# Capítulo 7

# Coordenadas e distância no espaço

## 1. Coordenadas no Espaço

Seja $\mathcal{E}$ o espaço da Geometria Euclidiana tridimensional.

Um **sistema de eixos ortogonais** $OXYZ$ em $\mathcal{E}$ consiste de três eixos ortogonais entre si, $OX$, $OY$ e $OZ$, com a mesma origem $O$ (figura 1).

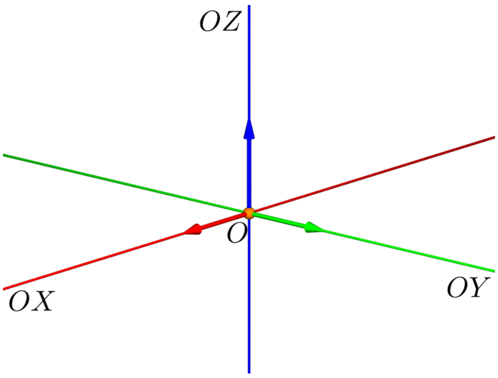


Figura 1: Sistema de eixos ortogonais no espaço.

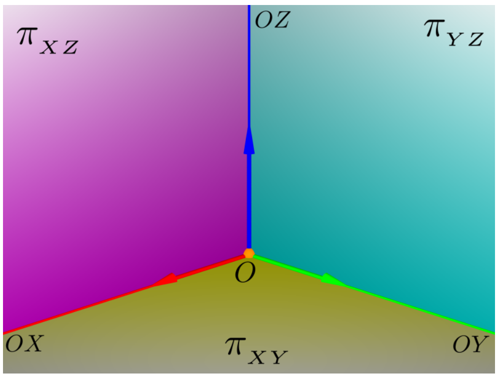


Figura 2: Planos cartesianos no espaço.

Escolhido um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço $\mathcal{E}$, os **planos cartesianos** são (figura 2):

- $\pi_{XY}$, o plano que contém os eixos $OX$ e $OY$,

- $\pi_{XZ}$, o plano que contém os eixos $OX$ e $OZ$,
- $\pi_{YZ}$, o plano que contém os eixos $OY$ e $OZ$.

Um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço $\mathcal{E}$ permite estabelecer uma correspondência entre pontos $P \in \mathcal{E}$ e ternos ordenados de números reais $(x, y, z)$, de modo que a cada ponto corresponde exatamente um terno ordenado de números reais, e a cada terno ordenado de números reais corresponde exatamente um ponto de $\mathcal{E}$.

Assim, se $P$ está em correspondência com o terno $(x, y, z)$, dizemos que $x$, $y$ e $z$ são as **coordenadas de $P$ em relação ao sistema de eixos ortogonais $OXYZ$**. Estas coordenadas são obtidas da seguinte forma:

- **coordenada $x$:** coordenada no eixo $OX$ associada ao ponto de interseção deste eixo com o plano $\pi'$ que passa pelo ponto $P$ e é paralelo ao plano $\pi_{YZ}$.
- **coordenada $y$:** coordenada no eixo $OY$ associada ao ponto de interseção deste eixo com o plano $\pi''$ que passa pelo ponto $P$ e é paralelo ao plano $\pi_{XZ}$.
- **coordenada $z$:** coordenada no eixo $OZ$ associada ao ponto de interseção deste eixo com o plano $\pi'''$ que passa pelo ponto $P$ e é paralelo ao plano $\pi_{XY}$.

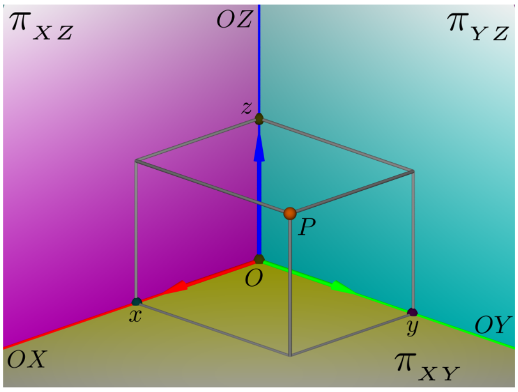


Figura 3: Coordenadas do ponto $P$ no espaço.

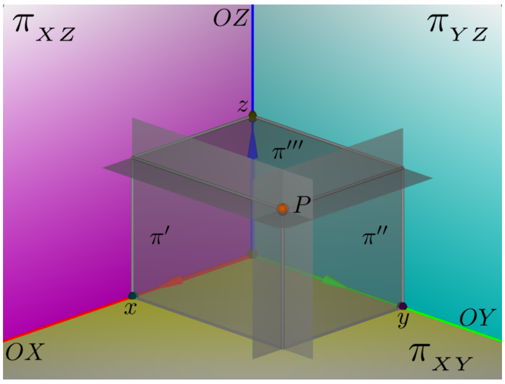


Figura 4: Determinando as coordenadas do ponto $P$.

Uma vez escolhido um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço $\mathcal{E}$, todo ponto $P \in \mathcal{E}$ é identificado pelas suas coordenadas $(x, y, z)$ em relação a este sistema de eixos e escrevemos:

$$\boxed{P = (x, y, z)}$$

Com esta identificação, observamos que:

- a origem do sistema de eixos ortogonais é o ponto $O = (0, 0, 0)$.
- os eixos do sistema são os conjuntos:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{eixo}-OX &= \{(x, 0, 0)\,|\, x \in \mathbb{R}\} \\ \text{eixo}-OY &= \{(0, y, 0)\,|\, y \in \mathbb{R}\} \\ \text{eixo}-OZ &= \{(0, 0, z)\,|\, z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}}$$

- os planos cartesianos são os conjuntos:

$$\boxed{\begin{aligned} \pi_{XY} &= \{(x, y, 0)\,|\, x, y \in \mathbb{R}\}, \quad \text{ou seja,} \quad \pi_{XY} : z = 0 \\ \pi_{XZ} &= \{(x, 0, z)\,|\, x, z \in \mathbb{R}\}, \quad \text{ou seja,} \quad \pi_{XZ} : y = 0 \\ \pi_{YZ} &= \{(0, y, z)\,|\, y, z \in \mathbb{R}\}, \quad \text{ou seja,} \quad \pi_{YZ} : x = 0 \end{aligned}}$$

Um **sistema de coordenadas cartesianas** no espaço $\mathcal{E}$ permite descrever todos os subconjuntos do espaço por meio das coordenadas de seus pontos. Por exemplo, vejamos como caracterizar outros planos com equações que envolvem as coordenadas dos pontos neles contidos.

## Definição 1

- *Um plano $\pi$ é chamado* **horizontal** *quando coincide ou é paralelo ao plano $\pi_{XY}$.*

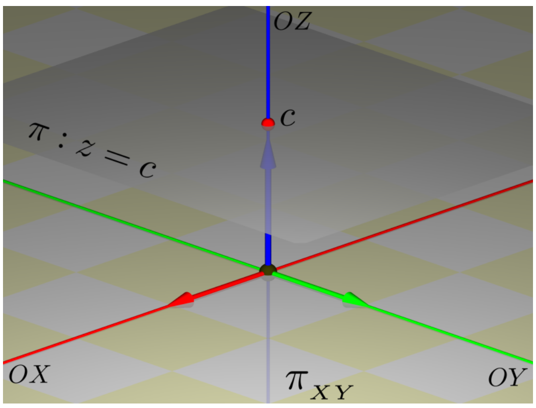


*Figura 5: Plano $\pi$ horizontal, paralelo ao plano $\pi_{XY}$.*

*Se $c \in \mathbb{R}$ é a terceira coordenada do único ponto onde $\pi$ intersecta o eixo$-OZ$, então qualquer ponto $P \in \pi$ terá a sua terceira coordenada igual a $c$, ou seja,*

$$\boxed{\pi = \{P \in \mathcal{E} \,|\, P = (x, y, c)\}}$$

*Assim, descrevemos o plano $\pi$ pela equação:*

$$\boxed{\pi : z = c}$$

• *Analogamente, os planos paralelos aos planos $\pi_{XZ}$ e $\pi_{YZ}$ são dados, respectivamente, por equações da forma $y = b$ e $x = a$, com $b \neq 0$ e $a \neq 0$.*

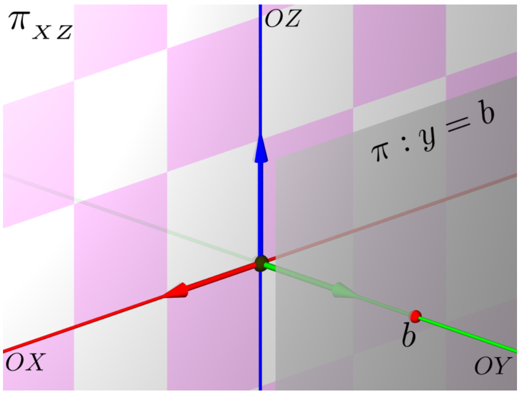


Figura 6: O plano $\pi : y = b$, $b \neq 0$, é paralelo ao plano $\pi_{XZ}$.

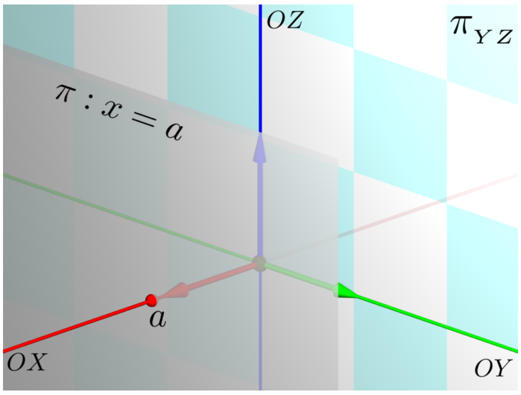


Figura 7: O plano $\pi : x = a$, $a \neq 0$, é paralelo ao plano $\pi_{YZ}$.

## Observação 1

Uma reta $r$ no espaço, que é paralela a um dos eixos coordenados, intersecta o plano cartesiano complementar em apenas um ponto. As coordenadas deste ponto determinam as coordenadas de todos os pontos da reta $r$.

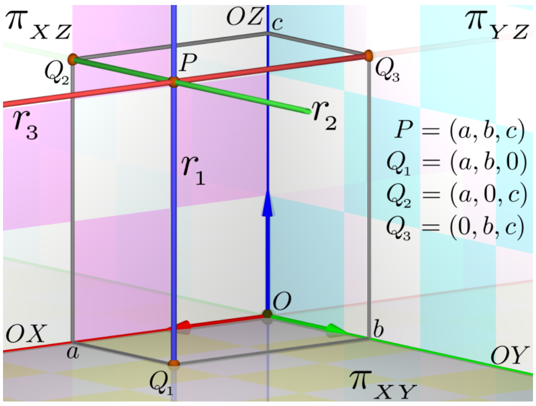


Figura 8: Retas $r_1$, $r_2$ e $r_3$ paralelas aos eixos coordenados.

Por exemplo, sejam $r_1$ uma reta paralela ao eixo $OZ$ e $r_1 \cap \pi_{XY} = \{Q_1\}$. Se $Q_1 = (a, b, 0)$, então qualquer outro ponto $Q = (x, y, z) \in r_1$ satisfaz: $x = a$, $y = b$ e $z \in \mathbb{R}$ (veja a figura 8).

Portanto, $\{\, r_1 = (a, b, z)\,;\, z \in \mathbb{R}\,\}$ e as equações da reta são $r_1 : \begin{cases} x = a \\ y = b. \end{cases}$

De modo análogo:

• Se $r_2 \parallel$ eixo $OY$ e $r_2 \cap \pi_{XZ} = \{Q_2 = (a, 0, c)\}$, então $r_2 = \{(a, y, c)\ ;\ y \in \mathbb{R}\}$ e as equações da reta são: $r_2 : \begin{cases} x = a \\ z = c \end{cases}$.

• Se $r_3 \parallel$ eixo $OX$ e $r_3 \cap \pi_{YZ} = \{Q_3 = (0, b, c)\}$, então $r_3 = \{(x, b, c)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$, e as equações da reta são $r_3 : \begin{cases} y = b \\ z = c \end{cases}$.

## Definição 2

*Um plano $\pi$ é chamado* **vertical** *quando contém ou é paralelo ao eixo$-OZ$. Isto é, $\pi$ é um plano vertical se, e somente se,*

$$\text{eixo}-OZ \subset \pi \qquad \text{ou} \qquad \text{eixo}-OZ \cap \pi = \varnothing.$$

Por exemplo, os planos $\pi : x = a$, $a \in \mathbb{R}$, assim como os planos $\pi : y = b$, $b \in \mathbb{R}$, são planos verticais.

Um plano vertical $\pi$ intersecta o plano $\pi_{XY}$ ao longo de uma reta $r$. A reta $r$, vista exclusivamente no plano $\pi_{XY} : z = 0$, possui uma equação da forma $\alpha x + \beta y = d$, onde $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Mas, no espaço, a reta $r = \pi \cap \pi_{XY}$ é dada por duas equações:

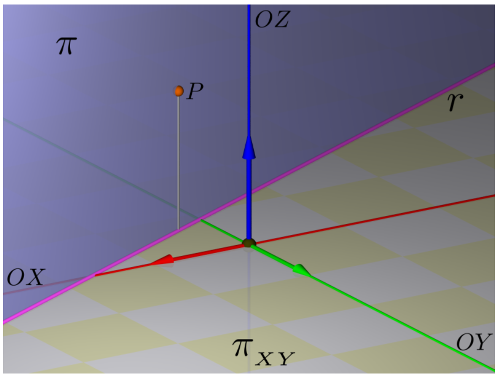

Figura 9: Plano $\pi$ paralelo ao eixo$-OZ$ e $r = \pi \cap \pi_{XY}$.

$$r : \begin{cases} \alpha x + \beta y = d \\ z = 0\,. \end{cases}$$

Ou seja, um ponto pertence à reta $r$ se, e somente se, as suas coordenadas satisfazem, simultaneamente, às duas equações acima.

Por outro lado, como a direção do eixo-$OZ$ é parelela ao plano $\pi$, $\pi$ é formado pela união de todas as retas paralelas ao eixo-$OZ$ que passam por um ponto de $r$.

Portanto, pela Observação 1,

$$\pi = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \alpha\, x + \beta\, y = d \text{ e } z \in \mathbb{R}\right\}.$$

Dizemos então que a equação do plano $\pi$ é dada por:

$$\boxed{\pi : \alpha\, x + \beta\, y = d}$$

### Observação 2

**Não confunda!** No espaço, uma equação da forma $\alpha x + \beta y = d$ representa um plano vertical, ao passo que, no plano de coordenadas $XY$, esta equação representa uma reta.

Procedendo de forma análoga com os outros dois eixos, temos que:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{eixo} - OX \parallel \pi \text{ ou eixo} - OX \subset \pi \iff \pi : \beta y + \gamma z = d, \text{ onde } \beta^2 + \gamma^2 \neq 0; \\ \text{eixo} - OY \parallel \pi \text{ ou eixo} - OY \subset \pi \iff \pi : \alpha x + \gamma z = d, \text{ onde } \alpha^2 + \gamma^2 \neq 0; \\ \text{eixo} - OZ \parallel \pi \text{ ou eixo} - OZ \subset \pi \iff \pi : \alpha x + \beta y = d, \text{ onde } \alpha^2 + \beta^2 \neq 0. \end{array}}$$

## 2. Distância entre dois pontos do espaço

Sejam $P = (a, b, c)$ e $Q = (a', b', c')$ pontos no espaço $\mathcal{E}$.

Começamos observando que se $P$ e $Q$ estão sobre uma reta paralela a um dos eixos coordenados, então eles têm duas coordenadas iguais e a distância entre eles é o módulo da diferença das coordenadas diferentes.

Suponhamos que $P$ e $Q$ não estão sobre uma reta paralela a um dos eixos coordenados. Para o cálculo da **distância** de $P$ a $Q$ são considerados os pontos auxiliares (figura 10):

$$R = (a, b, c'),\ \ S = (a, b, 0),\ \ T = (a', b', 0) \text{ e } U = (a', b, 0).$$

Pela observação feita anteriormente,

$$d(S, U) = |a' - a| \text{ e } d(U, T) = |b' - b|.$$

Usando o teorema de Pitágoras no triângulo $\triangle SUT$, obtemos:

$$d(S, T)^2 = d(S, U)^2 + d(U, T)^2 = |a' - a|^2 + |b' - b|^2 = (a' - a)^2 + (b' - b)^2 .$$

Os segmentos $ST$ e $RQ$ são lados opostos de um retângulo. Logo,

$$d(R,Q)^2 = d(S,T)^2 = (a'-a)^2 + (b'-b)^2\,.$$

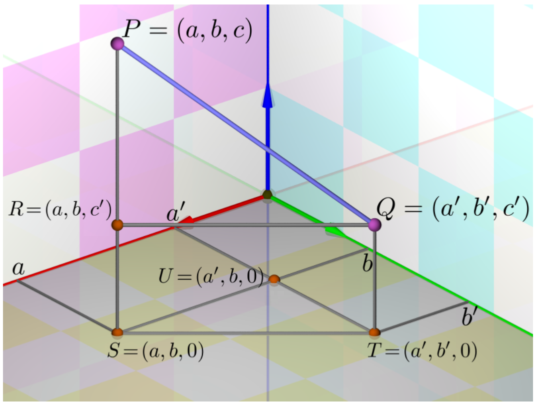


Figura 10: Os triângulos $\triangle PRQ$ e $\triangle SUT$ são retângulos e o quadrilátero $RSTQ$ é um retângulo.

Além disso, $d(P,R) = |c'-c|$, pois os pontos $P$ e $R$ estão sobre uma mesma reta paralela ao eixo $OZ$.

Finalmente, como o triângulo $\triangle PRQ$ é retângulo,

$$d(P,Q)^2 = d(P,R)^2 + d(R,Q)^2 = |c'-c|^2 + (a'-a)^2 + (b'-b)^2\,,$$

ou seja,

$$\boxed{d(P,Q) = \sqrt{(a'-a)^2 + (b'-b)^2 + (c'-c)^2}}$$

## Definição 3

*A esfera $\mathcal{S}$ de centro $C$ e raio $r$ é o conjunto que consiste dos pontos $P \in \mathcal{E}$ cuja distância ao centro $C$ é igual a $r$:*

$$\mathcal{S} = \{P \in \mathcal{E} \mid d(P,C) = r\}\,.$$

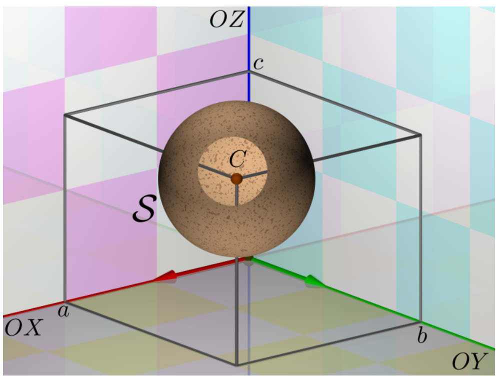


Figura 11: Esfera $\mathcal{S}$ de centro $C=(a,b,c)$ e raio $r$.

Sejam $C = (a, b, c)$ e $P = (x, y, z)$ as expressões do centro $C$ e de um ponto genérico $P$ de $\mathcal{S}$ em relação ao sistema de eixos ortogonais $OXYZ$.

Então, $P \in \mathcal{S} \iff d(P, C) = r \iff \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r$.

Elevando ao quadrado ambos os lados desta última identidade, obtemos a equação da esfera $S$ no sistema de eixos $OXYZ$:

$$\boxed{\mathcal{S} : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2}$$

### Exemplo 1

*Mostre, completando os quadrados, que a equação de segundo grau*

$$z^2 + x^2 + y^2 - 2x + 4y - 6z = 1,$$

*representa uma esfera $\mathcal{S}$. Determine o centro e o raio de $\mathcal{S}$.*

*Solução.*
Completando os quadrados na equação, temos:

$$\begin{aligned} & z^2 + x^2 + y^2 - 2x + 4y - 6z = 1 \\ \iff & (x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) + (z^2 - 6z) = 1 \\ \iff & (x^2 - 2x+1) + (y^2 + 4y+4) + (z^2 - 6z+9) = 1+1+4+9 \\ \iff & (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 15. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{S}$ é a esfera de centro $C = (1, -2, 3)$ e raio $r = \sqrt{15}$. □

### Exemplo 2

**Ponto médio de um segmento no espaço.** *Determinar as coordenadas do ponto médio do segmento que liga os pontos $A = (a, b, c)$ e $B = (a', b', c')$.*

*Solução.*
Na figura 12 mostramos um segmento $AB$ genérico e o seu ponto médio $M = (m_a, m_b, m_c)$. Por hipótese, $d(A, M) = d(M, B)$, ou seja, $|AM| = |MB|$. Pelo critério $ALA$ de congruência de triângulos, temos $\triangle ACM \simeq \triangle MDB$. Em particular, $|CM| = |DB|$. Logo, $|FG| = |CM| = |DB| = |GH|$.

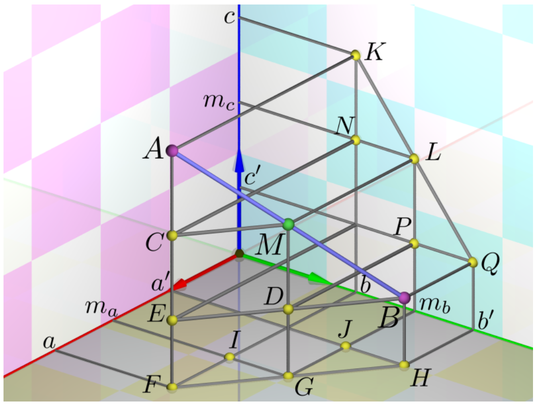

Figura 12: Ponto médio de um segmento no espaço.

Aplicando de novo o critério $ALA$, vemos que os triângulos $\triangle FIG$ e $\triangle GJH$ são congruentes. Em particular, $|FI| = |GJ|$ e, portanto, $m_a = \dfrac{a+a'}{2}$.

Analogamente, $|IG| = |JH|$; donde, $m_b = \dfrac{b+b'}{2}$.

Também da congruência $\triangle ACM \simeq \triangle MDB$, obtemos:

$$|KN| = |AC| = |MD| = |LP|.$$

Portanto, $m_c = \dfrac{c+c'}{2}$. Assim, o ponto médio $M$ do segmento $AB$ tem coordenadas:

$$\boxed{M = (m_a, m_b, m_c) = \left(\frac{a+a'}{2}, \frac{b+b'}{2}, \frac{c+c'}{2}\right)}$$

□

## Exemplo 3

*Determinar o conjunto,*

$$\mathcal{M} = \{P \in \mathcal{E} \,|\, d(P, A) = d(P, B)\},$$

*que consiste dos pontos equidistantes a dois pontos distintos $A$ e $B$ no espaço.*

*Solução.*

Note que o ponto médio $M$ do segmento $AB$ pertence ao conjunto $\mathcal{M}$.
Consideremos agora um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço tal que $M$ seja a origem ($M = O$) e o segmento $AB$ esteja contido no eixo $OX$, com $A$ à direita de $B$.

Com esta escolha, as coordenadas dos pontos $A$ e $B$ são da forma: $A = (r, 0, 0)$ e $B = (-r, 0, 0)$, para algum número real $r > 0$.

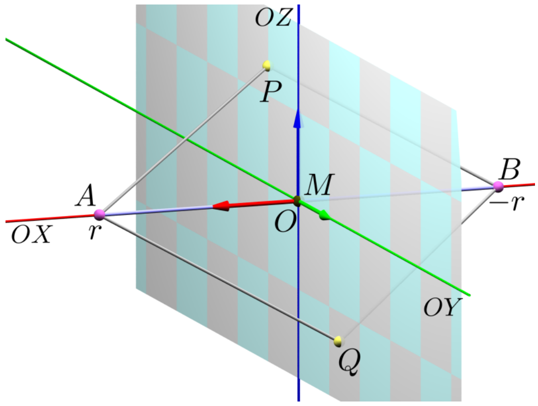


Figura 13: Pontos eqüidistantes de dois pontos dados.

Assim:

$$
\begin{aligned}
& P = (x, y, z) \in \mathcal{M} \\
\iff\ & d(A, P) = d(B, P) \iff d(A, P)^2 = d(B, P)^2 \\
\iff\ & (x - r)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = (x - (-r))^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 \\
\iff\ & x^2 - 2xr + r^2 = x^2 + 2xr + r^2 \iff -2xr = 2xr \iff 4xr = 0 \\
\iff\ & x = 0 \ \ (\text{pois } r \neq 0) \iff P = (0, y, z) \in \pi_{YZ}\,.
\end{aligned}
$$

Ou seja, $\mathcal{M} = \pi_{YZ}$. Portanto, geometricamente, o conjunto $\mathcal{M}$ é o plano perpendicular ao segmento $AB$ que passa pelo ponto médio deste segmento.

□

# Capítulo 8

# Vetores

## 1. Vetores no espaço

Vamos agora abordar a noção de vetores no espaço. A definição é a mesma dada no plano, assim como as principais propriedades, salvo alguns acréscimos.

Para definir a relação de equipolência no espaço, começamos observando que duas retas são paralelas quando estão contidas no mesmo plano e não se intersectam.

De fato, há situações em que duas retas no espaço não se intersectam, mas não são paralelas. Pense, por exemplo, em duas ruas, sendo uma delas um viaduto que passa por cima da outra transversalmente!

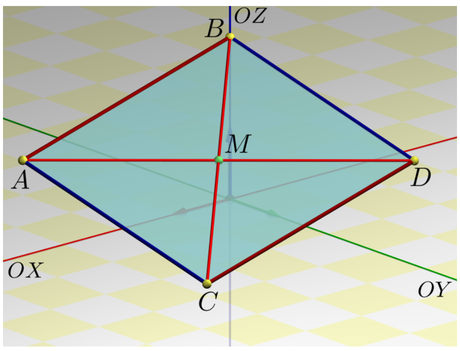


Figura 1: Paralelogramo $ABDC$ no espaço, $AB \equiv CD$.

### Definição 1

*Os segmentos orientados $AB$ e $CD$ no espaço são* **equipolentes**, *e escrevemos $AB \equiv CD$, quando satisfazem as seguintes condições:*

- *$AB$ e $CD$ têm igual comprimento: $|AB| = d(A, B) = d(C, D) = |CD|$.*
- *$AB$ e $CD$ estão contidos em retas paralelas ou na mesma reta.*
- *$AB$ e $CD$ têm o mesmo sentido.*

Se $AB$ e $CD$ satisfazem às duas primeiras propriedades, a terceira significa, no caso em que $A$, $B$, $C$ e $D$ não são colineares, que $ABDC$ é um paralelogramo no plano que contém os pontos $A$, $B$, $C$ e $D$.

Da mesma forma feita no plano, podemos mostrar que:

$$\boxed{AB \equiv CD \iff \text{o ponto médio de } AD \text{ coincide com o ponto médio de } BC}$$

A relação de equipolência entre segmentos é uma **relação de equivalência**, isto é, satisfaz às seguintes propriedades:

**1. Reflexividade:** Todo segmento é equipolente a si próprio: $AB \equiv AB$.

**2. Simetria:** Se $AB \equiv CD$, então $CD \equiv AB$.

**3. Transitividade:** Se $AB \equiv CD$ e $CD \equiv EF$, então $AB \equiv EF$.

Estas propriedades podem ser verificadas usando a Proposição 1 abaixo.

Por causa disso, podemos dividir o conjunto que consiste de todos os segmentos orientados do espaço em subconjuntos especiais chamados **classes de equivalência pela relação de equipolência**, ou simplesmente, **classes de equipolência**. Cada classe de equipolência é denominada um **vetor** do espaço.

Usamos a mesma notação adotada para vetores no plano para designar o conjunto que consiste de todos os segmentos orientados que são equipolentes ao segmento $AB$:

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \{CD \,|\, AB \equiv CD\}}$$

Note que,

$$\boxed{AB \equiv CD \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}}$$

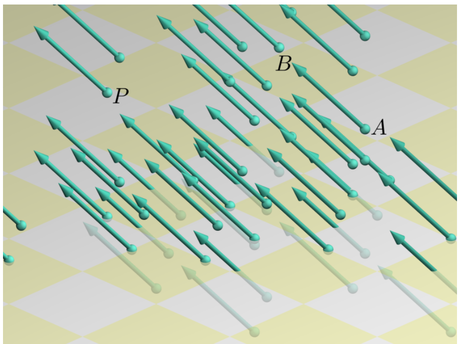


Figura 2: Ponto $P$ é origem de um representante de $\vec{v}$.

Como no plano, o vetor representado por um segmento cuja origem é igual à extremidade é chamado **vetor nulo** ou **vetor zero**:

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \ldots.$$

Além disso, todo ponto $P$ do espaço é origem de um segmento orientado representante de um vetor dado $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ qualquer (figura 2).

*Ou seja, dado um vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ e um ponto $P \in \mathcal{E}$, existe um único ponto $Q \in \mathcal{E}$ tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ}$.*

Para verificar esta propriedade, quando $A$, $B$ e $P$ não são colineares, basta considerar o plano que contém os pontos $A$, $B$ e $P$. Neste plano, o problema de determinar o ponto $Q$ já foi resolvido quando estudamos vetores no plano.

**Notação:** Dado um ponto $P$ no espaço e um vetor $\overrightarrow{v}$, designamos o único ponto do espaço tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ}$ como:

$$\boxed{Q = P + \overrightarrow{v}}$$

## Proposição 1

*Seja $OXYZ$ um sistema de eixos ortogonais e sejam $A = (a, b, c)$, $B = (a', b', c')$, $C = (x, y, z)$ e $D = (x', y', z')$ pontos do espaço.*

*Então os segmentos $AB$ e $CD$ são equipolentes se, e somente se,*

$$a' - a = x' - x\,, \quad b' - b = y' - y \;\text{ e }\; c' - c = z' - z\,.$$

**Prova.**
Temos que $AB \equiv CD$ se, e somente se, o ponto médio $AD$ coincide com o ponto médio $BC$, ou seja, se, e só se:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{a+x'}{2}, \frac{b+y'}{2}, \frac{c+z'}{2}\right) = \left(\frac{a'+x}{2}, \frac{b'+y}{2}, \frac{c'+z}{2}\right) \\
\iff & \frac{a+x'}{2} = \frac{a'+x}{2}\,, \quad \frac{b+y'}{2} = \frac{b'+y}{2} \quad \text{e} \quad \frac{c+z'}{2} = \frac{c'+z}{2} \\
\iff & a+x' = a'+x\,, \quad b+y' = b'+y \quad \text{e} \quad c+z' = c'+z \\
\iff & a'-a = x'-x\,, \quad b'-b = y'-y \quad \text{e} \quad c'-c = z'-z\,.
\end{aligned}$$

generalizando, assim, o resultado já conhecido no plano. ■

**Definição 2**

*Sejam $A = (a, b, c)$ e $B = (a', b', c')$ pontos no espaço. Os números reais $a' - a, b' - b$ e $c' - c$ são* **as coordenadas** *do vetor $\overrightarrow{AB}$ no sistema de eixos $OXYZ$. Em coordenadas, o vetor é representado por:*

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (a' - a, b' - b, c' - c).}$$

**Observação 1**

• Pela proposição anterior, as coordenadas de um vetor podem ser calculadas usando qualquer segmento orientado representante do vetor.

• Em particular, dado um vetor $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$, o ponto $P = (\alpha, \beta, \gamma)$ satisfaz

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}\,.$$

O vetor $\overrightarrow{OP}$ é o **representante na origem** do vetor $\overrightarrow{v}$.

**Exemplo 1**

*Considere os pontos $A = (1, 4, 0)$, $B = (-1, 1, -1)$ e $C = (3, 5, -10)$. Determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, do ponto $D$ e do ponto $P$ tais que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OP}$.*

*Solução.*

Temos $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = (-1-1, 1-4, -1-0) = (-2, -3, -1)$.

Seja $D = (x, y, z)$ o ponto procurado.

Como $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff AB \equiv CD$, temos, pela proposição anterior, que:

$$-1-1 = x-3\,, \quad 1-4 = y-5 \quad -1-0 = z-(-10)\,.$$

Ou seja, $x = 1$, $y = 2$ e $z = -11$. Assim, $D = (1, 2, -11)$.

E pela observação acima, $P = (-2, -3, -1)$ é o ponto tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$. □

## 2. Operações com vetores no espaço

Vamos definir agora as operações de adição de vetores no espaço e multiplicação de um vetor espacial por um número real. O processo é análogo ao efetuado para definir estas operações para vetores no plano e as propriedades são basicamente as mesmas, por isso muitos detalhes serão omitidos.

### Definição 3

*Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores no espaço $\mathcal{E}$. Seja $A \in \mathcal{E}$ um ponto qualquer e sejam $AB$ e $BC$ segmentos orientados representantes dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ respectivamente.*

*O* **vetor soma** *dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, que designamos por $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, é, por definição, o vetor representado pelo segmento orientado $AC$.*

Note que a definição da soma de dois vetores recai na situação já estudada no plano, pois os pontos $A$, $B$ e $C$ estão contidos num mesmo plano $\pi$.

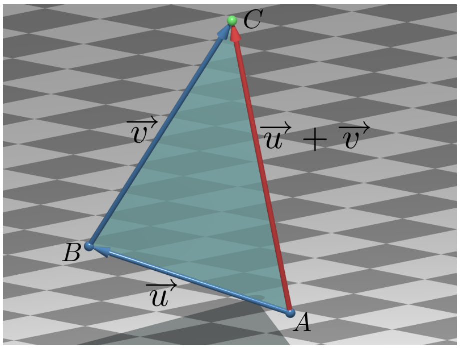


Figura 3: Soma de vetores no espaço.

De forma análoga ao que foi feito para vetores no plano, podemos verificar que a definição do vetor soma não depende da escolha do ponto $A \in \mathcal{E}$. Isto é, o vetor soma está bem definido.

Na prática, a adição de vetores se efetua em relação às coordenadas dos vetores parcelas num sistema de eixos ortogonais escolhido.

Assim, fixemos um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$, e, com respeito a este sistema, sejam $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$ e $\overrightarrow{v} = (a', b', c')$.

Então o vetor soma $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ é dado em termos de coordenadas como:

$$\boxed{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (a, b, c) + (a', b', c') = (a + a', b + b', c + c')}$$

A demonstração deste fato se faz de modo análogo ao feito para vetores no plano.

## Exemplo 2

*Sejam $A = (3, 2, 0)$, $B = (0, 3, -2)$ e $C = (4, 3, 2)$ pontos do espaço.*

*Determine o ponto $D$ tal que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.*

*Solução.*
Temos,

$$\overrightarrow{AB} = (0 - 3, 3 - 2, -2 - 0) = (-3, 1, -2),$$
$$\overrightarrow{AC} = (4 - 3, 3 - 2, 2 - 0) = (1, 1, 2).$$

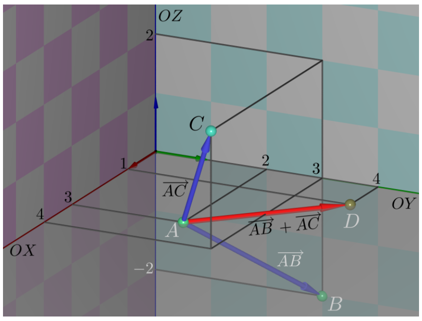


Figura 4: Exemplo 2.

Logo,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} &= (-3, 1, -2) + (1, 1, 2) \\ &= (-2, 2, 0). \end{aligned}$$

Além disso, se $D = (d_1, d_2, d_3)$ é a extremidade do representante $AD$ do vetor soma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ com origem no ponto $A$, então: $d_1 - 3 = -2$, $d_2 - 2 = 2$ e $d_3 - 0 = 0$. Portanto, $D = (1, 4, 0)$. $\square$

## Propriedades da adição de vetores no espaço

A operação de adição de vetores no espaço possui as mesmas propriedades da operação de adição de vetores no plano, que são herdadas das correspondentes propriedades da adição de números reais.

Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores no espaço.

**1. Comutatividade:** $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.

**2. Existência de elemento neutro:** O vetor **zero**, $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \ldots$, representado por qualquer segmento nulo, é o único vetor tal que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$ qualquer que seja o vetor $\overrightarrow{u}$. Em termos de coordenadas, temos $\overrightarrow{0} = (0, 0, 0)$.

**3. Existência de inverso aditivo:** Dado um vetor $\overrightarrow{u}$, **existe um único** vetor, que é designado $-\overrightarrow{u}$ e chamado **inverso aditivo** (ou simétrico) de $\overrightarrow{u}$, tal que $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$.

Note que se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, então $-\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA}$.

**4. Associatividade:** $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$.

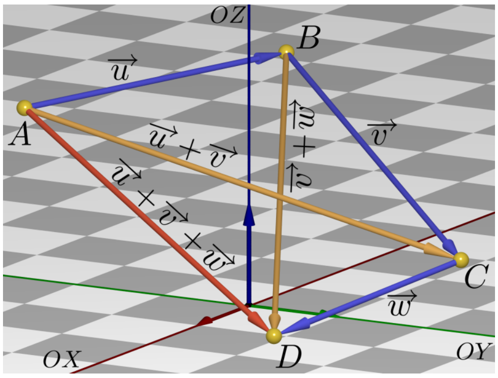


Figura 5: Associatividade da adição de vetores.

### Definição 4

*A* **subtração** *do vetor $\overrightarrow{v}$ pelo vetor $\overrightarrow{u}$ é a soma de $\overrightarrow{v}$ com o inverso aditivo $-\overrightarrow{u}$ do vetor $\overrightarrow{u}$. O vetor $\overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{u})$ se escreve, abreviadamente, como $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$.*

*Se* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$*, então:*

$$\overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}.$$

### Observação 2

Já sabemos que se $A$, $B$, $C$ são pontos não colineares do plano, então o ponto $D$ faz do quadrilátero $ABDC$ um paralelogramo se, e somente se, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

### Observação 3

**Se $A$, $B$, $C$ e $D$ são pontos não coplanares no espaço, então**

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE},$$
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AF},$$
$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG},$$
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AH},$$

**se, e somente se, $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$, e $H$ são os vértices de um paralelepípedo no espaço** (veja a figura 3).

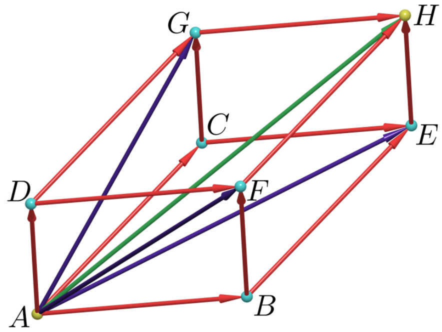


Figura 6: Paralelepípedo.

• A operação de **multiplicação** de um número real por um vetor no espaço é definida da mesma forma que no plano.

### Definição 5

*Sejam* $\overrightarrow{AB}$ *um vetor do espaço e* $\lambda \in \mathbb{R}$*. O* **produto de $\lambda$ por $\overrightarrow{AB}$** *é o vetor* $\overrightarrow{AB'} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$*, tal que:*

• *$A$, $B$ e $B'$ são colineares,*

• $|AB'| = d(A, B') = |\lambda| \cdot d(A, B) = |\lambda| \cdot |AB|$,

• *os segmentos $AB$ e $AB'$ têm o mesmo sentido se $\lambda > 0$ e sentidos opostos se $\lambda < 0$.*

### Observação 4

Note que se $\lambda = 0$, então $d(A, B') = 0 \cdot d(A, B) = 0$, isto é, $B' = A$ e, portanto, $0 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$. Analogamente, $\lambda \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$, qualquer que seja $\lambda \in \mathbb{R}$.

Na prática, a multiplicação de um escalar por um vetor se efetua em relação a um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais da mesma forma feita no plano. Ou seja, se $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$ é um vetor do espaço e $\lambda \in \mathbb{R}$, então:

$$\boxed{\lambda \cdot \overrightarrow{u} = \lambda(a, b, c) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)}$$

## Exemplo 3

*Sejam $A = (1, 2, 1)$ e $B = (2, 3, 3)$. Determinemos as extremidades $D$, $D'$ e $D''$ dos representantes $CD$, $CD'$ e $CD''$ dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $-2\overrightarrow{AB}$ e $2\overrightarrow{AB}$ com origem no ponto $C = (1, 1, 0)$.*

*Solução.*

Em termos de coordenadas, $\overrightarrow{AB} = (2-1, 3-2, 3-1) = (1, 1, 2)$. Logo,

$$-2\overrightarrow{AB} = (-2 \cdot 1, -2 \cdot 1, -2 \cdot 2) = (-2, -2, -4),$$
$$2\overrightarrow{AB} = (2 \cdot 1, 2 \cdot 1, 2 \cdot 2) = (2, 2, 4).$$

Como $C = (1, 1, 0)$, as coordenadas dos pontos $D = (d_1, d_2, d_3)$, $D' = (d'_1, d'_2, d'_3)$ e $D'' = (d''_1, d''_2, d''_3)$, satisfazem:

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} d_1 - 1 = 1 \\ d_2 - 1 = 1 \\ d_3 - 0 = 2 \end{cases};$$

$$\overrightarrow{CD'} = -2\overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} d'_1 - 1 = -2 \\ d'_2 - 1 = -2 \\ d'_3 - 0 = -4 \end{cases};$$

$$\overrightarrow{CD''} = 2\overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} d''_1 - 1 = 2 \\ d''_2 - 1 = 2 \\ d''_3 - 0 = 4 \end{cases}.$$

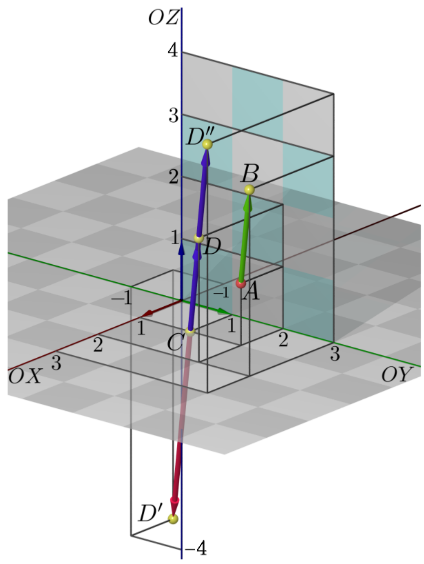

Figura 7: Exemplo 3.

Portanto,

$$D = (2, 2, 2),\ D' = (-1, -1, -4) \quad \text{e} \quad D'' = (3, 3, 4).$$

são os pontos procurados. $\square$

### Propriedades da multiplicação de um escalar por um vetor

Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores do espaço e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. A multiplicação de um escalar por um vetor satisfaz às seguintes propriedades.

1. **Associatividade:** $\lambda \cdot (\mu \cdot \overrightarrow{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \overrightarrow{a}$ ;

2. **Distributividade:** $\begin{cases} \lambda \cdot (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \lambda \cdot \overrightarrow{a} + \lambda \cdot \overrightarrow{b} \\ (\lambda + \mu) \cdot \overrightarrow{a} = \lambda \cdot \overrightarrow{a} + \mu \cdot \overrightarrow{a} \end{cases}$ ;

3. **Elemento neutro multiplicativo:** O número $1 \in \mathbb{R}$ satisfaz $1 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$ .

### Observação 5

Estas propriedades são verificadas escrevendo os vetores em um sistema de eixos ortogonais.

### Observação 6

Se $\overrightarrow{u}$ é um vetor do espaço, então o seu inverso aditivo $-\overrightarrow{u}$ é obtido multiplicando $\overrightarrow{u}$ por $-1$. De fato, $\overrightarrow{u} + (-1)\overrightarrow{u} = (1 + (-1))\overrightarrow{u} = 0\,\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

## 3. Colinearidade e coplanaridade de pontos no espaço

Sabemos que três pontos $A$, $B$ e $C$ no espaço são colineares se eles pertencem a uma mesma reta.

Vamos analisar a colinearidade de pontos no espaço usando vetores. Para isso, precisamos da seguinte definição.

### Definição 6

*O vetor* $\overrightarrow{v}$ *é* **múltiplo** *do vetor* $\overrightarrow{u}$ *quando existe um escalar* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $\overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{u}$.

### Observação 7

**a.** Todo vetor é múltiplo de si próprio (neste caso, $\lambda = 1$).

**b.** O vetor zero $\overrightarrow{0}$ é múltiplo de qualquer vetor.

De fato, dado um vetor arbitrário $\overrightarrow{u}$, temos $\overrightarrow{0} = 0\,\overrightarrow{u}$.

Em contrapartida, nenhum vetor não nulo pode ser múltiplo do vetor zero.

**c.** Se $\overrightarrow{v} \neq 0$ e $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$, então $\lambda \neq 0$ e $\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{\lambda}\,\overrightarrow{v}$.

Assim, se $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, então $\overrightarrow{v}$ é múltiplo de $\overrightarrow{u}$ se, e somente se, $\overrightarrow{u}$ é múltiplo de $\overrightarrow{v}$.

### Proposição 2

*Se $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são vetores do espaço, então um dos vetores $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ é múltiplo do outro se, e somente se,*

$$x_1y_2 - x_2y_1 = x_1z_2 - x_2z_1 = y_1z_2 - y_2z_1 = 0\,.$$

### Prova.

Sejam $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$.

($\Longrightarrow$) Se $\overrightarrow{v}$ é múltiplo de $\overrightarrow{u}$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{v} = \lambda\,\overrightarrow{u}$.

Logo,

$$\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2) = \lambda(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) = \lambda\overrightarrow{u},$$

ou seja,

$$x_2 = \lambda x_1\,, \quad y_2 = \lambda y_1\,, \quad z_2 = \lambda z_1\,. \tag{1}$$

Multiplicando a primeira das identidades (1) por $y_1$ e a segunda por $x_1$, obtemos:

$$y_1x_2 = \lambda x_1y_1 = x_1y_2 \Longrightarrow x_1y_2 - x_2y_1 = 0.$$

Multiplicando a primeira das identidades (1) por $z_1$ e a terceira por $x_1$, obtemos:

$$x_2z_1 = \lambda x_1z_1 = x_1z_2 \Longrightarrow x_1z_2 - x_2z_1 = 0.$$

Finalmente, multiplicando a segunda das identidades (1) por $z_1$ e a terceira por $y_1$, obtemos:

$$y_2z_1 = \lambda y_1z_1 = y_1z_2 \Longrightarrow y_1z_2 - y_2z_1 = 0.$$

($\Longleftarrow$) Reciprocamente, suponhamos que

$$x_1y_2 - x_2y_1 = x_1z_2 - x_2z_1 = y_1z_2 - y_2z_1 = 0.$$

Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} = (0,0,0)$ então $\overrightarrow{u} = 0\,\overrightarrow{v}$, isto é, $\overrightarrow{u}$ é múltiplo de $\overrightarrow{v}$.

Podemos então supor que $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1) \neq (0,0,0) = \overrightarrow{0}$.

Assim, necessariamente, alguma das coordenadas de $\overrightarrow{u}$ deve ser diferente de zero.

Se $x_1 \neq 0$, tome $\lambda = \dfrac{x_2}{x_1}$. Afirmamos que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$.

De fato, como $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$, segue que $y_2 = \dfrac{x_2}{x_1}\,y_1$. Também, sendo $x_1z_2 - z_1x_2 = 0$, temos $z_2 = \dfrac{x_2}{x_1}\,z_1$. Logo,

$$\lambda\overrightarrow{u} = \frac{x_2}{x_1}\,(x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{x_2}{x_1}\,x_1, \frac{x_2}{x_1}\,y_1, \frac{x_2}{x_1}\,z_1\right) = (x_2, y_2, z_2) = \overrightarrow{v}\,.$$

Os casos $y_1 \neq 0$ e $z_1 \neq 0$ são tratados da mesma maneira. ■

## Observação 8

**(a)** Para mostrar que dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não são múltiplos, basta verificar que um dos números

$$x_1y_2 - x_2y_1, \qquad x_1z_2 - x_2z_1 \qquad \text{ou} \qquad y_1z_2 - y_2z_1\,,$$

é diferente de zero.

**(b)** Os números $x_1y_2 - x_2y$, $x_1z_2 - x_2z_1$ e $y_1z_2 - y_2z_1$ são os determinantes $2 \times 2$ que podem ser formados com as colunas da matriz $2 \times 3$

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$$

em cujas linhas aparecem as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

## Definição 7

*Dizemos que dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não nulos são* **colineares** *quando um deles é múltiplo do outro.*

## Observação 9

Esta definição está bem justificada, pois se $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, então os pontos

$A$, $B$ e $C$ estão sobre uma mesma reta. E, reciprocamente, se $A$, $B$ e $C$ são pontos distintos de uma reta, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$. Para isso, basta tomar $\lambda = \pm\dfrac{d(A,C)}{d(A,B)}$, onde escolhemos o sinal positivo caso $B$ e $C$ estejam do mesmo lado em relação ao ponto $A$ na reta que os contém, e o sinal negativo caso $B$ e $C$ estejam em lados opostos. Portanto, temos:

Os pontos $A$, $B$ e $C$ são colineares $\Longleftrightarrow$ os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são múltiplos.

**Exemplo 4**

*Determine se os pontos $A = (-1, 1, 0)$, $B = (1, 1, 1)$ e $C = (-2, -1, -1)$ são colineares ou não.*

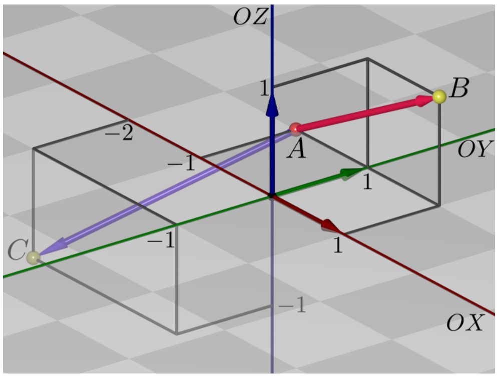


Figura 8: Exemplo 4.

*Solução.*

Como

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 1), \\ \overrightarrow{AC} &= (x_2, y_2, z_2) = (-1, -2, -1), \end{aligned}$$

e $$\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = (2)(-2) - (0)(-1) = -4 \neq 0,$$

os pontos dados não são colineares. $\square$

**Exemplo 5**

*Determine se os pontos $A = (0, 1, 0)$, $B = (1, 1, 1)$ e $C = (-2, 1, -2)$ são colineares ou não.*

*Solução.*

Temos $\overrightarrow{AB} = (x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1)$ e $\overrightarrow{AC} = (y_1, y_2, y_3) = (-2, 0, -2)$.
A matriz $2 \times 3$ que tem por linhas as coordenadas destes vetores é

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

e os determinantes $2 \times 2$ formados com as colunas desta matriz são:

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 1(0) - (-2)(0) = 0\,,$$

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = 1(-2) - 1(-2) = 0\,,$$

$$\det \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 0(-2) - 1(0) = 0\,.$$

Portanto, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são múltiplos, ou seja, os pontos $A$, $B$ e $C$ são colineares. □

Sabemos que três pontos $A$, $B$ e $C$ não colineares determinam um único plano $\pi$ no espaço. O teorema abaixo nos permite saber quando um quarto ponto $D$ pertence ou não a este plano.

### Definição 8

*Um vetor $\overrightarrow{v}$ que é soma de múltiplos dos vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, ..., $\overrightarrow{v_n}$ é chamado uma* **combinação linear** *de $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, ..., $\overrightarrow{v_n}$, ou melhor, $\overrightarrow{v}$ é uma combinação linear de $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, ..., $\overrightarrow{v_n}$, se existem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{v}_n}$$

### Teorema 1

*Sejam $A$, $B$ e $C$ pontos não colineares no espaço e seja $\pi$ o plano que eles determinam. A fim de que o ponto $D$ pertença ao plano $\pi$ é necessário e suficiente que o vetor $\overrightarrow{AD}$ seja* **combinação linear** *dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, ou seja,*

$$\boxed{D \in \pi \iff \text{existem } x, y \in \mathbb{R} \text{ tais que } \overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}}$$

### Prova.

($\Longrightarrow$) Suponhamos primeiro que $D \in \pi$.

Seja $r_1$ a reta paralela a $\overrightarrow{AC}$ que passa por $D$ e seja $r_2$ a reta paralela a $\overrightarrow{AB}$ que passa por $D$.
Então $r_1$ está contida no plano $\pi$ e intersecta a reta que contém os pontos $A$ e $B$ num ponto $D_1$.
Analogamente, $r_2$ está contida no plano $\pi$ e intersecta a reta que contém os pontos $A$ e $C$ num ponto $D_2$.

Como os pontos $A$, $B$ e $D_1$ são colineares, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AD_1} = x\overrightarrow{AB}$. Também, como $A$, $C$ e $D_2$ são colineares, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AD_2} = y\overrightarrow{AC}.$$

Sendo $AD_1DD_2$ um paralelogramo, temos:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{AD_2} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}.$$

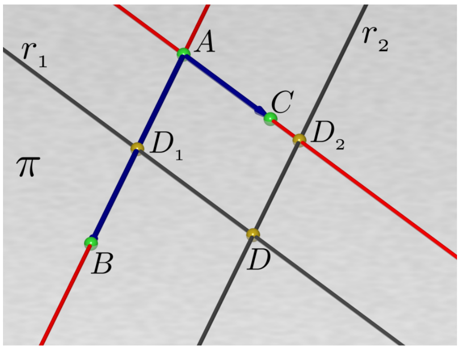


Figura 9: $A$, $B$, $C$ e $D$ coplanares.

$(\Longleftarrow)$ Suponhamos agora que $\overrightarrow{AD}$ é combinação linear dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Isto é, existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.
Seja $OXYZ$ um sistema de eixos ortogonais no espaço tal que a origem $O$ é o ponto $A$ e os eixos $OX$ e $OY$ estejam sobre o plano $\pi$. Assim, neste sistema de eixos, $\pi = \pi_{XY}$.

Sendo as terceiras coordenadas de $A$, $B$ e $C$ iguais a zero e $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, concluímos que a terceira coordenada do ponto $D$ é também igual a zero (figura 3.). Logo, $D \in \pi_{XY} = \pi$.

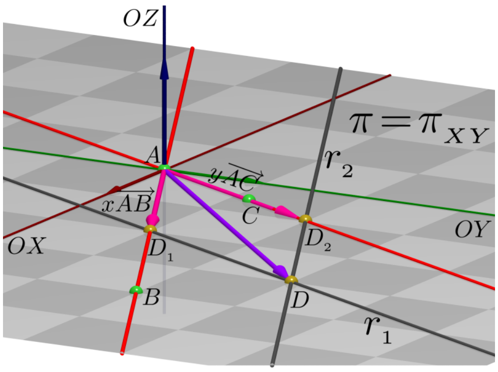


Figura 10: Sistema $OXYZ$ e $D \in \pi_{XY}$.

■

## Exemplo 6

*Considere os pontos* $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 3, 4)$, $C = (3, 4, 6)$, $D = (1, 1, 2)$ *e* $E = (4, 5, 2)$.

*Mostre que:*

**(a)** *$A$, $B$ e $C$ não são colineares e, portanto, determinam um plano $\pi$.*

**(b)** *$D$ não pertence ao plano $\pi$.*

**(c)** *$E$ pertence ao plano $\pi$.*

*Solução.*

Temos $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 2, 3)$, $\overrightarrow{AD} = (0, -1, -1)$ e $\overrightarrow{AE} = (3, 3, -1)$.

**(a)** Como $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são múltiplos um do outro, pois $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$, concluímos que $A$, $B$ e $C$ não são colineares, determinando, assim, um plano $\pi$.

**(b)** Segundo o teorema 1, $D \in \pi$ se, e somente se, existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}.$$

Isto é,

$$(0, -1, -1) = x(1, 1, 1) + y(2, 2, 3) = (x + 2y, x + 2y, x + 3y).$$

Portanto, os números $x$ e $y$ devem satisfazer as equações:

$$x + 2y = 0, \qquad x + 2y = -1, \qquad x + 3y = -1,$$

o qual é impossível, pois as duas primeiras implicam que $0 = -1$.

Concluímos, então, a não existência dos números $x$ e $y$ e, portanto, a impossibilidade da relação $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. Logo, $D \notin \pi$.

**(c)** De novo, pelo teorema 1, $E \in \pi$ se, e somente se, existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}.$$

Isto é,

$$(3, 3, -1) = x(1, 1, 1) + y(2, 2, 3) = (x + 2y, x + 2y, x + 3y).$$

Logo, $x$ e $y$ devem satisfazer, simultaneamente, as equações:

$$x + 2y = 3, \qquad x + 2y = 3, \qquad x + 3y = -1.$$

Ou seja, $x$ e $y$ são a solução do sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + 3y = -1. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $x = 11$ e $y = -4$. Portanto, $\overrightarrow{AE} = 11\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$, e os pontos $A$, $B$, $C$ e $E$ são coplanares. $\square$

Provaremos, agora, que quatro pontos não coplanares $A$, $B$, $C$ e $D$ determinam o espaço todo, ou melhor, que todo vetor do espaço se expressa de maneira única como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$.

## Definição 9

*Dizemos que os vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$ são* **linearmente independentes (LI)** *quando os pontos $A$, $B$, $C$ e $D$ não são coplanares, isto é, não pertencem a um mesmo plano.*

*Se os vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$ não são linearmente independentes, dizemos que eles são* **linearmente dependentes (LD)**. *Neste caso, os pontos $A$, $B$, $C$ e $D$ são coplanares.*

## Teorema 2

*Sejam $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_3}$ três vetores linearmente independentes no espaço. Então, para cada vetor $\overrightarrow{w}$ do espaço, existem escalares únicos $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que:*

$$\boxed{\overrightarrow{w} = x\,\overrightarrow{v_1} + y\,\overrightarrow{v_2} + z\,\overrightarrow{v_3}}$$

## Prova.

Sejam $A$, $B$, $C$, $D$ e $P$ pontos do espaço tais que $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AP}$. Como os vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_3}$ são LI, os pontos $A$, $B$, $C$ e $D$ não são coplanares.

Designamos $\pi_1$ o plano que contém os pontos $A$, $B$ e $C$, $\pi_2$ o plano determinado pelos pontos $A$, $B$ e $D$ e $\pi_3$ o plano determinado pelos pontos $A$, $C$ e $D$ (figura 3.).

Sejam agora $\pi_1'$, $\pi_2'$ e $\pi_3'$ os planos que passam pelo ponto $P$ e são paralelos aos planos $\pi_1$, $\pi_2$ e $\pi_3$, respectivamente.

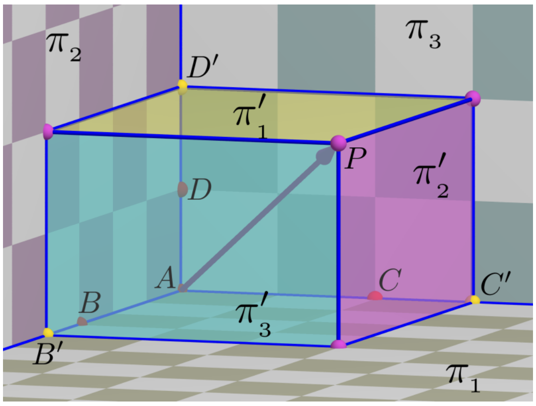


Figura 11: Determinando os pontos $B'$, $C'$ e $D'$.

Como a reta que contém os pontos $A$ e $D$ não está contida no plano $\pi_1$, esta reta intersecta o plano $\pi'_1$ num único ponto $D'$. Então,

$$\overrightarrow{AD'} = z\,\overrightarrow{AD},$$

para algum número $z \in \mathbb{R}$, o qual é determinado de forma única pelo ponto $D'$ e, portanto, pelo ponto $P$.
Analogamente, a reta que passa por $A$ e $C$ não está contida no plano $\pi_2$, logo intersecta o plano $\pi'_2$, paralelo a $\pi_2$, num único ponto $C'$, de onde concluímos que $\overrightarrow{AC'} = y\,\overrightarrow{AC}$, para algum escalar $y \in \mathbb{R}$ determinado de maneira única pelo ponto $P$.
Finalmente, a reta que passa pelos pontos $A$ e $B$ não está contida no plano $\pi_3$, intersectando, portanto, o plano $\pi'_3$ num único ponto $B'$. Assim, existe um escalar $x$, determinado de maneira única pelo ponto $P$, tal que $\overrightarrow{AB'} = x\,\overrightarrow{AB}$.
Por causa do paralelismo estabelecido entre os planos, os segmentos $AB'$, $AC'$ e $AD'$ são as arestas de um paralelepípedo no qual os pontos $A$ e $P$ são as extremidades de uma das diagonais. Portanto,

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC} + z\,\overrightarrow{AD} = x\,\overrightarrow{v_1} + y\,\overrightarrow{v_2} + z\,\overrightarrow{v_3},$$

como queríamos. ■

O teorema 2 diz que qualquer vetor do espaço se exprime de maneira única como combinação linear de três vetores LI dados. Dizemos então que o espaço **tem dimensão três**.

## Exemplo 7

*Considere os pontos* $O = (0,0,0)$, $A = (1,1,1)$, $B = (3,1,2)$, $C = (2,0,1)$ *e* $D = (1,0,-1)$.

**(a)** *Verifique que* $O$, $A$, $B$ *e* $C$ *são pontos coplanares.*

**(b)** *Verifique que* $O$, $A$, $B$ *e* $D$ *são pontos não coplanares.*

**(c)** *Escreva o vetor* $\overrightarrow{w} = (2,6,5)$ *como combinação linear dos vetores* $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$.

*Solução.*

**(a)** Observe, primeiro, que os pontos $O$, $A$ e $B$ não são colineares.

De fato, os vetores $\overrightarrow{OA} = (1,1,1)$ e $\overrightarrow{OB} = (3,1,2)$ não são múltiplos um do outro, pois a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ possui uma submatriz $2 \times 2$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, com determinante diferente de zero.

Para verificar que o ponto $C$ pertence ao plano $\pi$ determinado pelos pontos $O$, $A$ e $B$, devemos encontrar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\overrightarrow{OC} = \alpha\,\overrightarrow{OA} + \beta\,\overrightarrow{OB}\,,$$

ou seja:

$$(2,0,1) = \alpha(1,1,1) + \beta(3,1,2) = (\alpha + 3\beta, \alpha + \beta, \alpha + 2\beta).$$

Logo, $\alpha$ e $\beta$ devem ser solução das equações:

$$\alpha + 3\beta = 2 \tag{2}$$
$$\alpha + \beta = 0 \tag{3}$$
$$\alpha + 2\beta = 1 \tag{4}$$

Da equação (3), obtemos que $\alpha = -\beta$. Substituindo na equação (2), obtemos $-\beta + 3\beta = 2$, ou seja, $\beta = 1$; portanto, $\alpha = -1$. A equação (4) também é satisfeita por $\alpha = -1$ e $\beta = 1$.

Assim, $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ e, pelo teorema 1, $C$ pertence ao plano $\pi$.

**(b)** Sabemos que o ponto $D = (1,0,-1)$ pertence ao plano $\pi$ que contém $O$, $A$ e $B$ se, e somente se, existem escalares $\alpha$ e $\beta$ tais que:

$$\overrightarrow{OD} = \alpha\,\overrightarrow{OA} + \beta\,\overrightarrow{OB}\,.$$

Isto é, em termos de coordenadas,

$$\alpha + 3\beta = 1 \tag{5}$$
$$\alpha + \beta = 0 \tag{6}$$
$$\alpha + 2\beta = -1 \tag{7}$$

Da equação (6), obtemos $\alpha = -\beta$. Substituindo na equação (5), obtemos $\beta = \frac{1}{2}$.

Porém, substituindo $\alpha = -\beta$ na equação (7), obtemos $\beta = -1$.
Logo, como $\beta$ não pode assumir dois valores ao mesmo tempo, concluímos que não existem escalares $\alpha$ e $\beta$ que resolvam as três equações simultaneamente.
Portanto, $D \notin \pi$.

**(c)** Sabemos, do item **(b)**, que os vetores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$ são LI. Logo, pelo teorema 2, todo vetor do espaço se escreve, de forma única, como combinação linear destes vetores.
Logo, para $\overrightarrow{w} = (2, 6, 5)$, existem números reais únicos, $x$, $y$ e $z$, tais que:

$$\overrightarrow{w} = x\,\overrightarrow{OA} + y\,\overrightarrow{OB} + z\,\overrightarrow{OD}\,.$$

Isto é,

$$\begin{aligned} (2, 6, 5) &= x(1, 1, 1) + y(3, 1, 2) + z(1, 0, -1) \\ &= (x + 3y + z, x + y, x + 2y - z). \end{aligned}$$

Desta identidade, obtemos que:

$$x + 3y + z = 2 \tag{8}$$
$$x + y = 6 \tag{9}$$
$$x + 2y - z = 5 \tag{10}$$

Pela equação (9), $x = 6 - y$. Substituindo nas equações (8) e (10), temos:

$$\begin{cases} 6 - y + 3y + z &= 2 \\ 6 - y + 2y - z &= 5, \end{cases}$$

ou seja, temos o sistema:

$$\begin{cases} 2y + z &= -4 \\ y - z &= -1. \end{cases}$$

Somando estas duas equações, obtemos $3y = -5$, isto é, $y = -\dfrac{5}{3}$.

Logo,

$$z = y + 1 = -\frac{5}{3} + 1 = -\frac{2}{3} \quad \text{e} \quad x = 6 - y = 6 + \frac{5}{3} = \frac{23}{3}.$$

Portanto,

$$\overrightarrow{w} = \frac{23}{3}\,\overrightarrow{OA} - \frac{5}{3}\,\overrightarrow{OB} - \frac{2}{3}\,\overrightarrow{OD}$$

é a expressão de $\overrightarrow{w}$ como combinação linear de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$. $\square$

# Capítulo 9

# Produto Interno e Vetorial

## 1. Produto interno de dois vetores no espaço

As noções de norma e produto interno de vetores no espaço são completamente análogas às correspondentes noções já estudadas para vetores no plano. No entanto, por motivos de completeza, vamos rever estes conceitos considerando vetores no espaço, omitindo, porém, a maioria dos detalhes.

### Definição 1

A **norma** ou **comprimento** de um vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ no espaço é o número real não negativo

$$\boxed{\|\overrightarrow{v}\| = d(A, B)}$$

Como foi visto no plano, este número não depende do segmento $AB$ escolhido para representar o vetor $\overrightarrow{v}$.

Em particular, tomando um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ e representando o vetor $\overrightarrow{v}$ pelo segmento $OP$, as coordenadas de $\overrightarrow{v}$ coincidem com as coordenadas do ponto $P$ em relação ao sistema $OXYZ$. Assim, se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP} = (\alpha, \beta, \gamma)$, então $P = (\alpha, \beta, \gamma)$ e

$$\boxed{\|\overrightarrow{v}\| = d(O, P) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$

## Definição 2

• Um vetor $\overrightarrow{v}$ de norma igual a 1 é chamado **unitário**.

• O **ângulo** $\angle(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ entre dois vetores $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}$ não nulos é o menor ângulo formado pelos segmentos $AB$ e $AC$. Então, $\angle(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\in[0,\pi]$. Quando os vetores são colineares, isto é, $A$, $B$ e $C$ são colineares, então $\angle(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=0^o$ se $B$ e $C$ estão do mesmo lado em relação a $A$ na reta que os contém, e $\angle(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=180^o$ se $B$ e $C$ estão em lados opostos em relação a $A$.

Lembremos agora a definição de produto interno entre dois vetores:

## Definição 3

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ dois vetores no espaço. O **produto interno** entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é o número real $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$ definido da seguinte maneira:

$$\boxed{\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle=\begin{cases}0\,, & \text{se} \quad \overrightarrow{u}=\overrightarrow{0} \text{ ou } \overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}\\ \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\cos\theta, & \text{se} \quad \overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0} \text{ e } \overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0}\end{cases}}$$

onde $\theta=\angle(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

Desta definição, é fácil verificar que

$$\boxed{\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}\rangle=\|\overrightarrow{u}\|^2}$$

para qualquer vetor $\overrightarrow{u}$ no espaço. Este número é sempre não negativo e é igual a zero se, e somente se, $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$.

Por um cálculo análogo ao efetuado para o produto interno no plano, obtemos a seguinte proposição que caracteriza o produto interno em termos das coordenadas dos vetores.

## Proposição 1

*Sejam $\overrightarrow{u}=(\alpha,\beta,\gamma)$ e $\overrightarrow{v}=(\alpha',\beta',\gamma')$ vetores no espaço expressos em termos de suas coordenadas com respeito a um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$. Então,*

$$\boxed{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'}$$

Usando esta caracterização do produto interno, fica fácil provar as seguintes propriedades:

### Proposição 2

*Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores no espaço e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades:*

$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{(1)}\ \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle \\ \textbf{(2)}\ \langle \lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \lambda\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \\ \textbf{(3)}\ \langle \overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v} \rangle = \lambda\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \\ \textbf{(4)}\ \langle \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle \\ \textbf{(5)}\ \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle \end{array}}$$

A noção de perpendicularidade entre dois vetores no espaço é a mesma que no plano.

### Definição 4

*O vetor $\overrightarrow{u}$ é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{v}$, e escrevemos $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$, quando o ângulo entre eles é reto ou quando um dos vetores é igual a zero.*

Da definição do produto interno, obtemos a seguinte caracterização de perpendicularidade:

$$\boxed{\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0}$$

### Exemplo 1

*Determine os valores de $x$ e $y$ de modo que o vetor $\overrightarrow{u} = (x, y, 1)$ tenha norma igual a $\sqrt{3}$ e seja perpendicular ao vetor $\overrightarrow{v} = (1, 3, 4)$.*

*Solução.*

Temos que $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ se, e só se,

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle (x, y, 1), (1, 3, 4) \rangle = x + 3y + 4 = 0 \iff x = -3y - 4\,. \quad (1)$$

Por outro lado,

$$\|\overrightarrow{u}\|^2 = x^2 + y^2 + 1 = 3 \iff x^2 + y^2 = 2\,. \tag{2}$$

Por (1), $x = -3y - 4$. Substituindo na equação (2), obtemos:

$$\begin{aligned}(-3y-4)^2 + y^2 = 2 &\iff 10y^2 + 24y + 14 = 0\\ &\iff y = \frac{-24 \pm \sqrt{576 - 560}}{20}\\ &\iff y = -\frac{28}{20} = -\frac{7}{5} \text{ ou } y = \frac{-24+4}{20} = -1.\end{aligned}$$

O problema possui então duas soluções:

- $y_1 = -\frac{7}{5} \Longrightarrow x_1 = \frac{21}{5} - 4 = \frac{1}{5} \Longrightarrow \overrightarrow{u_1} = (\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}, 1)$;
- $y_2 = -1 \Longrightarrow x_2 = 3 - 4 = -1 \Longrightarrow \overrightarrow{u_2} = (-1, -1, 1)$.

□

# 2. Produto vetorial de dois vetores no espaço

O produto interno de dois vetores, como vimos, é um número real e tem sentido tanto no plano quanto no espaço.

Já o produto vetorial de dois vetores, que definiremos abaixo, só faz sentido no espaço e dá como resultado um outro vetor.

O produto vetorial, como o produto interno, também pode ser definido geometricamente, estabelecendo sua **norma**, sua **direção** e seu **sentido**, mas será definido algebricamente para facilitar a dedução de suas principais propriedades.

Seja $OXYZ$ um sistema de eixos ortogonais no espaço e consideremos os vetores $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$, dados por suas coordenadas.

### Definição 5

*O produto vetorial de $\overrightarrow{u}$ por $\overrightarrow{v}$ é o vetor*

$$\boxed{\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (y_1z_2 - y_2z_1, -(x_1z_2 - x_2z_1), x_1y_2 - x_2y_1).}$$

Um dispositivo prático para determinar o produto vetorial consiste em calcular o "determinante simbólico" da matriz $3 \times 3$ cujos elementos da primeira linha são os vetores $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ e $\overrightarrow{e_3}$, os elementos da segunda linha são as coordenadas do vetor $\overrightarrow{u}$ e os elementos da terceira são as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$:

$$\boxed{\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3}}$$

onde $\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0), \overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0)$ e $\overrightarrow{e_3} = (0, 0, 1)$ são os vetores unitários na direção e sentido dos semieixos positivos $OX, OY$ e $OZ$, respectivamente.

**Proposição 3**

**(Propriedades do Produto Vetorial.)** *Sejam* $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1), \overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$ *e* $\overrightarrow{w} = (x_3, y_3, z_3)$ *vetores no espaço e seja* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Então:*

*(1)* $< \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} > = < \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} > = 0$, *isto é,* $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ *é um vetor ortogonal a* $\overrightarrow{u}$ *e a* $\overrightarrow{v}$.

Com efeito,

$$\begin{aligned} < \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} > &= (y_1z_2 - y_2z_1)x_1 - (x_1z_2 - x_2z_1)y_1 + (x_1y_2 - x_2y_1)z_1 \\ &= x_1y_1z_2 - x_1y_2z_1 - x_1y_1z_2 + x_2y_1z_1 + x_1y_2z_1 - x_2y_1z_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

De modo análogo, podemos mostrar que $< \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} > = 0$.

*(2)* $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ *se, e só se, um dos vetores* $\overrightarrow{u}$ *ou* $\overrightarrow{v}$ *é múltiplo do outro.*

*Em particular,* $\overrightarrow{0} \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$ *e* $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ *para todo vetor* $\overrightarrow{u}$.

De fato, pela proposição 2 do capítulo 8, sabemos que um dos vetores $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ é múltiplo do outro se, e só se,

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou seja, se, e só se,

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \left( \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 0).$$

*(3)* $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \, \operatorname{sen}\theta$*, onde* $\theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$*.*

Temos:

$$\begin{aligned}
& \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|^2 = (y_1z_2 - y_2z_1)^2 + (x_1z_2 - x_2z_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\
= \; & {y_1}^2{z_2}^2 - 2y_1y_2z_1z_2 + {y_2}^2{z_1}^2 + {x_1}^2{z_2}^2 - 2x_1x_2z_1z_2 + {x_2}^2{z_1}^2 + {x_1}^2{y_2}^2 \\
& -2x_1x_2y_1y_2 + {x_2}^2{y_1}^2 \\
= \; & {x_1}^2({y_2}^2 + {z_2}^2) + {y_1}^2({x_2}^2 + {z_2}^2) + {z_1}^2({x_2}^2 + {z_2}^2) - 2x_1x_2y_1y_2 \\
& -2z_1z_2(x_1x_2 + y_1y_2) \\
= \; & {x_1}^2({x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2) + {y_1}^2({x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2) + {z_1}^2({x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2) \\
& -{x_1}^2{x_2}^2 - {y_1}^2{y_2}^2 - {z_1}^2{z_2}^2 - 2x_1x_2y_1y_2 - 2z_1z_2(x_1x_2 + y_1y_2) \\
= \; & ({x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2)({x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2) - ({x_1}^2{x_2}^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + {y_1}^2{y_2}^2 \\
& +2z_1z_2(x_1x_2 + y_1y_2) + {z_1}^2{z_2}^2) \\
= \; & ({x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2)({x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2) - ((x_1x_2 + y_1y_2)^2 + \\
& 2z_1z_2(x_1x_2 + y_1y_2) + {z_1}^2{z_2}^2) \\
= \; & ({x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2)({x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2) - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 \\
= \; & \|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2 - \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle^2.
\end{aligned}$$

Mas, como $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \, \cos\theta$, segue que:

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|^2 &= \|\overrightarrow{u}\|^2 \, \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 \, \|\overrightarrow{v}\|^2 \, \cos^2\theta \\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2 \, \|\overrightarrow{v}\|^2 (1 - \cos^2\theta) \\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2 \, \|\overrightarrow{v}\|^2 \, \operatorname{sen}^2\theta.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \, \operatorname{sen}\theta$.

*(4) Se* $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$*, então* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ *são LI.*

Sejam $O, A, B$ e $C$ pontos tais que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OC}$. Como $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, temos, pela propriedade **(2)**, que os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não são múltiplos, ou seja, os pontos $O, A$ e $B$ não são colineares.

Seja $\pi$ o único plano que passa pelos pontos $O, A$ e $B$. Suponhamos, por absurdo, que os vetores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ não são LI.

Então o ponto $C$ pertence ao plano $\pi$. Pelo teorema 1 do capítulo 8,

existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que
$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}.$$

Logo, pela proposição 2,
$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|^2 &= \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \rangle \\
&= \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \rangle \\
&= \lambda\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle + \mu\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

uma contradição, pois, por hipótese, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0} (\Longleftrightarrow \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| \neq 0)$.

*(5)* $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u})$

Com efeito,
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} &= (y_1z_2 - y_2z_1, -(x_1z_2 - x_2z_1), x_1y_2 - x_2y_1) \\
&= -(y_2z_1 - y_1z_2, -(x_2z_1 - x_1y_2), x_2y_1 - x_1y_2) \\
&= -(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u})
\end{aligned}$$

*(6)* $(\lambda\overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \times (\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda\,(u \times \overrightarrow{v})$.

De fato, como $\lambda\overrightarrow{u} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$, temos:
$$\begin{aligned}
(\lambda\overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{v} &= ((\lambda y_1)z_2 - y_2(\lambda z_1), -((\lambda x_1)z_2 - x_2(\lambda z_1)), (\lambda x_1)y_2 - x_2(\lambda y_1)) \\
&= \lambda(y_1z_2 - y_2z_1, -(x_1z_2 - x_2z_1), x_1y_2 - x_2y_1) \\
&= \lambda(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})\,.
\end{aligned}$$

A outra identidade, $\overrightarrow{u} \times (\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda\,(u \times \overrightarrow{v})$, prova-se de maneira análoga.

*(7)* $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v}$ *e* $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$.

Com efeito, sendo $\overrightarrow{w} = (x_3, y_3, z_3)$ e $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} = (x_1 + x_3, y_1 + y_3, z_1 + z_3)$, temos:
$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) \times \overrightarrow{v} &= ((y_1 + y_3)z_2 - y_2(z_1 + z_3), -((x_1 + x_3)z_2 - x_2(z_1 + z_3)), \\
&\quad (x_1 + x_3)y_2 - x_2(y_1 + y_3)) \\
&= (y_1z_2 - y_2z_1 + y_3z_2 - y_2z_3, -(x_1y_2 - x_2z_1 + x_3z_2 - x_2z_3), \\
&\quad x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_2 - x_2y_3) \\
&= (y_1z_2 - y_2z_1, -(x_1y_2 - x_2z_1), x_1y_2 - x_2y_1) \\
&\quad +(y_3z_2 - y_2z_3, -(x_3z_2 - x_2z_3), x_3y_2 - x_2y_3) \\
&= \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v}.
\end{aligned}$$

De forma análoga, podemos verificar que $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$.

*(8)* $\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$*, onde*

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

*é a matriz $3 \times 3$ cujas linhas são as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ $\overrightarrow{w}$, na ordem em que são listados.*

De fato, temos que:

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle &= \langle (y_1 z_2 - y_2 z_1, -(x_1 z_2 - x_2 z_1), x_1 y_2 - x_2 y_1), (x_3, y_3, z_3) \rangle \\ &= x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1) - y_3(x_1 z_2 - x_2 z_1) + z_3(x_1 y_2 - x_2 y_1)\,. \end{aligned}$$

Por outro lado, o determinante da matriz (3), quando desenvolvido pela regra de Sarrus, nós dá

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} . \\ &= x_1 y_2 z_3 + y_1 z_2 x_3 + z_1 x_2 y_3 - x_3 y_2 z_1 - y_3 z_2 x_1 - z_3 x_2 y_1 \\ &= x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1) - y_3(x_1 z_2 - x_2 z_1) + z_3(x_1 y_2 - x_2 y_1)\,. \end{aligned}$$

Portanto, $\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

*(9)* $\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = 0$ *se, e somente se,* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ *e* $\overrightarrow{w}$ *são vetores LD.*

Suponhamos que $\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = 0$. Então ocorre uma das seguintes alternativas:

- $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$,
- $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$.

Sejam $A, B$ e $C$ pontos do plano tais que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OC}$.

Se a primeira alternativa ocorre, então, pela propriedade **(2)**, os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são múltiplos, ou seja, os pontos $O, A$ e $B$ são colineares. Logo, os pontos $O$, $A$, $B$ e $C$ são coplanares ($\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são LD).

Suponhamos agora que $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$.

Como $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, os pontos $O, A$ e $B$ não são colineares. Seja $\pi$ o único plano que contém estes pontos.

Pela propriedade **(4)**, os vetores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ são LI.

Logo, pelo teorema 2 do capítulo 8, existem $\lambda, \mu, \delta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} + \delta(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}).$$

Então,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} + \delta(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \rangle \\ &= \lambda\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle + \mu\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle + \delta\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \rangle \\ &= \delta\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|^2 \end{aligned} .$$

pois, pela propriedade **(1)**, $\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle = \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$.

Como $\delta\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|^2 = 0$ e $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| \neq 0$, segue que $\delta = 0$, ou seja,

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}.$$

Portanto, pelo teorema 1 do capítulo 8, o ponto $C$ pertence ao plano $\pi$, ou seja, os pontos $O, A, B$ e $C$ são coplanares ($\Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OC}$ são vetores LD).

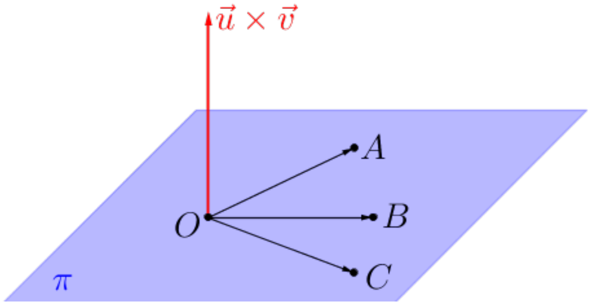


Figura 1: Propriedade **(9)**.

Reciprocamente, suponhamos que os vetores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são LD.

Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são múltiplos, então $\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = 0$, pois, pela propriedade **(2)**, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não são múltiplos, pela observação 9 do capítulo 8, os pontos $O, A$ e $B$ não são colineares.

Seja $\pi$ o plano que passa por $O, A$ e $B$. Como $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ não são LI, o ponto $C$ pertence ao plano $\pi$.

Pelo teorema 1 do capítulo 8, existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}.$$

Portanto, pela proposição 2,

$$\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \rangle = \lambda\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle + \mu\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle = 0.$$

*(10) $\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle \neq \overrightarrow{0}$ se, e somente se, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são vetores LI.*

Segue diretamente da propriedade **(9)**.

## 2.1 Interpretação geométrica da norma do produto vetorial

Sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA} \neq \overrightarrow{0}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB} \neq \overrightarrow{0}$ vetores não colineares. Seja $C$ tal que o quadrilátero $OACB$ é um paralelogramo, que designamos $\mathcal{P}$.

A altura de $\mathcal{P}$, considerando o segmento $OA$ como base, é

$$h = |\overrightarrow{OB}| \operatorname{sen} \angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}).$$

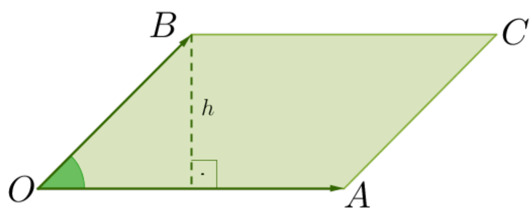


Figura 2: Paralelogramo $OACB$ de altura $h$.

Logo,

$$\boxed{\begin{aligned} \text{área}\,(\mathcal{P}) &= \|\overrightarrow{OA}\|\,\|\overrightarrow{OB}\| \operatorname{sen}\angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \\ &= \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\| \operatorname{sen}\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \\ &= \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| \end{aligned}}$$

Isto é, *a norma do produto vetorial de $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ por $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ é a* *área do paralelogramo que tem por lados adjacentes os segmentos $OA$ e $OB$.*

Note que, se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são colineares, ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, então o paralelogramo $\mathcal{P}$ fica reduzido a um segmento ou a um ponto (paralelogramo degenerado) e tem, portanto, área zero. Como, nestes casos, pela propriedade (2), $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = 0$, a interpretação geométrica continua válida.

### Observação 1

Pela propriedade **(2)**, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ se, e só se, um dos vetores $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ é múltiplo do outro.

Caso contrário, pela propriedade **(1)**, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ é um vetor não nulo perpendicular ao plano gerado pelos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Isto nos dá a direção do vetor $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$. E, pela propriedade **(3)**, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ é um vetor de comprimento igual a $\|\overrightarrow{u}\|\ \|\overrightarrow{v}\|\ \operatorname{sen}\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, ou seja, igual a área do paralelogramo construído sobre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

Como existem apenas dois vetores de mesma direção e mesma norma, ele e seu inverso aditivo, o vetor fica determinando se escolhermos o seu sentido.

O sentido escolhido, na definição, para o produto vetorial é tal que

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) = \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|^2 > 0.$$

Mas este sentido depende do sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ escolhido. Portanto, o produto vetorial, como definido acima, fica determinado geometricamente a menos de seu sentido.

É possível dar uma definição geométrica para o produto vetorial, isto é, podemos escolher geometricamente o sentido do produto vetorial. Vejamos:

### Definição 6

*Seja $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ um terno ordenado de vetores LI. Dizemos que $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ é um terno positivamente orientado se ele satisfaz a regra da mão direita, ou seja, ao esticarmos os dedos indicador, médio, anular e mínimo na direção e sentido do vetor $\overrightarrow{u_1}$ e depois fecharmos a mão na direção e sentido do vetor $\overrightarrow{u_2}$, o polegar esticado apontará na direção e sentido do vetor $\overrightarrow{u_3}$.*

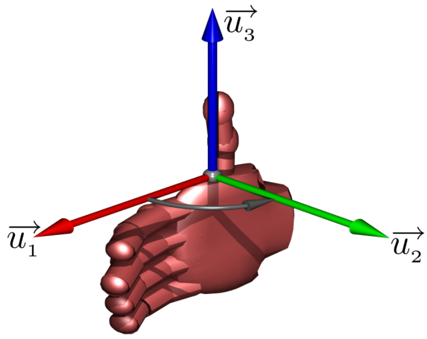


Figura 3: Regra da mão direita.

Dada esta definição, o produto vetorial $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ ficaria determinado geometricamente se estabelecêssemos, em sua definição, que o terno ordenado $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\}$ é positivo.

Teríamos então de provar que esta definição geométrica coincide com a definição dada em coordenadas, desde que $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ fosse também um terno positivo. Mas isso não será feito, por ser muito trabalhoso e pelo fato de o sentido do produto vetorial não importar nas aplicações que faremos no texto.

## Exemplo 2

*Determinar o produto vetorial* $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$, *onde* $\overrightarrow{u} = (1, 2, 3)$ *e* $\overrightarrow{v} = (2, -1, 1)$.

*Solução.*
Temos:

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3} = 5\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2} - 5\overrightarrow{e_3}\,.$$

Logo, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (5, 5, -5)\,.$ □

## Exemplo 3

*Sejam* $P_0 = (1, -1, 2)$, $P = (1, 3, 1)$ *e* $Q = (2, -1, 0)$. *Calcule a área do paralelogramo* $\mathcal{P}$ *que tem como arestas adjacentes os segmentos* $P_0P$ *e* $P_0Q$.

*Solução.*
Sendo $\overrightarrow{P_0P} = (0, 4, -1)$ e $\overrightarrow{P_0Q} = (1, 0, -2)$, temos:

$$\overrightarrow{P_0P} \times \overrightarrow{P_0Q} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3} = (-8, -1, -4).$$

Portanto, área $(\mathcal{P}) = \|\overrightarrow{P_0P} \times \overrightarrow{P_0Q}\| = \|(-8,-1,-4)\| = \sqrt{64+1+16} = 9\,.$

$\square$

## Exemplo 4

*Determine os valores de* $t \in \mathbb{R}$ *para os quais os vetores* $\overrightarrow{u} = (2, 0, t)$ *e* $\overrightarrow{v} = (t, 0, 2)$ *sejam colineares.*

*Solução.*

Sabemos que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são colineares se, e somente se, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.
Calculando, temos:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} &= \begin{vmatrix} 0 & t \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} 2 & t \\ t & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ t & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3} \\ &= 0\,\overrightarrow{e_1} - (4-t^2)\,\overrightarrow{e_2} + 0\,\overrightarrow{e_3} \\ &= (t^2-4)\,\overrightarrow{e_2}\,. \end{aligned}$$

Logo, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (0, t^2-4, 0) = (0,0,0) = \overrightarrow{0}$ se, e somente se, $t^2 - 4 = 0$, ou seja, se, e somente se, $t = 2$ ou $t = -2$. $\square$

## Observação 2

Já provamos que o produto vetorial não é comutativo(propriedade **(6)**). É importante também observar que **o produto vetorial não é associativo**, como mostra o exemplo a seguir.

## Exemplo 5

*Sejam* $\overrightarrow{u} = (1, 2, 3)$, $\overrightarrow{v} = (1, 0, 2)$ *e* $\overrightarrow{w} = (1, 0, 0)$. *Mostre que*

$$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})\,.$$

*Solução.*

Como,

$$\bullet \quad \begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{e_1} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{e_2} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{e_3} \\ &= 4\,\vec{e_1} + \vec{e_2} - 2\,\vec{e_3} = (4, 1, -2)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{e_1} - \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{e_2} + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{e_3} \\ &= -2\,\vec{e_2} - \vec{e_3} = (0, -2, -1) \end{aligned}$$

e

$$\bullet \quad \begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{e_1} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{e_2} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{e_3} \\ &= 2\,\vec{e_2} = (0, 2, 0)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{e_1} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{e_2} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{e_3} \\ &= -6\,\vec{e_1} + 2\,\vec{e_3} = (-6, 0, 2)\,, \end{aligned}$$

obtemos que $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$. □

### Definição 7

*O* **produto misto** *dos vetores* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *do espaço é o número real*

$$\boxed{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle}$$

### Observação 3

O produto misto de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ nada mais é, pela propriedade (8), que o determinante da matriz $3 \times 3$ que tem como linhas as coordenadas dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, na ordem em que são listados. Isto é,

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

## 2.2 Interpretação geométrica do produto misto

Sejam $O$, $A$, $B$ e $C$ pontos não coplanares e consideremos os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$.

Seja $\mathcal{P}$ o paralelepípedo que tem como arestas adjacentes os segmentos $OA$, $OB$ e $OC$.

Considerando o paralelogramo $\mathcal{T}$ de lados adjacentes $OA$ e $OB$ como base de $\mathcal{P}$, temos:

$$\mathrm{Vol}\,(\mathcal{P}) = \text{área}\,(\mathcal{T}) \cdot \text{altura}\,(\mathcal{P})\,.$$

Sendo área $(\mathcal{T}) = \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|$ e altura $(\mathcal{P}) = \|\overrightarrow{w}\|\,|\cos\angle(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})|$, temos:

$$\mathrm{Vol}\,(\mathcal{P}) = \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| \cdot \|\overrightarrow{w}\|\,|\cos\angle(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})| = |\langle\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\rangle|\,.$$

Ou seja, **o volume de $\mathcal{P}$ é o módulo do produto misto dos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$**:

$$\boxed{\mathrm{Vol}\,(\mathcal{P}) = |\,[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]\,|}$$

ou, em termos dos vértices $O$, $A$, $B$ e $C$:

$$\boxed{\mathrm{Vol}\,(\mathcal{P}) = \left|\,\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right]\,\right|}$$

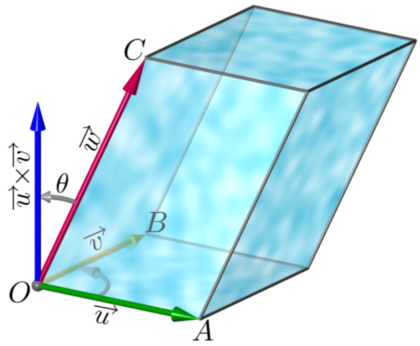

Figura 4: Interpretação geométrica do produto misto.

Por outro lado, **se os pontos $O$, $A$, $B$ e $C$ são coplanares**, isto é, se os vetores

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}\,,\quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{w} = \overrightarrow{OC}$$

não são LI, o paralelepípedo fica reduzido a um paralelogramo, a um segmento ou a um ponto, tendo, portanto, **volume zero**. Este fato concorda com a propriedade (9) do produto vetorial:

$$\boxed{\text{Se } \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v} \text{ e } \overrightarrow{w} \text{ não são LI, então } [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0}\,.$$

As propriedades abaixo do produto misto, ou do determinante, são consequências imediatas das propriedades do produto interno e do produto vetorial.

### Proposição 4

**(Propriedades do Produto Misto.)** *Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u_0}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v_0}$, $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{w_0}$ vetores no espaço e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Então:*

**(1)** *$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0$ se, e somente se, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ não são LI (ou seja, são LD).*

**(2)** *$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] \neq 0$ se, e somente se, $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ são LI.*

**(3)** *O sinal do produto misto muda quando permutamos dois fatores. Isto é,*

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}] .$$
$$= -[\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}] = [\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}]$$

**(4)** $[\lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \lambda\overrightarrow{w}] = \lambda\,[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$.

**(5)** $[\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u_0}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{u_0}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$.

$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v_0}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_0}, \overrightarrow{w}]$.

$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} + \overrightarrow{w_0}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_0}]$.

## Exemplo 6

*Verifique se os pontos* $A = (2, 2, 1)$, $B = (3, 1, 2)$, $C = (2, 3, 0)$ *e* $D = (2, 3, 2)$ *são coplanares.*

*Solução.*

Consideremos os vetores

$$\overrightarrow{AB} = (1, -1, 1)\,, \quad \overrightarrow{AC} = (0, 1, -1)\,, \quad \overrightarrow{AD} = (0, 1, 1)\,.$$

Sabemos que os pontos $A$, $B$, $C$ e $D$ são coplanares se, e somente se,

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = 0.$$

Calculando, temos:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left( \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 1, 1)\,.$$

Logo,

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = \langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle = \langle (0, 1, 1), (0, 1, 1) \rangle = 2 \neq 0\,.$$

Portanto, os pontos $A$, $B$, $C$ e $D$ não são coplanares. □

## Exemplo 7

*Mostre que* $\overrightarrow{u} = (1, 0, 2)$, $\overrightarrow{v} = (2, 1, 0)$ *e* $\overrightarrow{w} = (1, 1, 1)$ *são vetores LI, e calcule o volume do paralelepípedo cujas arestas adjacentes são* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *e* $\overrightarrow{w}$.

*Solução.*

Sabemos que o terno de vetores é LI se, e somente se, $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] \neq 0$.

Sendo,

$$\begin{aligned}[\,\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\,] = \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}\rangle &= \left( \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= -2 + 4 + 1 = 3 \neq 0, \end{aligned}$$

os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são LI.

Além disso, o volume do paralelepípedo $\mathcal{P}$, cujas arestas são $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, é:

$$\text{Vol}\,(\mathcal{P}) = \big|\,[\,\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\,]\,\big| = |3| = 3\,.$$

□

## Exemplo 8

*Determine, caso existam, os valores de $t \in \mathbb{R}$ para os quais os vetores $\overrightarrow{u} = (t, -1, 1)$, $\overrightarrow{v} = (1, t, 2)$ e $\overrightarrow{w} = (3, t, 1)$ são coplanares.*

*Solução.*

Sabemos que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são coplanares se, e somente se, $[\,\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\,] = 0$. Então:

$$\begin{aligned}[\,\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\,] &= 3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ t & 2 \end{vmatrix} - t \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{vmatrix} \\ &= 3(-2 - t) - t(2t - 1) + 1(t^2 + 1) \\ &= -t^2 - 2t - 5\,. \end{aligned}$$

Logo, $[\,\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\,] = 0$ se, e somente se, $t^2 + 2t + 5 = 0$.

Como o discriminante desta última equação é $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$, a equação não tem raízes reais, isto é, $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Assim, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são LI para todos os valores reais de $t$. □

## Exemplo 9

*Considere os pontos $O = (0, 0, 0)$, $P = (1, 2, 0)$, $Q = (3, 1, 1)$ e $R = (1, -1, 1)$ e os vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ}$ e $\overrightarrow{w} = OR$.*

**(a)** *Determine a altura relativa à base de lados $OP$ e $OQ$ do paralelepípedo $\mathcal{P}$ que tem por vértices $O$, $P$, $Q$ e $R$.*

**(b)** *Calcule a área do triângulo $\mathcal{T}$ de vértices $P$, $Q$ e $R$.*

**(c)** *Calcule o volume do paralelepípedo $\mathcal{P}$.*

**(d)** *Calcule a área externa do tetraedro $\sigma$ cujos vértices são $O$, $P$, $Q$ e $R$.*

*Solução.*

**(a)** A altura $h$ do paralelepípedo $\mathcal{P}$, tomando como base o paralelogramo de lados adjacentes $OP$ e $OQ$, é:

$$h = \|\overrightarrow{w}\| \left|\cos \angle(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})\right| = \|\overrightarrow{w}\| \frac{|\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\rangle|}{\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| \, \|\overrightarrow{w}\|} = \frac{|\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\rangle|}{\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|},$$

onde

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3} = (2, -1, -5),$$

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| &= \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{4+1+25} = \sqrt{30}, \\ \langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\rangle &= \langle (2,-1,-5), (1,-1,1)\rangle = 2+1-5 = -2. \end{aligned}$$

Assim, $h = \dfrac{|-2|}{\sqrt{30}} = \dfrac{2}{\sqrt{30}} = \dfrac{\sqrt{30}}{15}$.

**(b)** O triângulo $\mathcal{T}$ tem por arestas adjacentes os segmentos $PQ$ e $PR$. Logo, a sua área é

$$\text{área}\,(\mathcal{T}) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\|.$$

Como $\overrightarrow{PQ} = (2, -1, 1)$ e $\overrightarrow{PR} = (0, -3, 1)$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3} \\ &= (2, -2, 6) \end{aligned}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \text{área}\,(\mathcal{T}) &= \frac{\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\|}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 6^2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{44}}{2} = \frac{2\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11} \end{aligned}.$$

**(c)** Pelo item **(a)**,

$$\text{Vol}\,(\mathcal{P}) = \left|\,[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]\,\right| = \left|\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\rangle\right| = \left|-2\right| = 2.$$

**(d)** A área externa do tetraedro $\sigma$ de vértices $O$, $P$, $Q$ e $R$ é a soma das

áreas dos triângulos $\triangle OPQ$, $\triangle OPR$, $\triangle OQR$ e $\triangle PQR = \mathcal{T}$, a última das quais calculamos no item (b).
Calculemos as áreas dos outros três triângulos:

$$\begin{aligned}
\text{área}\,(\triangle OPQ) &= \frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}\| = \frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\| = \frac{1}{2}\sqrt{30}\,;\\
\text{área}\,(\triangle OPR) &= \frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OR}\| = \frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{w}\|\,;\\
\text{área}\,(\triangle OQR) &= \frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{OQ}\times\overrightarrow{OR}\| = \frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}\|\,.
\end{aligned}$$

Como

- $$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{w} &= \begin{vmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}\overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}\overrightarrow{e_3}\\ &= (2,-1,-3)\,,\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w} &= \begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}\overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\overrightarrow{e_3}\\ &= (2,-2,-4)\,,\end{aligned}$$

segue que:

$$\begin{aligned}
\text{área}\,(\triangle OPR) &= \frac{\|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{w}\|}{2} = \frac{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-3)^2}}{2}\\
&= \frac{\sqrt{14}}{2}\,;\\
\text{área}\,(\triangle OQR) &= \frac{\|\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}\|}{2} = \frac{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-4)^2}}{2}\\
&= \frac{\sqrt{24}}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{2}.
\end{aligned}$$

Logo, a área do tetraedro $\sigma$ é:

$$\begin{aligned}
\text{área}\,(\sigma) &= \text{área}\,(\triangle OPQ) + \text{área}\,(\triangle OPR) + \text{área}\,(\triangle OQR) + \text{área}\,(\triangle PQR)\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{30} + \frac{1}{2}\sqrt{14} + \frac{1}{2}\sqrt{24} + \frac{1}{2}\sqrt{44}\\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{30}+\sqrt{14}+\sqrt{24}+\sqrt{44}\right)\,.
\end{aligned}$$

□