geq 1$ e $y < 0$.

Finalmente, a região $\mathcal{R}_1$ consiste dos pontos que pertencem à região $\mathcal{S}_1$ ou à região $\mathcal{S}_2$.
Ou seja,

$$\mathcal{R}_1 = \{(x,y) \,|\, |y| \leq x - 1\} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2\,.$$

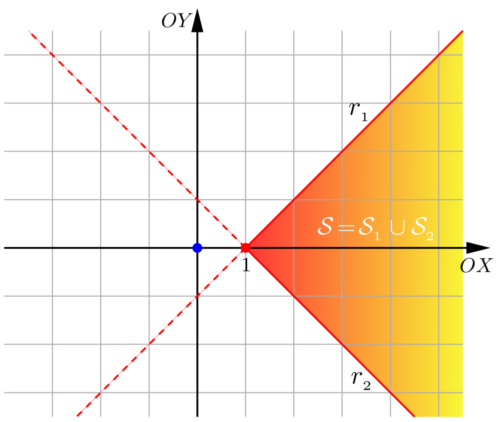

Figura 22: Região $\mathcal{R}_1$ determinada pela desigualdade $|y| \leq x - 1$.

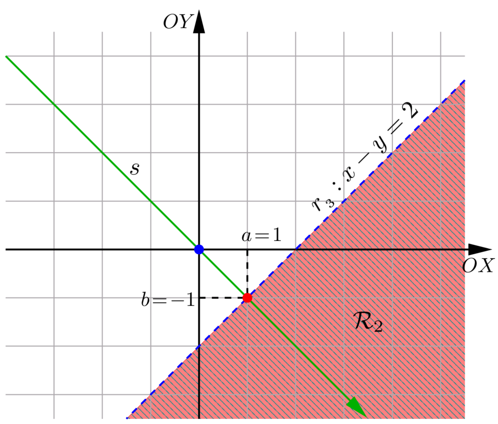

Figura 23: Região $\mathcal{R}_2 = \{(x,y) \,|\, x - y > 2\}$.

(b) Determinação da região $\mathcal{R}_2$

Como a região $\mathcal{R}_2$ consiste dos pontos cujas coordenadas (x, y) satisfazem $x - y > 2$, temos que um ponto de coordenadas (x, y) pertence à região $\mathcal{R}_2$ se, e somente se, pertence a uma reta de equação $x - y = c$ com $c > 2$.
Seja s a reta que passa pela origem e é perpendicular à reta $r_3 : x - y = 2$.
Uma reta de equação $x - y = c$ intersecta a reta s num ponto P_c de modo que o valor de c aumenta conforme o ponto P_c se desloca na reta s seguindo o sentido da origem para o ponto de coordenadas $(a, b) = (1, -1)$, ou seja, o sentido do vetor $\overrightarrow{v} = (a, b)$.
Portanto, a região $\mathcal{R}_2$ procurada consiste dos pontos do semiplano que fica abaixo da reta r_3, excluindo os pontos da própria reta, como vemos na figura 23.

(c) Determinação da região $\mathcal{R}$

Finalmente, um ponto pertence à região $\mathcal{R}$ se, e somente se, pertence às regiões $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ simultaneamente. Isto é, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$. Esboçamos a região na seguinte figura.

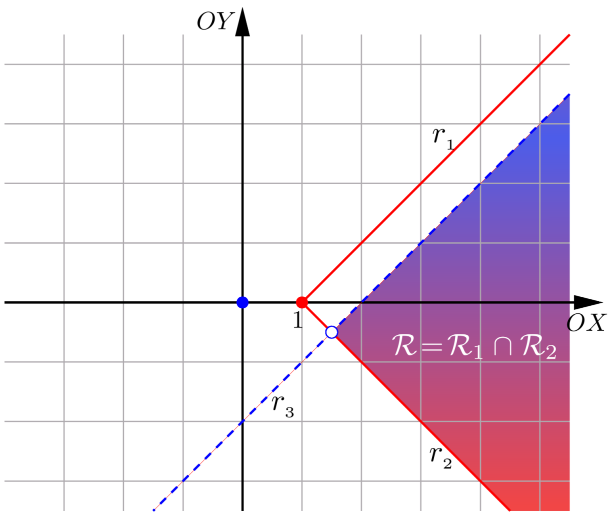

Figura 24: Região $\mathcal{R}$ determinada pelas desigualdades $|y| \le x - 1$ e $x - y = 2$.

□

Exemplo 5

Determine e esboçe a região $\mathcal{R}$ do plano dada pelo seguinte sistema de inequações:

$$\mathcal{R} : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x - y \leq -1 \\ x + y \geq 0. \end{cases}$$

Solução.
A região $\mathcal{R}$ consiste dos pontos do plano cujas coordenadas satisfazem as três inequações do sistema dado simultaneamente.
Logo $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3$, onde

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\} \\ \mathcal{R}_2 &= \{(x,y) \,|\, x - y \leq -1\} \\ \mathcal{R}_3 &= \{(x,y) \,|\, x + y \geq 0\} \end{aligned}$$

(a) Determinação da região $\mathcal{R}_1$

Os pontos do plano cujas coordenadas satisfazem a equação $x^2 + y^2 = c$ formam o círculo de centro na origem e raio $\sqrt{c}$, para $c > 0$. Se $c = 0$, $P = (0,0)$ é o único ponto que satisfaz a equaçao $x^2 + y^2 = 0$.
Assim, um ponto pertence à região $\mathcal{R}_1$ se, e somente se, o ponto é a origem ou pertence a um círculo de raio $\sqrt{c} \leq 1$, estando, portanto, contido no interior do círculo ou sobre o círculo de centro na origem e raio 1 (figura 25).

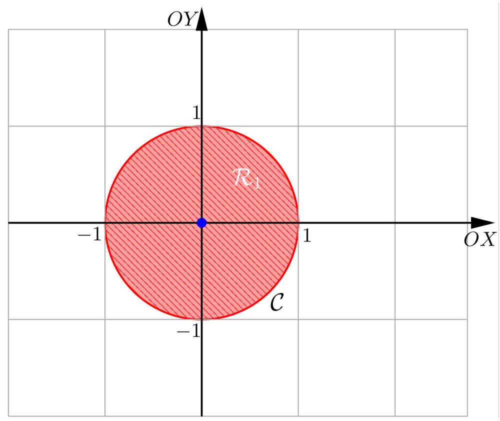

Figura 25: $\mathcal{R}_1$ é o círculo de centro na origem e raio 1.

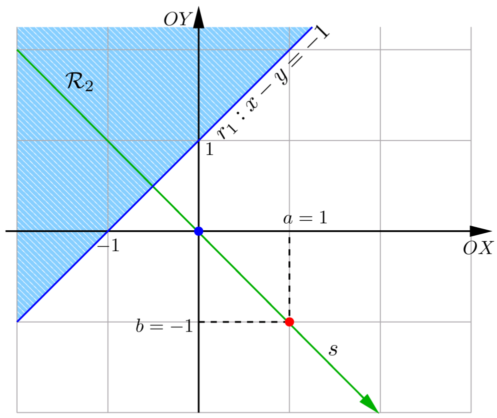

Figura 26: $\mathcal{R}_2$ é o semiplano em cima da reta r_1.

Determinação da região $\mathcal{R}_2$.

Seja $r_1 : x - y = -1$. Como $(a,b) = (1,-1)$, $\mathcal{R}_2$ é o semiplano acima da reta r_1, incluindo a própria reta (figura 26).

Determinação da região $\mathcal{R}_3$.

Raciocinando de maneira similar a outros casos já tratados, vemos que a região $\mathcal{R}_3$ é o semiplano acima da reta $r_2 : x + y = 0$, incluindo a reta r_2, pois $(a, b) = (1, 1)$ (veja a figura 27).

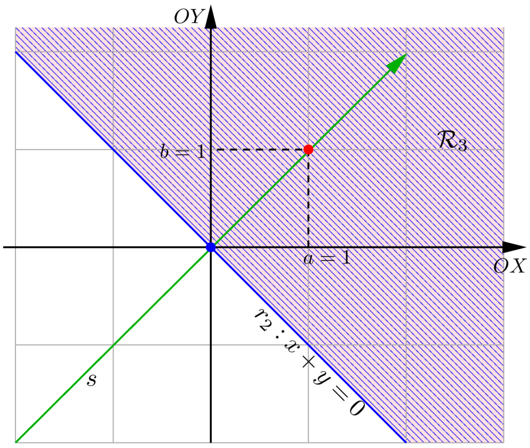

Figura 27: $\mathcal{R}_3$ é o semiplano em cima da reta r_2.

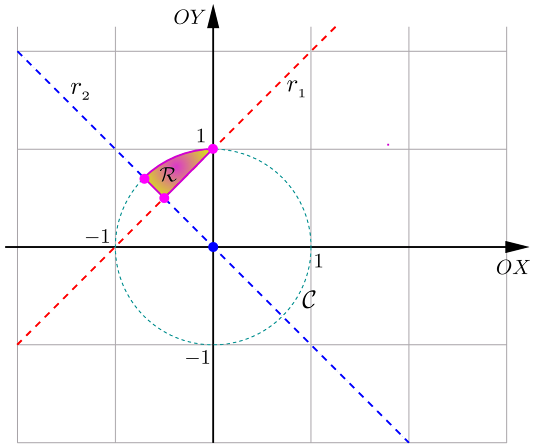

Figura 28: Região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2\mathcal{R}_3$.

Esboço da região $\mathcal{R}$.

Para esboçar a região $\mathcal{R}$ são considerados apenas os pontos do plano que pertencem às três regiões anteriores simultaneamente (figura 28). □

Exemplo 6

Determine e faça um esboço da região $\mathcal{R}$ do plano dada pelo seguinte sistema de inequações:

$$\mathcal{R} : \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \geq 4 \\ x + y \geq 1 \\ x + y \leq 1 + 2\sqrt{2}\,. \end{cases}$$

Solução.

A região $\mathcal{R}$ procurada é a interseção das três regiões seguintes:

$$\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \,|\, (x-1)^2 + y^2 \geq 4\},$$
$$\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \,|\, x + y \geq 1\},$$
$$\mathcal{R}_3 = \{(x, y) \,|\, x + y \leq 1 + 2\sqrt{2}\}\,.$$

Determinação da região $\mathcal{R}_1$

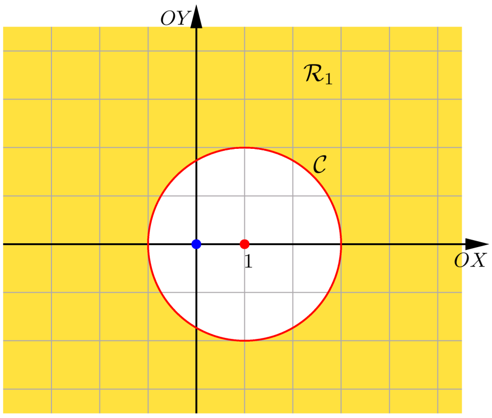

Figura 29: Região $\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \mid (x-1)^2+y^2 \geq 4\}$.

Para determinarmos a região $\mathcal{R}_1$, consideremos o círculo $\mathcal{C}$, dada por

$$\mathcal{C} : (x-1)^2 + y^2 = 4\,.$$

Observamos que $\mathcal{C}_c : (x-1)^2+y^2 = c^2$, $c > 0$ é a equação do círculo de centro no ponto $(1, 0)$ e raio c. Assim, se $c < 2$, os pontos do círculo $\mathcal{C}_c$ estão contidos na região limitada pelo círculo $\mathcal{C}$, e se $c > 2$, os pontos do círculo $\mathcal{C}_c$ são exteriores ao círculo $\mathcal{C}$.

Portanto, a região $\mathcal{R}_1$ consiste dos pontos (x, y) que são exteriores a $\mathcal{C}$, incluindo a próprio círculo.

Determinação das regiões $\mathcal{R}_2$ e $\mathcal{R}_3$

Observe que as retas $r_1 : x + y = 1$ e $r_2 : x + y = 1 + 2\sqrt{2}$ são paralelas.
Como $(a, b) = (1, 1)$, o valor c aumenta na equação $x + y = c$ quando nos movimentamos ao longo da reta perpendicular s a r_1 no sentido da origem para o ponto (a, b). Portanto, a reta r_2, com valor $c = 1 + 2\sqrt{2}$ maior, fica por cima da reta r_1, com valor $c = 1$, e as regiões $\mathcal{R}_2$ e $\mathcal{R}_3$ são as esboçadas nas figuras 30 e 31.

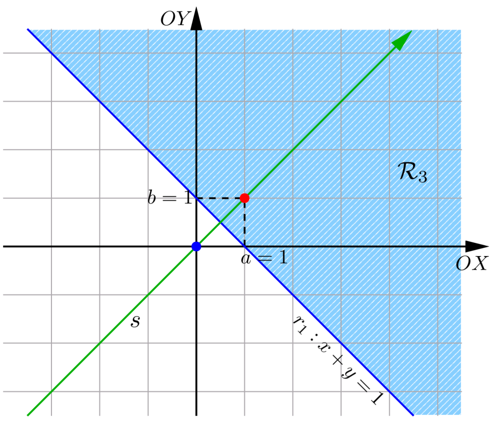

Figura 30: Região $\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \mid x + y \geq 1\}$.

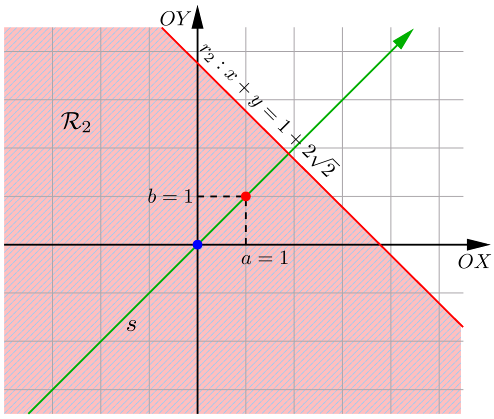

Figura 31: Região $\mathcal{R}_3 = \{(x, y) \mid x+y \leq 1+2\sqrt{2}\}$.

Determinação da região $\mathcal{R}$

Finalmente, a região $\mathcal{R}$ procurada é a interseção das três regiões obtidas anteriormente e cujo esboço apresentamos na figura abaixo.

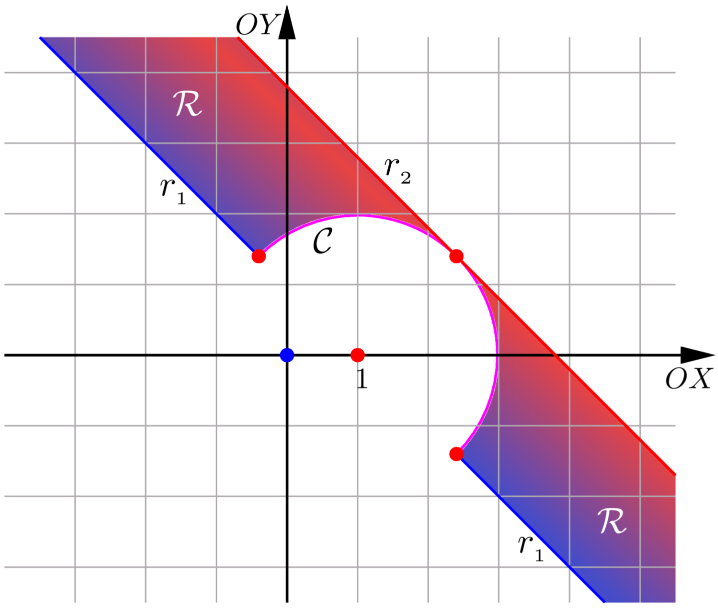

Figura 32: Região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3$.

Observe que $r_2 \cap \mathcal{C} = \{(1+\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$, pois $(x, y) \in r_2 \cap \mathcal{C}$ se, e somente se,

$$\begin{array}{rlcl}
 & x = 1 + 2\sqrt{2} - y & \text{e} & (x-1)^2 + y^2 = 4 \\
\Longleftrightarrow & x = 1 + 2\sqrt{2} - y & \text{e} & (1 + 2\sqrt{2} - y - 1)^2 + y^2 = 4 \\
\Longleftrightarrow & x = 1 + 2\sqrt{2} - y & \text{e} & (2\sqrt{2} - y)^2 + y^2 = 4 \\
\Longleftrightarrow & x = 1 + 2\sqrt{2} - y & \text{e} & y^2 - 4\sqrt{2}y + 8 + y^2 = 4 \\
\Longleftrightarrow & x = 1 + 2\sqrt{2} - y & \text{e} & 2y^2 - 4\sqrt{2}y + 4 = 0 \\
\Longleftrightarrow & x = 1 + 2\sqrt{2} - y & \text{e} & y^2 - 2\sqrt{2}y + 2 = 0 \\
\Longleftrightarrow & x = 1 + 2\sqrt{2} - y & \text{e} & y = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{8-8}}{2} = \sqrt{2} \\
\Longleftrightarrow & x = 1 + 2\sqrt{2} - \sqrt{2} & \text{e} & y = \sqrt{2} \\
\Longleftrightarrow & x = 1 + \sqrt{2} & \text{e} & y = \sqrt{2}
\end{array}$$

$\square$

Capítulo 5

Aplicações: bissetrizes, projeção ortogonal e áreas

Neste capítulo, vamos determinar as bissetrizes de duas retas, a projeção ortogonal de um vetor sobre uma reta e usaremos vetores para determinar a área de triângulos e paralelogramos.

1. Bissetrizes de duas retas concorrentes

Sejam r e r' duas retas concorrentes no plano. Dizemos que uma reta s é **bissetriz** de r e r' quando os ângulos entre r e s e entre r' e s são iguais.

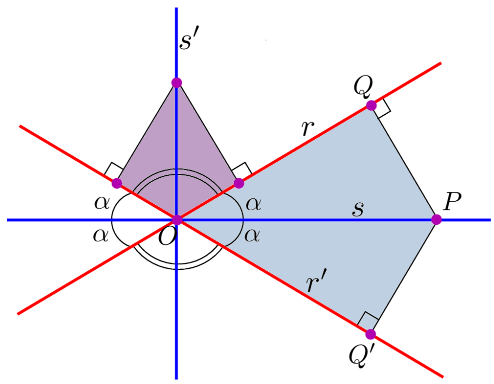

Figura 1: Bissetrizes s e s' das retas r e r'.

Proposição 1

Se s e s' são as bissetrizes das retas concorrentes r e r', então

$$\boxed{s \cup s' = \{P \mid d(P,r) = d(P,r')\}}$$

Prova.

($\Longrightarrow$) Suponhamos que s é uma bissetriz das retas r e r' que se cortam

no ponto O. Seja $P \in s$ um ponto arbitrário. A reta perpendicular a r que passa por P intersecta r no ponto Q e a reta perpendicular a r' que passa por P intersecta r' no ponto Q', como na figura 1.
Consideremos os triângulos retângulos $\triangle PQO$ e $\triangle PQ'O$.

Sendo s bissetriz de r e r', os ângulos $\widehat{POQ}$ e $\widehat{POQ'}$ têm a mesma medida e, como os ângulos $\widehat{PQO}$ e $\widehat{PQ'O}$ são retos, concluímos que os ângulos $\widehat{OPQ}$ e $\widehat{OPQ'}$ têm a mesma medida. Portanto, os triângulos $\triangle PQO$ e $\triangle PQ'O$ são congruentes, pois têm o lado OP em comum.
Em particular, as medidas $d(P, r) = |PQ|$ e $d(P, r') = |PQ'|$ são iguais. Como $P \in s$ foi escolhido arbitrariamente, concluímos que os pontos de s são equidistantes de r e r'.
($\Longleftarrow$) Provaremos agora que se P é um ponto equidistante de r e r', então a reta s que passa pelos pontos O e P é uma bissetriz de r e r'.
Usando ainda a figura 1, a nossa hipótese equivale a $|PQ| = |PQ'|$.
Como os triângulos $\triangle PQO$ e $\triangle PQ'O$ têm o lado OP em comum, obtemos, pelo teorema de Pitágoras, que os lados OQ e OQ' têm a mesma medida e, portanto, os triângulos retângulos $\triangle PQO$ e $\triangle PQ'O$ são congruentes.

Logo os ângulos $\widehat{QOP}$ e $\widehat{Q'OP}$ têm a mesma medida. Isto é, a reta s é uma bissetriz de r e r'. ■

Pela proposição anterior, as bissetrizes s e s' de duas retas concorrentes

$$r : ax + by = c \qquad \text{e} \qquad r' : a'x + b'y = c'$$

são caracterizadas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in s \cup s' &\iff d(P, r) = d(P, r') \\ &\iff \frac{|ax + by - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a'x + b'y - c'|}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}}. \end{aligned}$$

Ou seja:

$$\boxed{P = (x, y) \in s \cup s' \iff \frac{ax + by - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm \frac{a'x + b'y - c'}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}}.}$$

Tomando nesta identidade o sinal positivo, obtemos a equação de uma das bissetrizes e, tomando o sinal negativo, obtemos a equação da outra bissetriz.

Exemplo 1

Determinar as bissetrizes das retas $r : 2x + y = 1$ e $r' : 3x + 2y = 2$.

Solução.

Sejam s e s' as bissetrizes de r e r'. Então:

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in s \cup s' &\iff \frac{2x + y - 1}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \pm \frac{3x + 2y - 2}{\sqrt{3^2 + 2^2}} \\ &\iff \frac{2x + y - 1}{\sqrt{5}} = \pm \frac{3x + 2y - 2}{\sqrt{13}} \\ &\iff 2x + y - 1 = \pm \sqrt{\frac{5}{13}}\,(3x + 2y - 2)\,. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{cases} s : 2x + y - 1 = \sqrt{\dfrac{5}{13}}\,(3x + 2y - 2) \\[2ex] s' : 2x + y - 1 = -\sqrt{\dfrac{5}{13}}\,(3x + 2y - 2)\,, \end{cases}$$

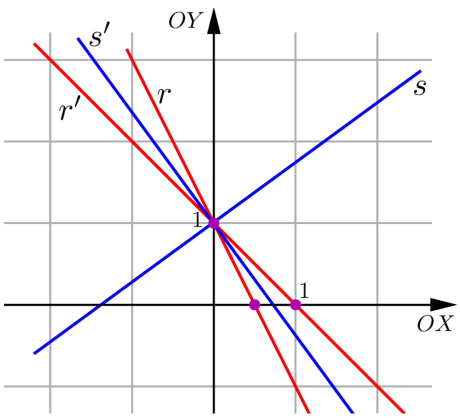

Figura 2: Exemplo 1.

ou seja,

$$\begin{cases} s : \left(2 - 3\sqrt{\dfrac{5}{13}}\right) x + \left(1 - 2\sqrt{\dfrac{5}{13}}\right) y = 1 - 2\sqrt{\dfrac{5}{13}} \\[2ex] s' : \left(2 + 3\sqrt{\dfrac{5}{13}}\right) x + \left(1 + 2\sqrt{\dfrac{5}{13}}\right) y = 1 + 2\sqrt{\dfrac{5}{13}} \end{cases}$$

são as equações das bissetrizes procuradas. □

Bissetriz de um ângulo

Sejam O, P e Q pontos não colineares do plano. Vejamos como usar a linguagem vetorial para determinar a bissetriz do ângulo $\widehat{POQ}$.

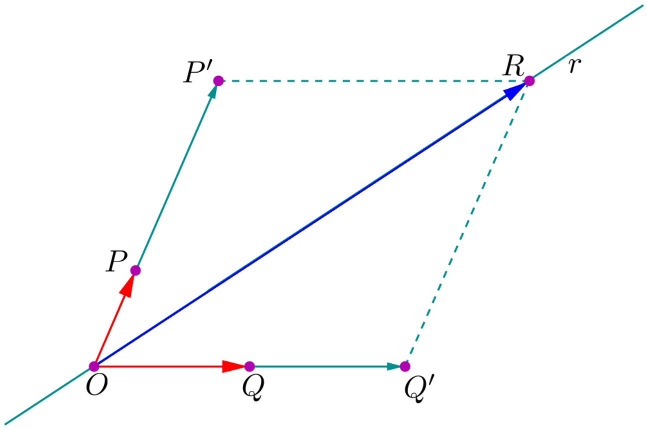

Figura 3: Bissectando o ângulo $\widehat{POQ}$.

Sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ}$.

Começamos observando que $\|\overrightarrow{u}\| \cdot \overrightarrow{v}$ e $\|\overrightarrow{v}\| \cdot \overrightarrow{u}$ são múltiplos positivos de $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u}$, respectivamente, que têm a mesma norma:

$$\| \|\overrightarrow{u}\| \cdot \overrightarrow{v} \| = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{v}\| \cdot \|\overrightarrow{u}\| = \| \|\overrightarrow{v}\| \cdot \overrightarrow{u} \| \,.$$

Sejam P', Q' e R pontos do plano tais que:

$$\|\overrightarrow{v}\|\,\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP'}\,, \quad \|\overrightarrow{u}\|\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ'} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OR}\,.$$

Como os segmentos OP' e OQ' são congruentes, o paralelogramo $OP'RQ'$ é um losango. Assim, o segmento OR, que é uma diagonal do losango $OP'RQ'$, bissecta o ângulo $\widehat{P'OQ'} = \widehat{POQ}$.

Logo a semirreta $\{O + t\overrightarrow{OR}\,, t \geq 0\}$ é a bissetriz do ângulo $\widehat{POQ}$.

Exemplo 2

Determine a equação cartesiana da reta r que contém a bissetriz do ângulo $\widehat{POQ}$, onde $P = (1, 1)$, $O = (1, -1)$ e $Q = (2, 1)$.

Solução.

Sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP} = (0, 2)$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ} = (1, 2)$.

Temos $\|\overrightarrow{u}\| = 2$ e $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{5}$. Pelo visto acima, o vetor

$$\begin{aligned} \overrightarrow{w'} &= \|\overrightarrow{v}\|\,\overrightarrow{u} + \|\overrightarrow{u}\|\,\overrightarrow{v} = \sqrt{5}(0,2) + 2(1,2) \\ &= \left(2, 2\left(2+\sqrt{5}\right)\right) = 2\left(1, 2+\sqrt{5}\right) \end{aligned}$$

é paralelo à reta r. Portanto, o vetor $\overrightarrow{w} = \left(2+\sqrt{5}, -1\right)$ é um vetor normal a r e a equação de r é da forma $\left(2+\sqrt{5}\right)x - y = c$.

Como $O = (1,-1) \in r$, temos:

$$\begin{aligned} c &= \left(2+\sqrt{5}\right) \times 1 - (-1) \\ &= 3 + \sqrt{5}\,, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$r : \left(2+\sqrt{5}\right)x - y = 3 + \sqrt{5}\,,$$

é a equação procurada. □

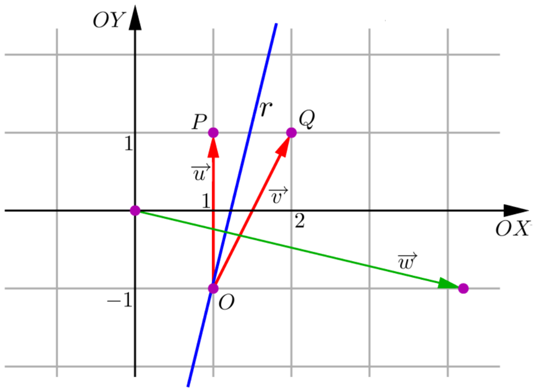

Figura 4: Reta r bissectando o ângulo $\widehat{POQ}$.

2. Projeção ortogonal de um vetor sobre uma reta

Definição 1

A **projeção ortogonal** do vetor $\overrightarrow{w}$ sobre a reta r é o vetor $\overrightarrow{w'} = \text{Proj}_r(\overrightarrow{w})$ paralelo a r tal que $\overrightarrow{w} - \overrightarrow{w'}$ é perpendicular a r.

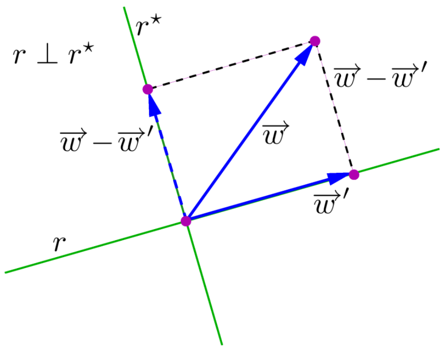

Figura 5: Projetando $\vec{w}$ sobre a reta r.

Seja $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ um vetor paralelo à reta r. Então $\overrightarrow{w'}$ é múltiplo de $\overrightarrow{u}$, isto é, $\overrightarrow{w'} = \lambda\overrightarrow{u}$, para algum número $\lambda \in \mathbb{R}$. Além disso, como $\overrightarrow{w} - \overrightarrow{w'} \perp \overrightarrow{u}$, temos:

$$\begin{aligned}
& \langle \overrightarrow{w} - \overrightarrow{w'}, \overrightarrow{u} \rangle = 0 \iff \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle - \langle \overrightarrow{w'}, \overrightarrow{u} \rangle = 0 \\
\iff & \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle = \langle \overrightarrow{w'}, \overrightarrow{u} \rangle \iff \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle = \langle \lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle \\
\iff & \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle = \lambda\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle \iff \lambda = \frac{\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle}{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle} \\
\iff & \lambda = \frac{\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\|^2}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\boxed{\text{Proj}_r(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w}' = \frac{\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\overrightarrow{u}}$

Observação 1

Note que a projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{w}$ sobre a reta r depende apenas da direção da reta. Como a direção da reta é dada por qualquer vetor $\overrightarrow{u}$ paralelo a ela, definimos a projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{w}$ sobre o vetor $\overrightarrow{u}$ como sendo a projeção de $\overrightarrow{w}$ sobre qualquer reta r paralela a $\overrightarrow{u}$, ou seja,

$$\boxed{\text{Proj}_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{w}) = \text{Proj}_r(\overrightarrow{w}) = \frac{\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\overrightarrow{u}}$$

Exemplo 3

Sejam $A = (1, 1)$, $B = (2, 3)$, $C = (-4, 1)$ e $D = (-2, 1)$ pontos do plano. Determine a projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{CD}$ sobre a reta r que passa pelos pontos A e B.

Solução.

Sejam os vetores $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{CD} = (2, 0)$ e $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (1, 2)$.
Então, como $\|\overrightarrow{u}\|^2 = 1^2 + 2^2 = 5$:

$$\begin{aligned}
\text{Proj}_r(\overrightarrow{w}) &= \frac{\langle \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB} \rangle}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}\overrightarrow{AB} = \frac{\langle (2,0), (1,2) \rangle}{5}(1, 2) \\
&= \frac{2 \times 1 + 0 \times 2}{5}(1, 2) = \frac{2}{5}(1, 2) = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right).
\end{aligned}$$

□

Exemplo 4

Determine os valores $m \in \mathbb{R}$ de modo que a projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{w} = (m+1, m-1)$ sobre o vetor $\overrightarrow{u} = (m, 1-m)$ seja um vetor unitário.

Solução.
Temos

$$\|\text{Proj}_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{w})\| = \left\| \frac{\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \overrightarrow{u} \right\| = \frac{|\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle|}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \|\overrightarrow{u}\| = \frac{|\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle|}{\|\overrightarrow{u}\|},$$

onde,

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle &= \langle (m+1, m-1), (m, 1-m) \rangle = (m+1)m + (m-1)(1-m) \\ &= m^2 + m - (m-1)^2 = m^2 + m - m^2 + 2m - 1 \\ &= 3m - 1\,, \end{aligned}$$

e

$$\|\overrightarrow{u}\| = \|(m, 1-m)\| = \sqrt{m^2 + (1-m)^2} = \sqrt{2m^2 - 2m + 1}.$$

Logo:

$$\begin{aligned} \frac{|\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle|}{\|\overrightarrow{u}\|} = 1 &\iff \frac{|3m-1|}{\sqrt{2m^2 - 2m + 1}} = 1 \\ &\iff \frac{(3m-1)^2}{2m^2 - 2m + 1} = 1 \\ &\iff 9m^2 - 6m + 1 = 2m^2 - 2m + 1 \\ &\iff 7m^2 - 4m = 0 \\ &\iff m(7m - 4) = 0 \\ &\iff m = 0 \text{ ou } m = \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

são os valores procurados. □

Exemplo 5

Determine o segmento AB obtido projetando-se ortogonalmente o segmento CD sobre a reta $r : x + 2y = 2$, onde $C = (1, 1)$ e $D = (3, 2)$.

Solução.
Vamos resolver esse exemplo de duas maneiras.

• Seja $\overrightarrow{w'}$ a projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{CD} = (2,1)$ sobre a reta r. Então,

$$\overrightarrow{w'} = \frac{<\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}>}{||\overrightarrow{u}||^2}\overrightarrow{u},$$

onde $\overrightarrow{u} = (2,-1)$ é um vetor paralelo à reta r, pois $(1,2) \perp r$.
Logo,

$$\overrightarrow{w'} = \frac{<(2,1),(2,-1)>}{5}(2,-1) = \frac{3}{5}(2,-1) = \left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right),$$

ou seja,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{w'} = \left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right).$$

Vamos obter o ponto A fazendo a interseção da reta r com a reta s_1 perpendicular à reta que passa por C.
Como $(1,2) \perp r$ e $s_1 \perp r$, temos que $(1,2) \parallel s_1$. Logo $(2,-1) \perp s_1$. Portanto,

$$s_1 : 2x - y = c_1,$$

onde $c_1 = 2 \times 1 - 1 = 1$, pois $C \in s_1$.
Assim, $A = (x,y)$, onde (x,y) é a solução do sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - 4y = -4 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Longrightarrow -5y = -3 \Longrightarrow y = \frac{3}{5}$$

$$\Longrightarrow \quad x = 2 - 2y = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5}.$$

Sendo $A = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ e $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$, obtemos que:

$$B = A + \overrightarrow{AB} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right) = (2,0).$$

• Outra maneira de resolver o exercício, é obter o ponto B da mesma maneira que encontramos o ponto A. Ou seja, o ponto B é a interseção da reta r com a reta s_2 perpendicular a r que passa pelo ponto D.
Como $s_2 \parallel s_1$, pois $s_2 \perp r$ e $s_1 \perp r$, temos que:

$$s_2 : 2x - y = c_2,$$

onde $c_2 = 2 \times 3 - 2 = 4$, uma vez que $D = (3, 2) \in s_2$.
Logo $B = (x, y)$ é a solução do sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \implies 5x = 10 \implies x = 2$$

$$\implies \quad y = 2x - 4 \quad \implies y = 2 \times 2 - 4 = 0.$$

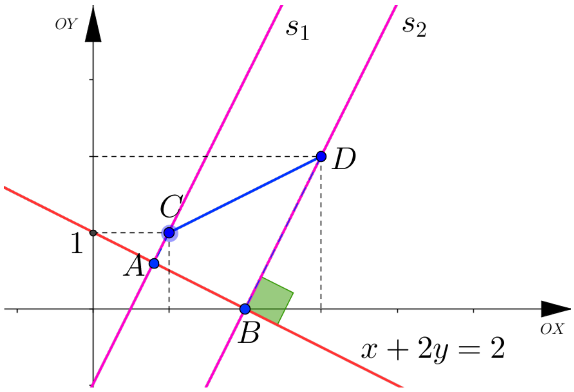

Figura 6: Exemplo 5.

□

3. Área de paralelogramos e triângulos

Seja $ABDC$ um paralelogramo. Consideremos os vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB}$.

Seja $\theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$. Tomando $\|\overrightarrow{u}\|$ como medida da base, temos que a área $\mathcal{A}$ do paralelogramo $ABDC$ é dada por:

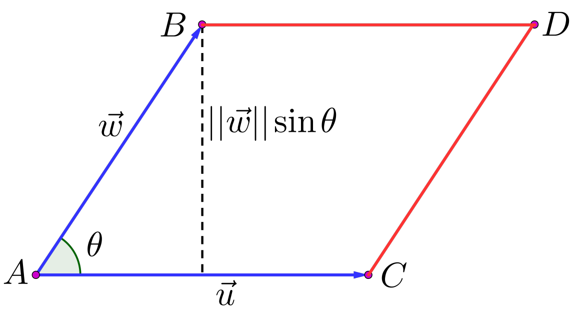

Figura 7: Cálculo da área do paralelogramo $ABDC$.

$$\mathcal{A} = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{w}\| \operatorname{sen}\theta.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}^2 &= \left(\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{w}\|\operatorname{sen}\theta\right)^2 \\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2\,\|\overrightarrow{w}\|^2\operatorname{sen}^2\theta \\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2\,\|\overrightarrow{w}\|^2(1-\cos^2\theta) \\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2\,\|\overrightarrow{w}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2\,\|\overrightarrow{w}\|^2\cos^2\theta \\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2\,\|\overrightarrow{w}\|^2 - \left(\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{w}\|\cos\theta\right)^2 \\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2\,\|\overrightarrow{w}\|^2 - \langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}\rangle^2 .
\end{aligned}
$$

Observe também que:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}^2 &= \|\overrightarrow{u}\|^2\,\|\overrightarrow{w}\|^2 - \langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}\rangle^2 = \begin{vmatrix} \|\overrightarrow{u}\|^2 & \langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}\rangle \\ \langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}\rangle & \|\overrightarrow{w}\|^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}\rangle & \langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}\rangle \\ \langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}\rangle & \langle\overrightarrow{w},\overrightarrow{w}\rangle \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Consideremos agora os vetores $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta)$ e $\overrightarrow{w} = (\alpha', \beta')$ e determinemos a expressão da área em termos destas coordenadas.

Sendo $\|\overrightarrow{u}\|^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $\|\overrightarrow{w}\|^2 = (\alpha')^2 + (\beta')^2$ e $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}\rangle = \alpha\alpha' + \beta\beta'$, temos:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}^2 &= (\alpha^2+\beta^2)((\alpha')^2+(\beta')^2) - (\alpha\alpha'+\beta\beta')^2 \\
&= \alpha^2(\alpha')^2 + \alpha^2(\beta')^2 + \beta^2(\alpha')^2 + \beta^2(\beta')^2 - \alpha^2(\alpha')^2 - 2\alpha\alpha'\beta\beta' - \beta^2(\beta')^2 \\
&= \alpha^2(\beta')^2 + \beta^2(\alpha')^2 - 2\alpha\alpha'\beta\beta' \\
&= (\alpha\beta')^2 - 2(\alpha\beta')(\beta\alpha') + (\beta\alpha')^2 \\
&= (\alpha\beta'-\beta\alpha')^2 = \left[\det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix}\right]^2
\end{aligned}
$$

Portanto, a área $\mathcal{A}$ do paralelogramo de lados adjacentes $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta)$ e $\overrightarrow{w} = (\alpha', \beta')$ é o módulo do determinante da matriz cujas linhas são as coordenadas de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$, respectivamente:

$$
\boxed{\mathcal{A} = \left|\det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix}\right|}
$$

Você pode verificar que $\mathcal{A}$ é também o módulo do determinante da matriz cujas colunas são as coordenadas de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$:

$$\boxed{\mathcal{A} = \left|\det\begin{pmatrix}\alpha & \alpha' \\ \beta & \beta'\end{pmatrix}\right|}$$

Exemplo 6

Determine a área do paralelogramo $ABDC$, onde $A = (1,2)$, $B = (3,1)$, $C = (4,1)$ e $D = (-2,3)$.

Solução.

Como $\overrightarrow{AB} = (2,-1)$ e $\overrightarrow{AC} = (3,-1)$, a área $\mathcal{A}$ do paralelogramo $ABDC$ é:

$$\mathcal{A} = \left|\det\begin{pmatrix}2 & -1 \\ 3 & -1\end{pmatrix}\right| = |-2+3| = 1\,. \quad \square$$

Área de um triângulo

Consideremos agora um triângulo $\triangle ABC$ de vértices A, B e C e seja $\mathcal{T}$ a sua área.

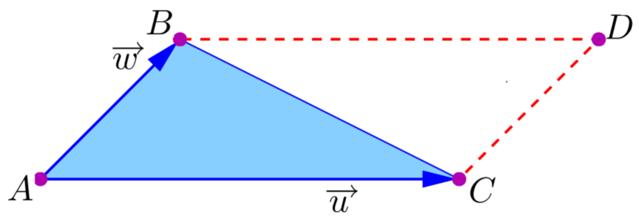

Figura 8: Triângulo $\triangle ABC$.

Observamos que, para calcular a área de um paralelogramo, foi necessário o conhecimento de dois lados adjacentes (não paralelos). Assim, considerando o paralelogramo $ABDC$, de lados adjacentes AB e AC e área $\mathcal{A}$, temos:

$$\boxed{\mathcal{T} = \frac{1}{2}\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC}\end{pmatrix}\right|}$$

onde $\begin{pmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \end{pmatrix}$ representa a matriz cujas linhas são as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Exemplo 7

Determine a área $\mathcal{T}$ do triângulo de vértices $A = (4,2)$, $B = (6,1)$ e $C = (3,2)$.

Solução.

Temos que $\overrightarrow{AB} = (2,-1)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1,0)$. Logo,

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-1| = \frac{1}{2},$$

é a área procurada.□

Exemplo 8

Sejam $A = (1,2)$, $B = (3, n+2)$ e $C = (n-1, 1)$. Determine os valores de n de modo que o triângulo $\triangle ABC$ tenha área $\mathcal{T}$ igual a $\frac{1}{2}$.

Solução.

Temos que $\overrightarrow{AB} = (2, n)$ e $\overrightarrow{AC} = (n-2, -1)$. Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 2 & n \\ n-2 & -1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\,|-2-n(n-2)| \\ &= \frac{1}{2}\,|-2-n^2+2n| = \frac{1}{2}\,|n^2-2n+2| \end{aligned}.$$

Assim, $\mathcal{T} = \frac{1}{2} \iff |n^2-2n+2| = 1 \iff n^2-2n+2 = \pm 1$.

• Tomando o sinal positivo, obtemos a equação

$$n^2 - 2n + 2 = 1 \iff n^2 - 2n + 1 = 0 \iff (n-1)^2 = 0.$$

Isto é, $n = 1$ é uma solução.

• Considerando o sinal negativo, obtemos a equação $n^2 - 2n + 3 = 0$ que, por ter discriminante $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(3) < 0$, não possui raízes reais.

Portanto, $n = 1$ é a única solução ao problema proposto.□

Capítulo 6

Exemplos de revisão

Exemplo 1

Dado o ponto $A = (0, 3)$ e as retas $r : x + y = -1$ e $s : x - 2y = -5$, encontre:

(a) *As coordenadas dos pontos $C \in s$ cuja distância a r é $\sqrt{2}$.*

(b) *Ache as coordenadas do ponto A' simétrico de A em relação à reta r.*

Solução.

(a) Da equação da reta s, vemos que um ponto C pertence à reta s, se e somente se, $C = (2y - 5, y)$ para algum $y \in \mathbb{R}$.

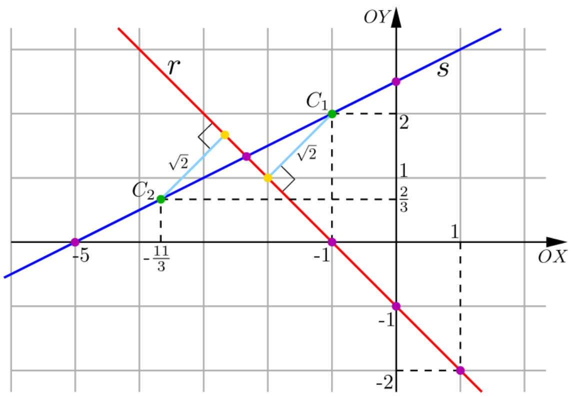

Figura 1: Retas r e s e pontos C_1 e C_2.

Então,

$$d(C,r)=\sqrt{2} \iff \frac{|(2y-5)+y+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \iff$$

$$|3y-4|=2 \iff \begin{cases} 3y-4=2 \\ \text{ou} \\ 3y-4=-2 \end{cases} \iff \begin{cases} y=2 \\ \text{ou} \\ y=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Para $y_1=2$, $x_1=2y_1-5=2(2)-5=-1$ e $C_1=(-1,2)$.

Para $y_2=\dfrac{2}{3}$, $x_2=2y_2-5=2\cdot\dfrac{2}{3}-5=\dfrac{4}{3}-5=-\dfrac{11}{3}$ e $C_2=\left(-\dfrac{11}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.

(b) Seja ℓ a reta perpendicular a r que passa por A. O ponto A' **simétrico** de A em relação a r é o ponto da reta ℓ, distinto de A, tal que

$$d(A',r)=d(A,r).$$

Como $(1,1)\perp r$, temos $(1,1)\parallel \ell$. Logo $(-1,1)\perp \ell$ e a equação de ℓ é da forma $\ell: -x+y=c$, onde c se determina sabendo que $A=(0,3)\in\ell$:

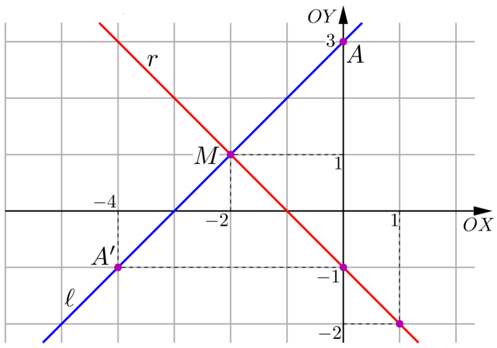

Figura 2: Ponto A' simétrico de A em relação a r.

$$-0+3=c \Longrightarrow c=3 \Longrightarrow \ell: -x+y=3.$$

Seja M o ponto da interseção das retas ℓ e r. Para determinar M, devemos resolver o sistema formado pelas equações de ℓ e r:

$$\ell\cap r: \begin{cases} -x+y=3 \\ x+y=-1 \end{cases}.$$

Somando as equações, obtemos $2y=2$, ou seja, $y=1$ e, substituindo este valor na segunda equação, obtemos $x=-2$. Portanto, $M=(-2,1)$.

Como M é o ponto médio do segmento AA', temos:

$$M=\frac{1}{2}(A+A')$$

$$\Longrightarrow A'=2M-A=2(-2,1)-(0,3)=(-4,2)-(0,3)=(-4,-1).$$

□

Exemplo 2

Faça um esboço detalhado da região $\mathcal{R}$ do plano dada pelo sistema de ine-

quações:

$$\mathcal{R}: \begin{cases} x \leq y+1 \\ x \geq -y \\ x^2+y^2 > \frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Solução.

A região $\mathcal{R}$ é a interseção das regiões:

$$\mathcal{R}_1 : x \leq y+1\,, \qquad \mathcal{R}_2 : x \geq -y \qquad \text{e} \qquad \mathcal{R}_3 : x^2+y^2 > \frac{1}{2}\,.$$

Determinando a região $\mathcal{R}_1$

A região $\mathcal{R}_1$ consiste dos pontos (x, y) tais que $x \leq y+1$, ou seja, $x - y \leq 1$. Consideremos a reta $r_1 : x - y = 1$ e seu vetor normal $(a, b) = (1, -1)$, que aponta no sentido para o qual o parâmetro c na equação $x - y = c$ aumenta. Assim, a região $\mathcal{R}_1$ é o semiplano da figura 3.

Determinando a região $\mathcal{R}_2$

A região $\mathcal{R}_2$ é formada pelos pontos (x, y) tais que $x \geq -y$, ou seja, $x+y \geq 0$. Considerando agora a reta $r_2 : x + y = 0$, seu vetor normal $(a, b) = (1, 1)$ aponta no sentido para o qual o parâmetro c na equação $x + y = c$ aumenta. A região $\mathcal{R}_2$ é o semiplano indicado na figura 4.

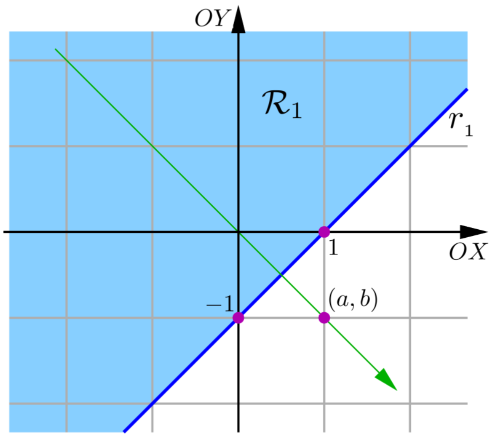

Figura 3: Região $\mathcal{R}_1$.

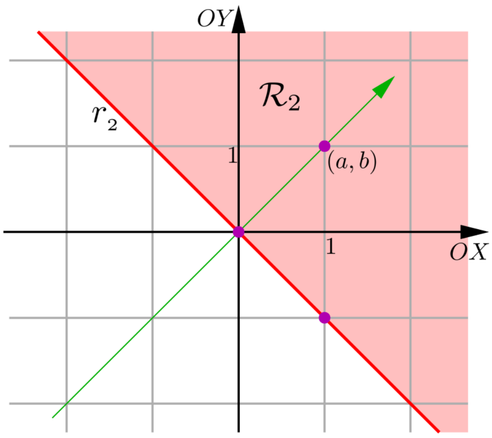

Figura 4: Região $\mathcal{R}_2$.

Determinando a região $\mathcal{R}_3$

A equação $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ representa o círculo de centro na origem e raio $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Para um ponto (x, y) pertencer à região $\mathcal{R}_3$, o quadrado da sua distância à origem deve ser maior que $\dfrac{1}{2}$, ou seja, o ponto deve estar na região exterior ao círculo $\mathcal{C}$, como mostramos na figura 5.

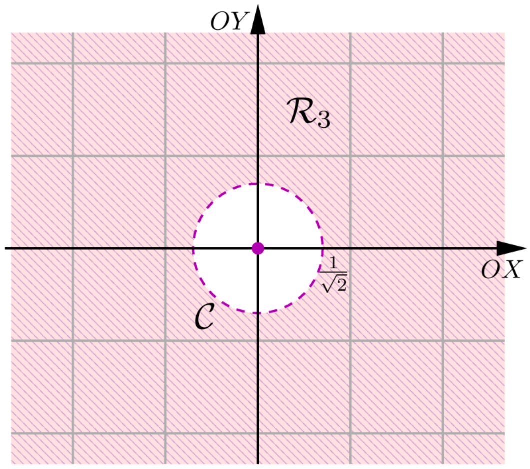

Figura 5: Região $\mathcal{R}_3$.

Para esboçarmos corretamente a região $\mathcal{R}$, devemos determinar a interseção de r_1 com r_2:

$$r_1 \cap r_2 : \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Longrightarrow 2x = 1 \Longrightarrow x = \frac{1}{2} \Longrightarrow y = -\frac{1}{2}\,.$$

Assim, as retas se intersectam no ponto de $A = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$. Este ponto pertence à circunferência $\mathcal{C}$, pois $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Além disso, $\{A\} = r_1 \cap \mathcal{C}$, pois:

$$\begin{array}{rlll}
P = (x, y) \in r_1 \cap \mathcal{C} & \Longleftrightarrow & x = y + 1 & \text{e} \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \\
& \Longleftrightarrow & x = y + 1 & \text{e} \quad (y+1)^2 + y^2 = \frac{1}{2} \\
& \Longleftrightarrow & x = y + 1 & \text{e} \quad 2y^2 + 2y + \frac{1}{2} = 0 \\
& \Longleftrightarrow & x = y + 1 & \text{e} \quad 4y^2 + 4y + 1 = 0 \\
& \Longleftrightarrow & x = y + 1 & \text{e} \quad y = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} \\
& \Longleftrightarrow & x = y + 1 & \text{e} \quad y = -\dfrac{1}{2} \\
& \Longleftrightarrow & x = -\dfrac{1}{2} + 1 & \text{e} \quad y = -\dfrac{1}{2} \\
& \Longleftrightarrow & x = -\dfrac{1}{2} & \text{e} \quad y = -\dfrac{1}{2}
\end{array}$$

Na figura 6, mostramos a região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3$.

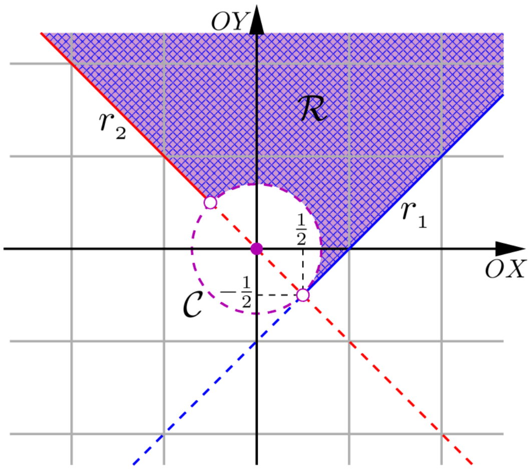

Figura 6: Região $\mathcal{R}$, exemplo 2.

□

Exemplo 3

Determine os pontos C e B de modo que a projeção ortogonal do segmento AB sobre a reta $r : x + 3y = 6$ seja o segmento CD, onde $A = (1, 1)$, $D = (3, 1)$ e AB é um segmento contido numa reta paralela ao vetor $(2, 1)$.

Solução.
Primeiro vamos determinar a reta ℓ que contém os pontos A e B.
Como $\overrightarrow{AB}$ é paralelo ao vetor $(2, 1)$, temos $\overrightarrow{AB} \perp (-1, 2)$ e, portanto, $\ell : -x + 2y = c$. Determinamos c sabendo que $A \in \ell$: $c = -1 + 2(1) = 1$.
Logo $\ell : -x + 2y = 1$.
Seja agora r_1 a reta perpendicular a r que passa por $D = (3, 1)$.
Como $(1, 3) \perp r$, temos $(1, 3) \parallel r_1$. Logo $(-3, 1) \perp r_1$ e, portanto, a equação de r_1 tem a forma: $r_1 : -3x + y = c$. Como $D = (3, 1) \in r_1$, $c = -3(3) + 1 = -8$.
Assim, $r_1 : -3x + y = -8$.
Para determinarmos o ponto B ($r_1 \cap \ell = \{B\}$), devemos resolver o sistema formado pelas equações de r_1 e ℓ:

$$\begin{cases} -3x + y = -8 \\ -x + 2y = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -3x + y = -8 \\ 3x - 6y = -3 \end{cases} \Longrightarrow -5y = -11 \Longrightarrow y = \frac{11}{5}.$$

$$\Longrightarrow x = 2y - 1 = \frac{22}{5} - 1 = \frac{17}{5}$$

Logo $B = \left(\frac{17}{5}, \frac{11}{5}\right)$.

O ponto C procurado, além de pertencer à reta r, deve pertencer à reta r_2 perpendicular a r que passa por A.

Sendo $r_1 \parallel r_2$, a equação de r_2 deve ser da forma $r_2 : -3x + y = c$, onde c é calculado sabendo que $A = (1, 1) \in r_2$: $c = -3(1) + 1 = -2$.

Portanto, $r_2 : -3x + y = -2$.

Temos então $\{C\} = r_2 \cap r$:

$$\begin{cases} -3x + y = -2 \\ x + 3y = 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -3x + y = -2 \\ 3x + 9y = 18 \end{cases} \Longrightarrow 10y = 16 \Longrightarrow y = \frac{8}{5}.$$

$$\Longrightarrow x = 6 - 3y = 6 - \frac{24}{5} = \frac{6}{5}$$

Assim, $C = \left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$ é o outro ponto procurado.

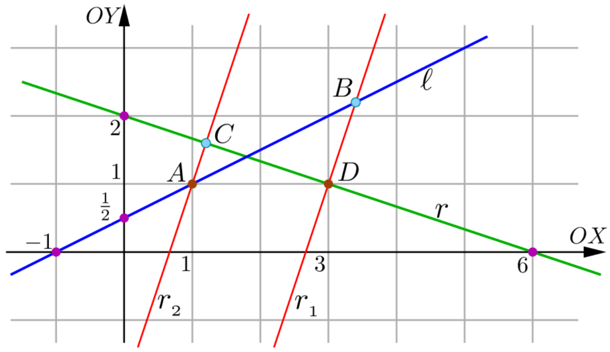

Figura 7: Segmento CD obtido projetando o segmento AB sobre a reta r.

□

Exemplo 4

Seja $\mathcal{P}$ o paralelogramo $ABDC$ cujas diagonais estão sobre as retas

$$r_1 : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t + 1 \end{cases} ; \; t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad r_2 : \begin{cases} x = -2s + 1 \\ y = s + 2 \end{cases} ; \; s \in \mathbb{R}$$

Sabendo que $A = (1,1)$ e que $AB \subset r$, onde r é uma reta paralela ao vetor $(2,1)$, determine os vértices B, C e D de $\mathcal{P}$.

Solução.
Sabemos que num paralelogramo as diagonais cortam-se num ponto M, que é ponto médio de ambas. Em nosso caso, $\{M\} = r_1 \cap r_2$:

$$r_1 \cap r_2 : \begin{cases} t+1 = -2s+1 \\ -t+1 = s+2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t+2s = 0 \\ -t-s = 1 \end{cases} \Longrightarrow s = 1.$$

Logo $M = (-2 \times 1 + 1, 1+2) = (-1,3)$ é o ponto médio das diagonais AD e BC. Em particular,

$$M = \frac{A+D}{2} \Longrightarrow 2M = A + D \Longrightarrow D = 2M - A = (-2,6) - (1,1) = (-3,5)\,.$$

Como A e D pertencem à reta r_1 ($t = 0$ e $t = -4$, respectivamente), os pontos B e C pertencem à reta r_2.

Além disso, $\{B\} = r \cap r_2$.
Determinemos a reta r.
Sabemos que a reta r passa por A e é paralela ao vetor $(2,1)$. Logo $(-1,2) \perp r$ e, portanto, $r : -x + 2y = c$.
Como $A = (1,1) \in r$, obtemos $c = -1 + 2(1) = 1$.
Assim, $r : -x + 2y = 1$.
Determinemos agora o vértice B.

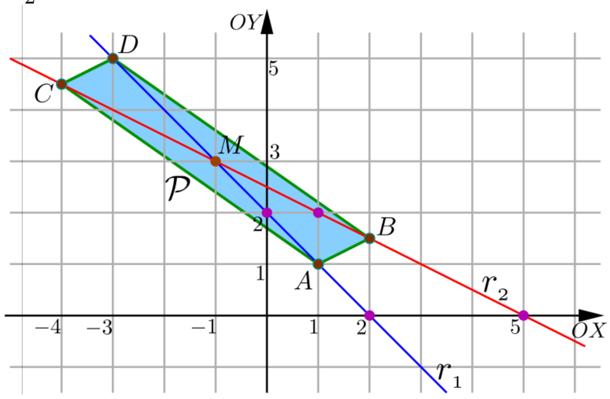

Figura 8: Paralelogramo $\mathcal{P} = ABDC$, exemplo 4.

Como $B \in r_1 \cap r_2$, $B = (-2s+1, s+2)$, para algum s, e

$$-(-2s+1) + 2(s+2) = 1 \Longrightarrow 2s - 1 + 2s + 4 = 1 \Longrightarrow 4s = -2 \Longrightarrow s = -\frac{1}{2}\,.$$

Logo $B = \left(-2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1, -\frac{1}{2} + 2\right) = \left(2, \frac{3}{2}\right)$.

Finalmente, para determinar C, usamos de novo o ponto médio:

$$M = \frac{B+C}{2} \Longrightarrow C = 2M - B = (-2,6) - \left(2, \frac{3}{2}\right) = \left(-4, \frac{9}{2}\right)\,,$$

concluindo assim a determinação dos vértices de $\mathcal{P}$ (Veja a figura 8). $\square$

Exemplo 5

Ache a equação do círculo $\mathcal{C}$ circunscrito ao triângulo de vértices $A = (7,3)$, $B = (1,9)$ e $C = (5,7)$.

Solução.

O centro D do círculo $\mathcal{C}$ circunscrito ao triângulo $\triangle ABC$ é o ponto de interseção das mediatrizes dos lados deste triângulo. Além disso, como $A, B, C \in \mathcal{C}$, o raio R de $\mathcal{C}$ é dado por:

$$R = d(A,D) = d(B,D) = d(C,D).$$

Para determinar o ponto D, basta achar e intersectar duas mediatrizes.

Sabemos que a mediatriz do segmento AB, ou seja, o conjunto

$$m_{AB} = \{P \mid d(P,A) = d(P,B)\},$$

é a reta perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AB}$ que passa pelo ponto médio M_{AB} do segmento AB.

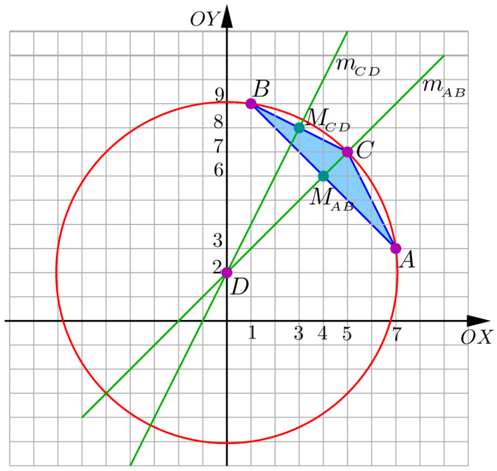

Figura 9: Exemplo 5.

Como

$$M_{AB} = \frac{1}{2}((7,3) + (1,9)) = \frac{1}{2}(8,12) = (4,6)$$

e

$$\overrightarrow{AB} = (-6,6) \perp r \iff (-1,1) \perp r,$$

a reta m_{AB} tem equação:

$$m_{AB} : -x + y = c.$$

Sendo $M_{AB} = (4,6) \in m_{AB}$, $c = -4 + 6 = 2$. Portanto,

$$m_{AB} : -x + y = 2.$$

Determinemos a mediatriz m_{BC} do segmento BC, isto é, a reta perpendicular ao vetor $\overrightarrow{BC}$ que passa pelo ponto médio

$$M_{BC} = \frac{1}{2}((1,9) + (5,7)) = \frac{1}{2}(6,16) = (3,8).$$

Como $\overrightarrow{BC} = (4,-2) \perp m_{BC} \iff (2,-1) \perp m_{BC}$, a equação da mediatriz m_{BC} é da forma

$$m_{BC} : 2x - y = c,$$

onde c é calculado sabendo que $M_{BC} \in m_{BC}$, ou seja, $c = 2(3) - 8 = -2$. Logo,

$$m_{BC} : 2x - y = -2\,.$$

Para determinar D, devemos resolver o sistema formado pelas equações de m_{AB} e m_{BC}:

$$\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2x - y = -2 \end{cases} \iff (-x + 2x) + (y - y) = 2 - 2 \iff x = 0.$$

Logo $y = 2 + x = 2$ e, portanto, $D = (0, 2)$ é o centro de $\mathcal{C}$.

Além disso, $R = d(D, A) = \sqrt{(0-7)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50}$ é o raio de $\mathcal{C}$.

Finalmente,

$$\mathcal{C} : (x - 0)^2 + (y - 2)^2 = \left(\sqrt{50}\right)^2\,,$$

ou seja,

$$\mathcal{C} : x^2 + (y - 2)^2 = 50\,,$$

é a equação do círculo $\mathcal{C}$.$\square$

Exemplo 6

Considere as retas $r_1 : 4x - y = 0\,,\quad r_2 : 4x - y = 1\,,\quad$ *e* $\quad r_3 : \begin{cases} x = 2t \\ y = -t \end{cases}\,;$ $t \in \mathbb{R}$.. *Determine o ponto* $C \in r_3$ *tal que* $d(C, r_1) = d(C, r_2)$.

Solução.

Temos que $P = (x, y)$ equidista de r_1 e $r_2 \iff d(P, r_1) = d(P, r_2)$

$$\iff \quad d(P, r_1) = \frac{|4x - y|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} = \frac{|4x - y - 1|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} = d(P, r_2)$$

$$\iff \quad |4x - y| = |4x - y - 1| \iff 4x - y = \pm(4x - y - 1)$$

$$\iff \quad \begin{cases} 4x - y = 4x - y - 1 \\ \text{ou} \\ 4x - y = -4x + y + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = -1 \\ \text{ou} \\ 8x - 2y = 1 \end{cases}$$

Sendo a primeira dessas alternativas impossível, a segunda deve acontecer. Isto é,

$$P = (x, y) \text{ equidista de } r_1 \text{ e } r_2 \iff 8x - 2y = 1 \iff 4x - y = \frac{1}{2}\,.$$

Portanto, o conjunto dos pontos equidistantes das retas paralelas r_1 e r_2 é a reta s, paralela a ambas, que tem por equação:

$$s : 4x - y = \frac{1}{2}\,.$$

Então $\{C\} = s \cap r_3$, ou seja, $C = (2t, -t)$ para algum $t \in \mathbb{R}$ e

$$4(2t) - (-t) = \frac{1}{2} \Longrightarrow t = \frac{1}{18} \Longrightarrow C = \left(\frac{2}{18}, -\frac{1}{18}\right).$$

□

Exemplo 7

Seja $\triangle ABC$ um triângulo de área 4 tal que $AB \subset r_1$ e $AC \subset r_2$, onde $r_1 : y = 3x+1$ e r_2 é a reta paralela ao vetor $\overrightarrow{u} = (3,1)$ que passa pelo ponto $M = (3,2)$.

Ache a equação cartesiana da reta r_3 paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (1,-1)$ que contém o lado BC, e determine os vértices A, B e C.

Solução.
Como $AB \subset r_1$ e $AB \subset r_2$, temos $\{A\} = r_1 \cap r_2$.
Para determinar o vértice A, devemos obter a equação da reta r_2. Pelas informações dadas, as equações paramétricas de r_2 são :

$$r_2 : \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 2 + t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Assim, $A = (3+3t, 2+t)$, para algum $t \in \mathbb{R}$.
Sendo $A \in r_1$, temos:

$$2 + t = 3(3+3t) + 1 \Longleftrightarrow 2 + t = 10 + 9t \Longleftrightarrow 8t = -8 \Longleftrightarrow t = -1\,.$$

Portanto, $A = (3 + 3(-1), 2 + (-1)) = (0,1)$.

Em relação aos outros dois vértices, temos:

$$\begin{array}{lcll} B \in r_1 & \Longrightarrow & B = (x, 3x+1)\,, & \text{para algum } x \in \mathbb{R} \\ C \in r_2 & \Longrightarrow & C = (3t+3, t+2)\,, & \text{para algum } t \in \mathbb{R}\,. \end{array}$$

Como

$$\overrightarrow{AB} = (x - 0, (3x+1) - 1) = (x, 3x)$$

e

$$\overrightarrow{AC} = ((3t+3)-0,(t+2)-1) = (3t+3,t+1)\,,$$

temos que:

$$\begin{aligned}
\text{área}\,(\triangle ABC) &= \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x & 3x \\ 3t+3 & t+1 \end{pmatrix}\right| \\
&= \tfrac{1}{2}\,|xt + x - 9xt - 9x| = \frac{1}{2}\,|-8xt-8x| \\
&= \tfrac{8}{2}\,|x(t+1)| = 4
\end{aligned}$$

ou seja,

$$|x(t+1)| = 1 \qquad (1)$$

Além disso, como $\overrightarrow{BC} \parallel r_3$ e $\overrightarrow{v} = (1,-1) \parallel r_3$, temos $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{v}$, onde

$$\overrightarrow{BC} = ((3t+3)-x,(t+2)-(3x+1)) = (3t-x+3,t-3x+1).$$

Assim, $\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{v}\end{pmatrix} = 0$, ou seja,

$$\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{v}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3t-x+3 & t-3x+1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= -3t + x - 3 - t + 3x - 1 = -4t + 4x - 4 = 0$$
$$\iff -t + x - 1 = 0 \iff x = t+1\,.$$

Substituindo na identidade (1), obtemos $|x^2| = 1$, ou seja, $x^2 = 1$.
Logo $x = 1$ ou $x = -1$.
Se

$$x = 1 \Longrightarrow t = x - 1 = 1 - 1 = 0$$

e, portanto,

$$B = (1,3(1)+1) = (1,4) \ \text{ e } \ C = (3(0)+3,0+2) = (3,2)\,.$$

Se

$$x = -1 \Longrightarrow t = x - 1 = -1 - 1 = -2.$$

Logo,

$$B = (-1,3(-1)+1) = (-1,-2) \text{ e } C = (3(-2)+3,-2+2) = (-3,0)\,.$$

Obtemos, assim, dois triângulos que resolvem o problema:

• O triângulo $\triangle ABC$, com vértices $A = (0,1)$, $B = (1,4)$ e $C = (3,2)$.

• O triângulo $\triangle ABC$, com vértices $A = (0,1)$, $B = (-1,-2)$ e $C = (-3,0)$.
Determinemos, em cada caso, a reta r_3 que contém os vértices B e C.

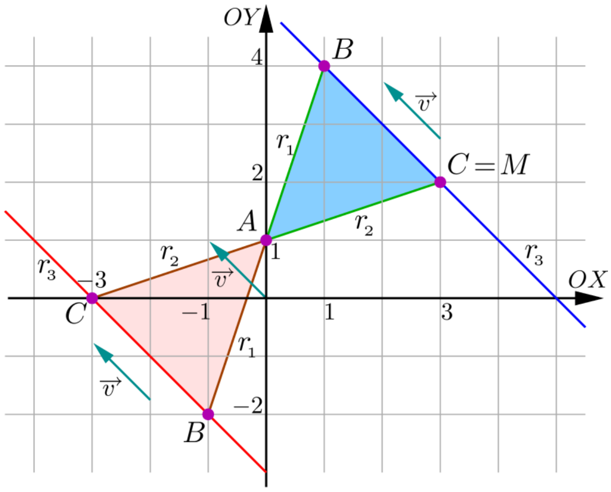

Figura 10: Exemplo 7.

Em ambos os casos, $\overrightarrow{v} = (-1,1) \parallel r_3$, ou seja, $(1,1) \perp r_3$. Logo $r_3 : x+y = c$, onde o valor c pode ser determinado sabendo, por exemplo, que o ponto B, calculado em cada um dos dois casos, pertence a r_3.
No primeiro caso: $c = 1 + 4 = 5 \Longrightarrow r_3 : x + y = 5$.
No segundo caso: $c = -1 - 2 = -3 \Longrightarrow r_3 : x + y = -3$. □

Exemplo 8

(a) *Mostre que as retas* $r_1 : x - y = 2$ *e* $r_2 : x + y = 2$ *são tangentes ao círculo* $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 2$, *e determine os pontos de tangência.*

(b) *Usando o item* **(a)**, *faça um esboço detalhado da região* $\mathcal{R}$ *do plano dado pelo seguinte sistema de inequações:*

$$\mathcal{R} : \begin{cases} x^2 + y^2 < 4 \\ x^2 + y^2 \geq 2 \\ x + |y| \geq 2 \\ x \geq 1\,. \end{cases}$$

Solução.
(a) Uma reta r é tangente a um círculo $\mathcal{C}$ quando a interseção de $\mathcal{C}$ com r consiste de um único ponto P, o ponto de tangência.
Um ponto $P_1 = (x, y) \in r_1 \cap \mathcal{C}$ se, e somente se,

$$\begin{aligned}
& x = y+2 && \text{e} \quad x^2+y^2=2 \\
\Longleftrightarrow\; & x = y+2 && \text{e} \quad (y+2)^2+y^2=2 \\
\Longleftrightarrow\; & x = y+2 && \text{e} \quad 2y^2+4y+2=0 \\
\Longleftrightarrow\; & x = y+2 && \text{e} \quad y^2+2y+1=0 \\
\Longleftrightarrow\; & x = y+2 && \text{e} \quad y=-1 \\
\Longleftrightarrow\; & x = 1 && \text{e} \quad y=-1 \\
\Longleftrightarrow\; & P_1=(1,-1).
\end{aligned}$$

E um ponto $P_2=(x,y)\in r_1\cap\mathcal{C}$ se, e somente se,

$$\begin{aligned}
& x = 2-y && \text{e} \quad x^2+y^2=2 \\
\Longleftrightarrow\; & x = 2-y && \text{e} \quad (2-y)^2+y^2=2 \\
\Longleftrightarrow\; & x = 2-y && \text{e} \quad y^2-2y+1=0 \\
\Longleftrightarrow\; & x = 1 && \text{e} \quad y=1 \\
\Longleftrightarrow\; & P_2=(1,1).
\end{aligned}$$

(b) Observe que $\mathcal{R}=\mathcal{R}_1\cap\mathcal{R}_2\cap\mathcal{R}_3\cap\mathcal{R}_4$, onde:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_1 &: \; x^2+y^2<4\,, \\
\mathcal{R}_2 &: \; x^2+y^2\geq 2\,, \\
\mathcal{R}_3 &: \; x+|y|\geq 2 \\
\mathcal{R}_4 &: \; x\geq 1.
\end{aligned}$$

Determinando $\mathcal{R}_1$.

Note que $\mathcal{C}_1: x^2+y^2=4$ é o círculo de centro na origem e raio 2. Os pontos que satisfazem à primeira inequação são os pontos interiores a este círculo.

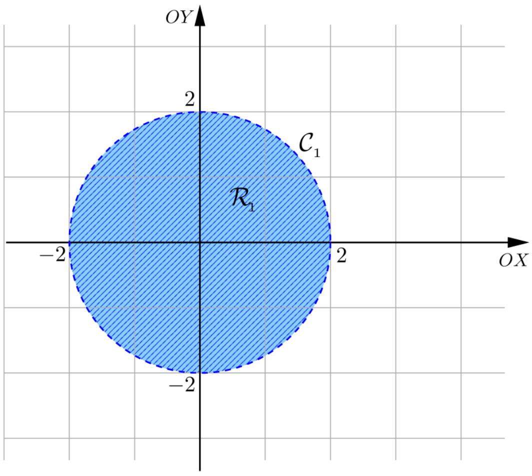

Figura 11: Região $\mathcal{R}_1$.

Determinando $\mathcal{R}_2$.

Note que $\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 = 2$, é o círculo de centro na origem e raio $\sqrt{2}$. Os pontos que satisfazem à segunda inequação são os pontos exteriores a este círculo e os pontos deste círculo.

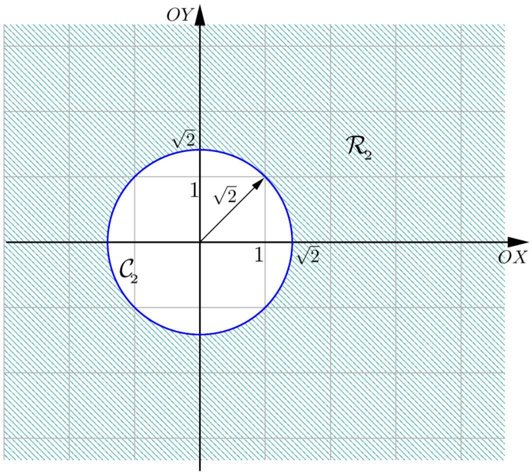

Figura 12: Região $\mathcal{R}_2$.

Determinando $\mathcal{R}_3$.

Como $\mathcal{R}_3 : |y| \geq 2 - x$ e $|y| = \begin{cases} y\,, & \text{se } y \geq 0 \\ -y\,, & \text{se } y \leq 0 \end{cases}$, $\mathcal{R}_3$ é a união de duas regiões $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$:

• $\mathcal{S}_1$ é a interseção do semiplano $y \geq 0$ com o semiplano acima da reta $x + y = 2$:

$$\mathcal{S}_1 = \{(x, y) \,|\, y \geq 0 \quad \text{e} \quad x + y \geq 2\}.$$

• $\mathcal{S}_2$ é a interseção do semiplano $y \leq 0$ com o semiplano abaixo da reta $x - y = 2$:

$$\mathcal{S}_2 = \{(x, y) \,|\, y \leq 0 \quad \text{e} \quad x - y \geq 2\}\,.$$

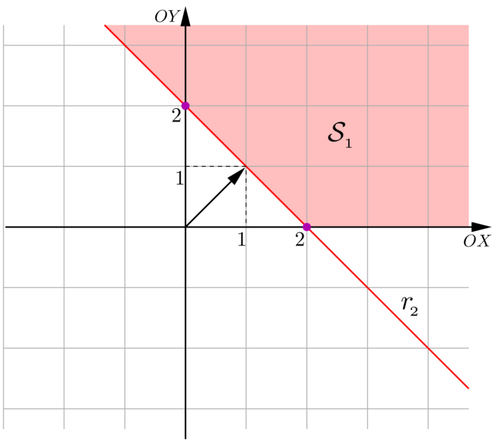

Figura 13: Região $\mathcal{S}_1$.

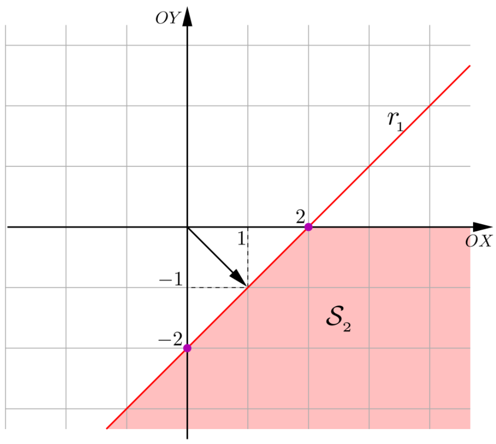

Figura 14: Região $\mathcal{S}_2$.

A região $\mathcal{R}_3$ é a união das regiões $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$, como mostra a figura 6.

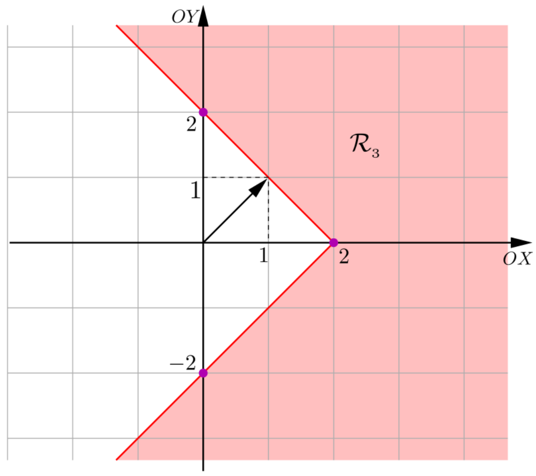

Figura 15: Região $\mathcal{R}_3$.

Determinando $\mathcal{R}_4$.

A região $\mathcal{R}_4$ consiste dos pontos $P = (x, y)$, com $x \geq 1$, isto é, dos pontos à direita da reta vertical $x = 1$.

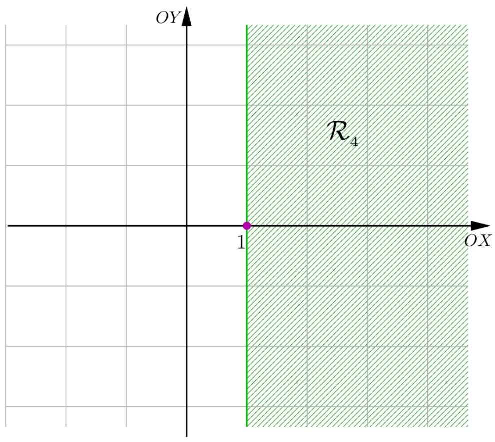

Figura 16: Região $\mathcal{R}_4$.

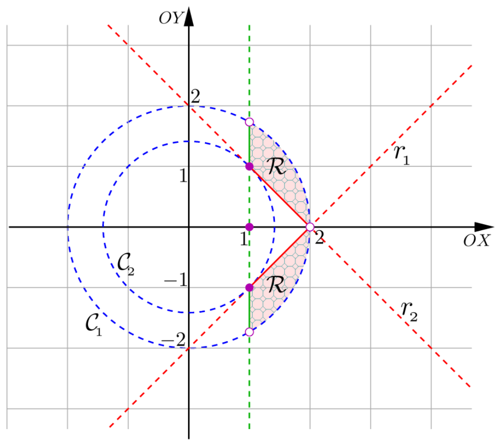

Figura 17: Região $\mathcal{R}$.

Determinando $\mathcal{R}$.

Finalmente, sabendo, pelo item(a), que $r_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{(1, -1)\}$ e $r_2 \cap \mathcal{C}_2 = \{(1, 1)\}$ podemos esboçar a região $\mathcal{R}$.$\square$

Exemplo 9

Seja $ABDC$ um paralelogramo tal que $A \in r_1$, $B \in r_2$, $C = (2, 3)$, $\overrightarrow{CD}$ é múltiplo do vetor $(1, 4)$ e $\overrightarrow{AC} \perp r_3$, onde

$$r_1 : \begin{cases} x = t+1 \\ y = -2t+3 \end{cases} ;\ t \in \mathbb{R}\,,\ \ r_2 : \begin{cases} x = -5s+3 \\ y = 4s-1 \end{cases} ;\ s \in \mathbb{R}\,,\ \ r_3 : 2x - 3y = 6.$$

Determine os vértices A, B e D, e calcule a área do paralelogramo.

Solução.

Sendo $\overrightarrow{AC} \perp r_3$ e $(2,-3) \perp r_3$, temos $\overrightarrow{AC} \parallel (2,-3)$, ou seja,

$$\det \begin{pmatrix} \overrightarrow{AC} \\ (2,-3) \end{pmatrix} = 0.$$

Como $A \in r_1$, temos, para algum $t \in \mathbb{R}$, que $A = (t+1, -2t+3)$ e, portanto,

$$\overrightarrow{AC} = (2-(t+1), 3-(-2t+3)) = (1-t, 2t).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{AC} \\ (2,-3) \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1-t & 2t \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = -3(1-t) - 2(2t) \\ &= -3 + 3t - 4t = -3 - t = 0 \Longrightarrow t = -3\,. \end{aligned}$$

Assim,

$A = (t+1, -2t+3) = (-3+1, -2(-3)+3) = (-2, 6+3) \Longrightarrow A = (-2, 9).$

Como $ABDC$ é um paralelogramo, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, e sendo $\overrightarrow{CD}$ múltiplo de $(1,4)$,

$$\overrightarrow{CD} = k(1,4) = (k, 4k), \qquad (2)$$

para algum $k \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, $B \in r_2 \Longrightarrow B = (-5s+3, 4s-1)$, para algum $s \in \mathbb{R}$.

Logo $\overrightarrow{AB} = (-5s+3-(-2), 4s-1-9) = (-5s+5, 4s-10)$.

Sabendo que dois vetores são iguais se, e somente se, as suas correspondentes coordenadas são iguais, temos:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Longleftrightarrow \begin{cases} -5s+5 = k \\ 4s - 10 = 4k\,. \end{cases}$$

Substituindo k da primeira equação na segunda, obtemos

$$4s - 10 = -20s + 20 \Longrightarrow 24s = 30 \Longrightarrow s = \frac{30}{24} = \frac{5}{4} \Longrightarrow k = -5 \times \frac{5}{4} + 5 = -\frac{5}{4}.$$

Se $D = (x, y)$, temos por (2), que

$$\overrightarrow{CD} = (x-2, y-3) = \left(-\frac{5}{4}, 4\left(-\frac{5}{4}\right)\right) = \left(-\frac{5}{4}, -5\right).$$

Assim, $D = (x, y) = \left(-\frac{5}{4} + 2, -5 + 3\right) = \left(\frac{3}{4}, -2\right)$.

Também, se $B = (x', y')$, temos $(x' - (-2), y' - 9) = \left(-\frac{5}{4}, -5\right)$, pois $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Logo $x' = -2 - \frac{5}{4} = -\frac{13}{4}$ e $y' = 9 - 5 = 4$. Isto é, $B = \left(-\frac{13}{4}, 4\right)$.

Calculemos agora a área do paralelogramo $ABDC$.

Como $\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{5}{4}, -5\right)$ e $\overrightarrow{AC} = (2-(-2), 3-9) = (4, -6)$, temos:

$$\begin{aligned} \text{área}\,(ABDC) &= \left|\det\begin{pmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & -5 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\right| \\ &= \left|\frac{30}{4} + 20\right| = \frac{110}{4} = \frac{55}{2}\,. \end{aligned}$$

□

Exemplo 10

Considere os pontos $E = (1, 6)$, $F = (2, 3)$ e as retas r_1 e r_2 dadas por:

$$r_1 : \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 5t + 1 \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad r_2 : 3x - y = 3\,.$$

Determine os pontos A, B, G e D tais que DE seja a projeção ortogonal do segmento AB sobre a reta r_1 e FG seja a projeção ortogonal do segmento AB sobre a reta r_2, sabendo-se que $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$.

Solução.

Sendo DE a projeção ortogonal de AB sobre r_1, o ponto B deve ser projetado no ponto E e sendo FG a projeção ortogonal de AB sobre r_2, o ponto A deve ser projetado no ponto F.

Seja s_1 a perpendicular a r_1 que passa por E. Então $B \in s_1$.

Determinemos as equações paramétricas de s_1.

Como $(2,5) \parallel r_1$, então $(2,5) \perp s_1$.

Logo $(5,-2) \parallel s_1$ e, sendo $E = (1,6) \in s_1$, temos:

$$s_1 : \begin{cases} x = 5t + 1 \\ y = -2t + 6 \end{cases} ; \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Em particular, $B \in s_1 \Longrightarrow B = (5t+1, -2t+6)$, para algum $t \in \mathbb{R}$.

Analogamente, seja s_2 a reta que passa por F e é perpendicular a r_2. Então $A \in s_2$.

Determinemos as equações paramétricas de s_2.

Sendo $s_2 \perp r_2$ e $(3,-1) \perp r_2$, temos $(3,-1) \parallel s_2$.

Logo, como $F = (2,3) \in s_0$, as equações paramétricas de s_2 são:

$$s_2 : \begin{cases} x = 3s + 2 \\ y = -s + 3 \end{cases} ; \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Como $A \in s_2$, devemos ter $A = (3s+2, -s+3)$, para algum $s \in \mathbb{R}$.

Por hipótese, $\overrightarrow{AB} = (1,2)$. Logo:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= ((5t+1) - (3s+2), (-2t+6) - (-s+3)) \\ &= (5t - 3s - 1, -2t + s + 3) = (1,2). \end{aligned}$$

Essa identidade nos permite calcular os valores dos parâmetros t e s:

$$\begin{cases} 5t - 3s - 1 = 1 \\ -2t + s + 3 = 2\,, \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} 5t - 3s = 2 \\ -2t + s = -1\,. \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por 3 e somando com a primeira, obtemos: $-t = -1 \Longleftrightarrow t = 1$. Substituindo na segunda equação, concluímos que $s = 2(1) - 1 = 1$.

Portanto, $A = (3(1)+2, -1+3) = (5,2)$ e $B = (5(1)+1, -2(1)+6) = (6,4)$.

Para achar o ponto $D \in r_1$ tal que DE é a projeção ortogonal de AB sobre r_1, precisamos determinar a reta s_3 perpendicular a r_1 que passa por A. O ponto D é a interseção de s_3 com r_1.

Como $s_3 \perp r_1$ e $(2,5) \parallel r_1$, a equação de s_3 é da forma: $s_3 : 2x + 5y = c$.

Sendo $A = (5,2) \in s_3$, devemos ter $c = 2(5) + 5(2) = 20$. Portanto,

$$s_3 : 2x + 5y = 20\,.$$

Intersectar r_1 com s_3 significa achar o ponto $(2t-1, 5t+1) \in r_1$ que pertence a s_3, ou seja, achar o valor de t para o qual as coordenadas deste ponto satisfazem a equação de r_3:

$$\begin{aligned} 2(2t-1)+5(5t+1)=20 &\implies 4t-2+25t+5=20 \\ &\implies 29t=17 \implies t=\frac{17}{29}\,. \end{aligned}$$

Este valor de t é o parâmetro do ponto D na reta r_1:

$$D=\left(2\,\frac{17}{29}-1, 5\,\frac{17}{29}+1\right)=\left(\frac{5}{29},\frac{114}{29}\right).$$

Finalmente, o ponto G é o ponto de interseção de r_2 com a sua perpendicular s_4 que passa por $B=(6,4)$.

Como $s_4 \perp r_2$ e $(3,-1)\perp r_2$, temos $(3,-1)\parallel s_4$. Logo,

$$s_4 : \begin{cases} x=6+3s \\ y=4-s \end{cases} ; \quad s\in\mathbb{R}\,,$$

pois $B=(6,4)\in s_4$.

Calculemos o valor do parâmetro s de modo que o ponto

$$G=(6+3s,4-s)\in s_4$$

satisfaça a equação de r_2:

$$\begin{aligned} 3(6+3s)-(4-s)=3 &\implies 18+9s-4+s=3 \\ &\implies 10s=-11 \implies s=-\frac{11}{10}\,. \end{aligned}$$

Portanto, $G=\left(6-3\,\frac{11}{10}, 4+\frac{11}{10}\right)=\left(\frac{27}{10},\frac{51}{10}\right).$

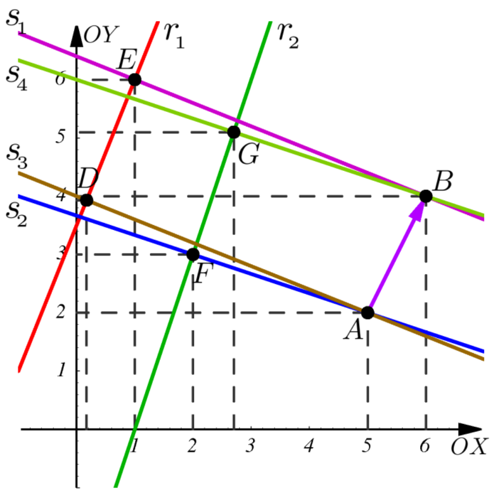

Figura 18: $r_1 \perp s_1$, $r_1 \perp s_3$, $r_2 \perp s_2$ e $r_2 \perp s_4$.

□