Capítulo 19

Coordenadas polares

Neste capítulo, veremos que há outra maneira de expressar a posição de um ponto no plano, distinta da forma cartesiana. Embora os sistemas cartesianos sejam muito utilizados, há curvas no plano cuja equação toma um aspecto muito simples em relação a um referencial não cartesiano.

Definição 1

Um *sistema de coordenadas polares* $O\rho\theta$ *no plano* consiste de um ponto O, denominado *polo* ou *origem*, e de uma semirreta OA, com origem em O, denominada *eixo polar*.

Dado um ponto P do plano, suas coordenadas, neste sistema, são os valores ρ e θ, onde ρ é a distância de P a O e θ é a medida do ângulo do eixo polar para a semirreta OP. Escrevemos:

$$\boxed{P = (\rho, \theta)}$$

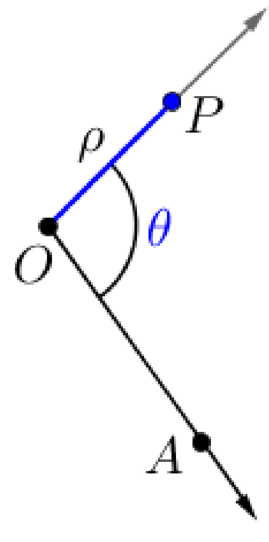

Figura 1: Coordenadas polares.

Convencionamos que a medida do ângulo tomada de OA para OP no sentido anti-horário é positiva e negativa no sentido horário.

Observação 1

(I) A primeira coordenada polar ρ de um ponto distinto do polo é sempre maior que zero, pois ela representa a distância do ponto ao polo. Mas podemos tomar também valores negativos para ρ, convencionando-se, neste caso, marcar a distância $|\rho|$ na semirreta oposta, ou seja, o ponto $P = (\rho, \theta)$, com $\rho < 0$, corresponde ao ponto $P = (-\rho, \theta + \pi)$.

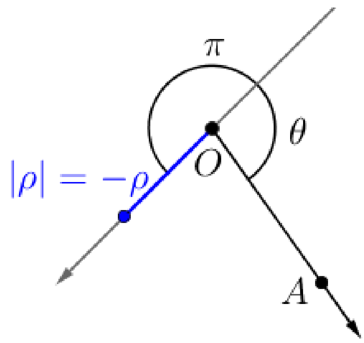

Figura 2: $(\rho, \theta) = (-\rho, \theta + \pi)$

(II) Se a primeira coordenada polar de um ponto for zero, então este ponto é o polo. O ângulo do polo não está definido.

(III) Podemos usar a medida em radianos ou em graus para os ângulos. Por exemplo, $P = (2, 30^o) = (2, \pi/6)$.

(IV) O par (ρ, θ) determina, de maneira única, um ponto do plano. No entanto, um ponto no plano pode ser determinado por meio de várias coordenadas polares distintas, pois, de acordo com a construção acima, as medidas θ e $\theta + 2\pi k$, onde $k \in \mathbb{Z}$, estão associadas ao mesmo ângulo e, portanto, (ρ, θ) e $(\rho, \theta + 2\pi k)$ representam o mesmo ponto do plano. Além disso, pela observação **(I)**, como $(\rho, \theta) = (-\rho, \theta + \pi)$ se $\rho < 0$, então $(-\rho, \theta + \pi) = (\rho, \theta + 2\pi) = (\rho, \theta)$ se $\rho > 0$. Ou seja, $(\rho, \theta) = (-\rho, \theta + \pi)$ para todo $\rho \in \mathbb{R}$.

Assim, $(\rho, \theta) = (-\rho, \theta + (2k + 1)\pi)$, quaisquer que sejam $k \in \mathbb{Z}$ e $\rho \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1

No sistema de coordenadas polares $O\rho\theta$ mostrado na figura 3,

Figura 3: Sistema $O\rho\theta$

localize os seguintes pontos e determine outras coordenadas polares que os representem:

(a) $P_1 = (1, 0^o)$.

Solução.

Figura 4: Ponto P_1 no sistema $O\rho\theta$

Podemos representar também P_1 das seguintes maneiras: $P_1 = (-1, 180^o) = (1, 360^o\, k)$, $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

(b) $P_2 = (4, -\pi/4)$.

Solução.

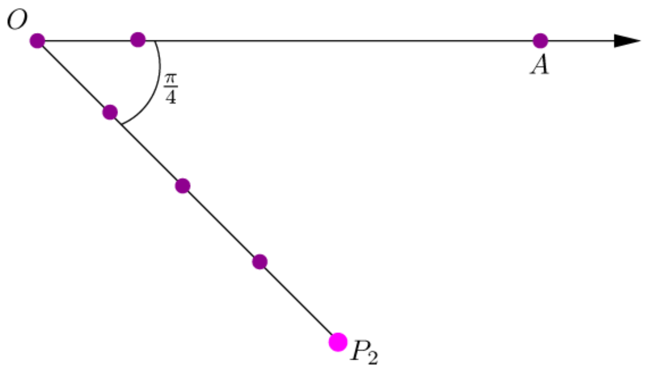

Figura 5: Ponto P_2 no sistema $O\rho\theta$

Por exemplo, $P_2 = (-4, -\pi/4+\pi) = (4, -\pi/4+2\pi k)$, para $k \in \mathbb{Z}$, são outras maneiras de representar o ponto P_2. $\square$

(c) $P_3 = (-1, 0^o)$.

Solução.

Figura 6: Ponto P_3 no sistema $O\rho\theta$

Neste caso, como $\rho = -1$, temos que $P_3 = (1, 0^o+180^o) = (1, 180^o) = (1, \pi) = (1, \pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

(d) $P_4 = (-2, \pi/3)$.

Solução.

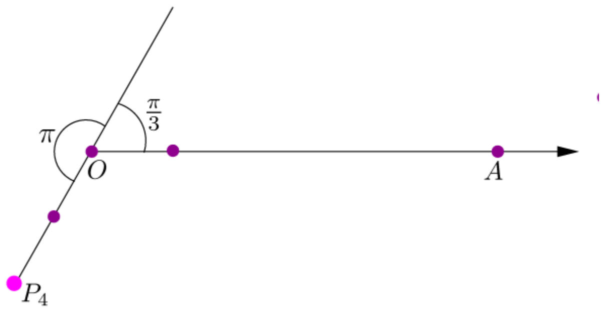

Figura 7: Ponto P_4 no sistema $O\rho\theta$

Sendo $\rho < 0$, temos que $P_4 = (2, \pi/3 + \pi) = (2, 4\pi/3 + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$. □

Exemplo 2

Seja $O\rho\theta$ um sistema de coordenadas polares no plano. Determine os pontos $P = (\rho, \theta)$ do plano que satisfazem à equação $\rho = 3$.

Solução.

Como na equação só figura a variável ρ, a outra, θ, é arbitrária.

Isso significa que a equação só estabelece condição sobre a distância do ponto ao eixo polar, não importando a medida do ângulo.

Portanto, os pontos do plano que satisfazem à equação são aqueles cuja distância ao polo O é igual a 3.

O conjunto solução é, portanto, o círculo de centro O e raio 3 (Figura 8).

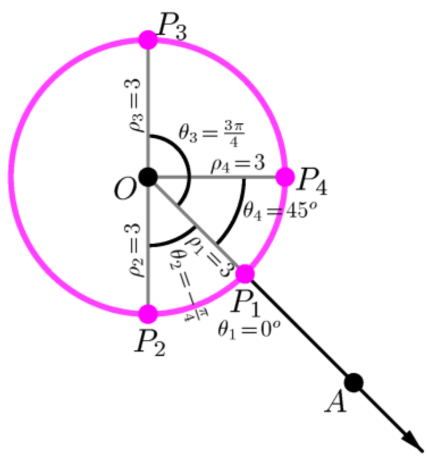

Figura 8: Pontos com $\rho = 3$.

□

Observação 2

Pelo primeiro item da observação 1, $\rho = -3$ também é uma equação polar do círculo acima. Em geral, $\rho = a$ é a equação polar de um círculo de raio $|a|$ centrado na origem.

Exemplo 3

Seja $O\rho\theta$ um sistema de coordenadas polares no plano. Determine o conjunto r dos pontos $P = (\rho, \theta)$ do plano que satisfazem à equação $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Solução.

Novamente, como na equação só figura uma variável, a outra é arbitrária. Logo,

$$r = \{(\rho, \theta) \,|\, \theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{e} \quad \rho \in \mathbb{R}\},$$

ou seja, r é a reta que passa pelo polo O e tem inclinação $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ em relação à semirreta OA (Figura 9).

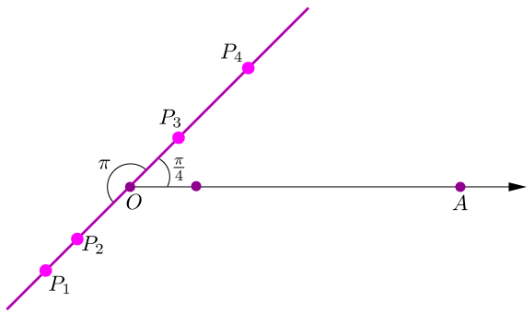

Figura 9: Pontos $P_1, \ldots, P_4$ na reta r.

□

Observação 3

Qualquer reta que passa pelo polo O tem equação polar da forma $\theta = \theta_0$, onde θ_0 é uma constante. Além disso, a equação $\theta = \theta_0 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, representa a mesma reta no plano.

1. Relações entre coordenadas polares e coordenadas cartesianas.

Seja $O\rho\theta$ um sistema de coordenadas polares no plano. Consideremos o sistema cartesiano ortogonal OXY tal que o eixo polar seja o semieixo positivo OX e o eixo$-OY$ seja obtido rotacionando o eixo$-OX$ de 90^o no sentido anti-horário.

Seja $P \neq O$ um ponto no plano com coordenadas ρ e θ no sistema $O\rho\theta$ e coordenadas x e y no sistema OXY. As relações entre estas coordenadas são dadas por:

$$\boxed{x = \rho\,\cos\theta \quad \text{e} \quad y = \rho\,\text{sen}\,\theta}$$

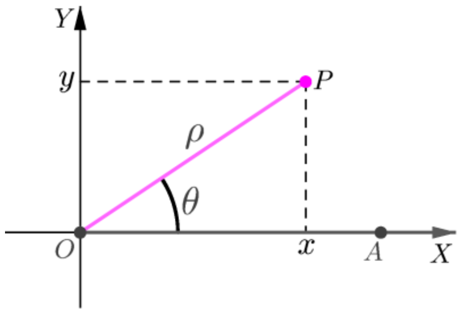

Figura 10: Sistemas polar $O\rho\theta$ e cartesiano OXY.

Destas relações, obtemos:

$$x^2 = \rho^2\cos^2\theta\,,\ y^2 = \rho^2\,\text{sen}^2\,\theta\,,\ \cos\theta = \frac{x}{\rho}\,,\ \text{sen}\,\theta = \frac{y}{\rho}\ \text{ e }\ \frac{y}{x} = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \text{tg}\,\theta\,,$$

das quais concluímos:

$$\boxed{\rho = \sqrt{x^2+y^2}\,,\quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\quad \text{sen}\,\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad \text{e}\quad \text{tg}\,\theta = \frac{y}{x}}$$

De fato, para obter a primeira relação, basta observar que

$$x^2 + y^2 = \rho^2(\cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta) = \rho^2\,,$$

o que implica $\rho = |\rho| = \sqrt{x^2+y^2}$, pois $\rho \geq 0$. As outras relações são obtidas substituindo $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ nas equações $\cos\theta = \dfrac{x}{\rho}$ e $\text{sen}\,\theta = \dfrac{y}{\rho}$.

Pela observação 1, podemos tomar $\rho < 0$. Neste caso, teremos:

$$\rho' = -\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Portanto, devemos considerar o ângulo θ' tal que $\cos\theta' = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $\text{sen}\,\theta' = -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ para continuarem válidas as igualdades $x = \rho'\cos\theta'$ e $y = \rho'\,\text{sen}\,\theta'$.

Como $\cos\theta' = -\cos\theta$ e $\text{sen}\,\theta' = -\,\text{sen}\,\theta$, vemos que $\theta' = \theta + \pi$, o que justifica a convenção feita anteriormente de que (ρ,θ) e $(-\rho,\theta+\pi)$ representam o mesmo ponto em coordenadas polares.

Convenção: *Daqui em diante, sempre que fizermos referência a um sistema polar $O\rho\theta$ e a um sistema cartesiano OXY, no mesmo contexto, admitiremos que o semieixo OX positivo é o eixo polar, caso este último não tenha sido definido explicitamente.*

Exemplo 4

Determine as coordenadas cartesianas ou polares dos seguintes pontos:

(a) $P = (\rho, \theta) = (2, \pi/2)$.

Solução.

Como $\rho = 2$ e $\theta = \pi/2$, temos que

$$x = \rho \cos\theta = 2\cos\pi/2 = 0$$

$$y = \rho \operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen}\pi/2 = 2$$

são as coordenadas cartesianas de P.

□

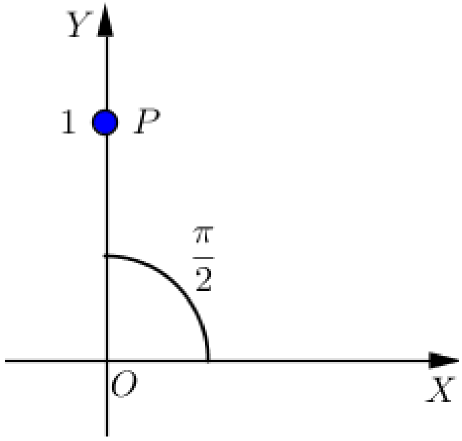

Figura 11: $P = (2, \pi/2)$ em coordenadas polares e $P = (0, 2)$ em coordenadas cartesianas

(b) $P = (x, y) = (1, 1)$.

Solução.

Sendo $x = 1$ e $y = 1$, temos que

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, ou seja, $\theta = \pi/4$ ou $\theta = \pi/4 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Então,

$P = (\rho, \theta) = (\sqrt{2}, \pi/4) = (\sqrt{2}, \pi/4 + 2\pi k)$

é o ponto P dado em coordenadas polares.

Também

$$\left(-\sqrt{2}, \pi/4 + (2k+1)\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z},$$

é outra representação de P em coordenadas polares.

□

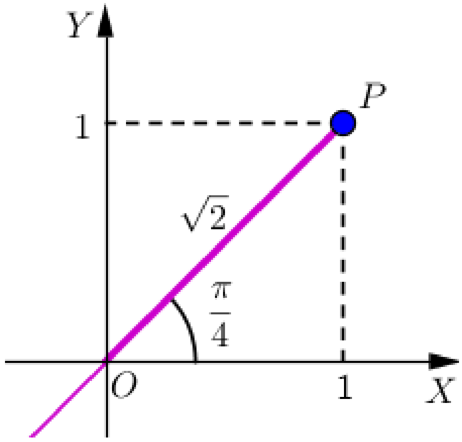

Figura 12: $P = (1, 1)$ em coordenadas cartesianas e $P = (\sqrt{2}, \pi/4)$ em coordenadas polares

(c) $P = (\rho, \theta) = (-3, \pi/2)$.

Solução.

Como $P = (-3, \pi/2) = (3, \pi/2+\pi) = (3, 3\pi/2)$, vemos que

$$x = \rho\cos\theta = -3\cos\frac{\pi}{2} = 3\cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

$$y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta = -3\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2} = 3\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{2} = -3$$

são as coordenadas cartesianas de P.

□

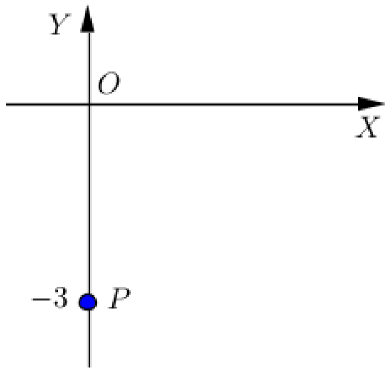

Figura 13: $P = (-3, \pi/2)$ em coordenadas polares e $P = (0, -3)$ em coordenadas cartesianas

(d) $P = (\rho, \theta) = (-\sqrt{2}, 5\pi/4)$.

Solução.

Sendo $P = (-\sqrt{2}, 5\pi/4) = (\sqrt{2}, 5\pi/4 + \pi) = (\sqrt{2}, 9\pi/4) = (\sqrt{2}, \pi/4)$, temos que

$$x = -\sqrt{2}\cos 5\pi/4 = \sqrt{2}\cos\pi/4 = 1$$

$$y = -\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,5\pi/4 = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\pi/4 = 1$$

são as coordenadas cartesianas do ponto P.

□

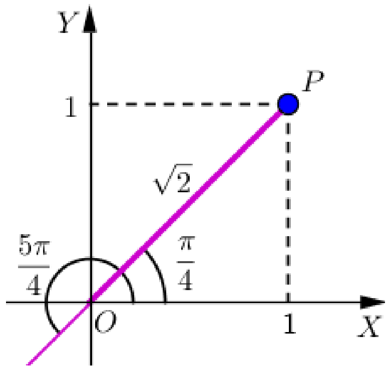

Figura 14: Ponto $P = (-\sqrt{2}, 5\pi/4)$ em coordenadas polares e $P = (1, 1)$ em coordenadas cartesianas

(e) $P = (x, y) = (4, 5)$.

Solução.

Como $x = 4$ e $y = 5$,

$$\rho = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41},$$

$$\cos\theta_0 = \frac{4}{\sqrt{41}} \text{ e } \mathrm{sen}\,\theta_0 = \frac{5}{\sqrt{41}}.$$

Portanto,

$$(\rho, \theta) = (\sqrt{41}, \theta_0) = (-\sqrt{41}, \theta_0 + \pi)$$

é o ponto P dado em coordenadas polares.

□

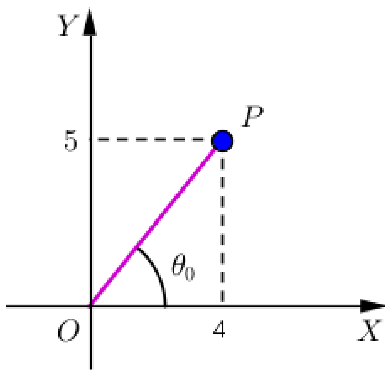

Figura 15: $P = (4, 5)$ em coordenadas cartesianas e $P = (\sqrt{41}, \theta_0)$ em coordenadas polares

(f) $P = (x, y) = (0, -4)$.

Solução.
Como $x = 0$ e $y = -4$, temos que

$$\rho = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4,$$

$$\cos\theta = \frac{0}{4} = 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{-4}{4} = -1.$$

Logo, $(\rho, \theta) = (4, 3\pi/2) = (-4, 3\pi/2 + \pi) = (-4, 5\pi/2) = (-4, \pi/2)$ é o ponto P dado em coordenadas polares.

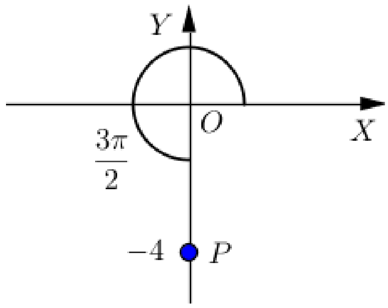

Figura 16: $P = (0, -4)$ em coordenadas cartesianas e $P = (-4, \pi/2)$ em coordenadas polares

□

Para esboçarmos uma curva, dada em coordenadas cartesianas (x, y) ou em coordenadas polares (ρ, θ), é bastante útil conhecermos suas simetrias para simplificar nossa análise.

Lembre-se de que dois pontos distintos P e Q são simétricos em relação a uma reta r se, e só se, $\overrightarrow{PQ} \perp r$ e $d(P, r) = d(Q, r)$.

Uma curva $\mathcal{C}$ é *simétrica* em relação:

- *ao eixo-OX* quando:

$$\begin{cases} (x, y) \in \mathcal{C} \iff (x, -y) \in \mathcal{C} \\ (\rho, \theta) \in \mathcal{C} \iff (\rho, -\theta) \in \mathcal{C} \quad \text{ou} \quad (-\rho, \pi - \theta) \in \mathcal{C}; \end{cases}$$

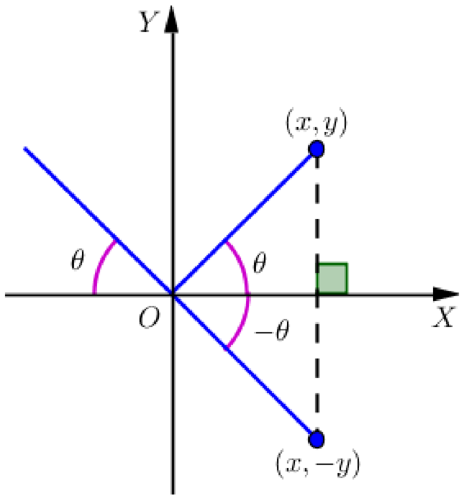

Figura 17: Simetria em relação ao eixo$-OX$.

- *ao eixo-OY* quando:

$$\begin{cases} (x,y) \in \mathcal{C} \iff (-x,y) \in \mathcal{C} \\ (\rho,\theta) \in \mathcal{C} \iff (\rho,\pi-\theta) \in \mathcal{C} \quad \text{ou} \quad (-\rho,-\theta) \in \mathcal{C}; \end{cases}$$

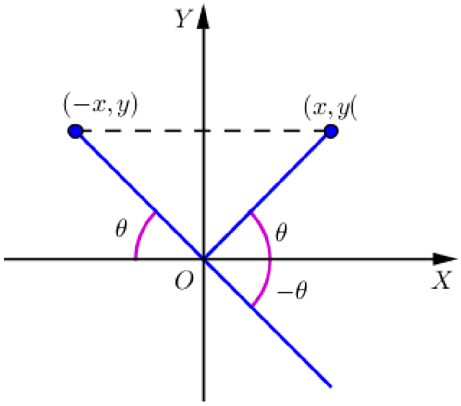

Figura 18: Simetria em relação ao eixo$-OY$.

- *à reta $y=x$* quando:

$$\begin{cases} (x,y) \in \mathcal{C} \iff (y,x) \in \mathcal{C} \\ (\rho,\theta) \in \mathcal{C} \iff (\rho,\frac{\pi}{2}-\theta) \in \mathcal{C} \quad \text{ou} \quad (-\rho,\frac{3\pi}{2}-\theta) \in \mathcal{C}; \end{cases}$$

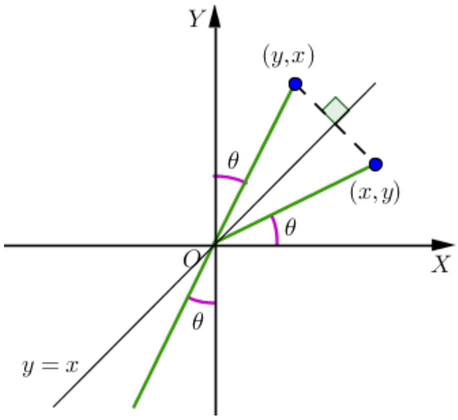

Figura 19: Simetria em relação à reta $y = x$.

- *à reta $y=-x$* quando:

$$\begin{cases} (x,y) \in \mathcal{C} \iff (-y,-x) \in \mathcal{C} \\ (\rho,\theta) \in \mathcal{C} \iff (\rho,\frac{3\pi}{2}-\theta) \in \mathcal{C} \quad \text{ou} \quad (-\rho,\frac{\pi}{2}-\theta) \in \mathcal{C}. \end{cases}$$

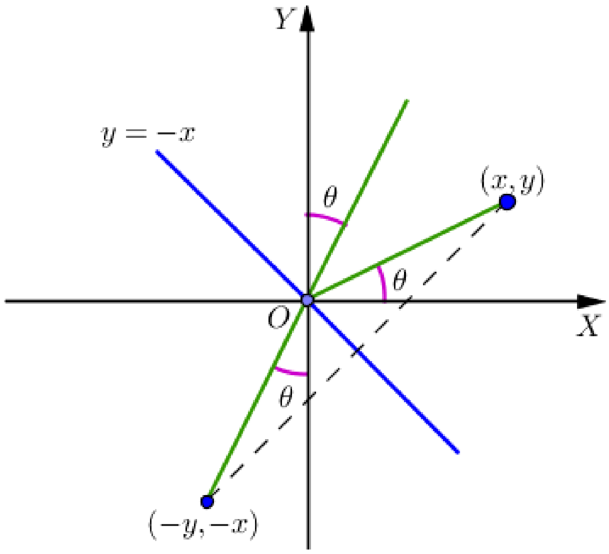

Figura 20: Simetria em relação à reta $y = -x$.

Para verificar as simetrias, é preferível usar as coordenadas cartesianas, devido à duplicidade de possibilidades em coordenadas polares.

Exemplo 5

Determine as equações cartesianas das curvas abaixo dadas em coordenadas polares e faça um esboço.

(a) $\mathcal{C} : \rho = 2\,.$

Solução.

Substituindo a relação $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, temos:

$$\begin{aligned} \rho = 2 &\iff \sqrt{x^2+y^2} = 2 \\ &\iff x^2 + y^2 = 4\,. \end{aligned}$$

Portanto, a equação $\rho = 2$ corresponde à equação cartesiana do círculo centrado na origem e de raio 2. □

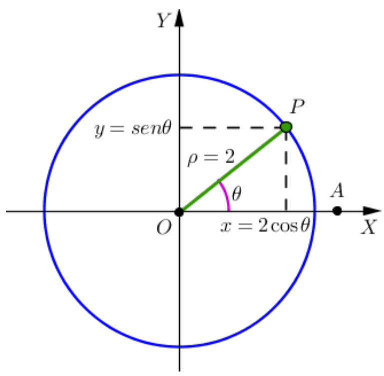

Figura 21: Círculo $\rho = 2$.

(b) $\mathcal{C} : \theta = \dfrac{3\pi}{4}$

Solução.

Substituindo a relação $\dfrac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta$ na equação dada, obtemos:

$$\theta = \frac{3\pi}{4} \Longleftrightarrow \frac{y}{x} = \text{tg}\,\frac{3\pi}{4} = \frac{\text{sen}((3\pi)/4)}{\cos((3\pi)/4)} = \frac{\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2} = -1\,.$$

Portanto, a equação correspondente no sistema cartesiano de coordenadas é $\frac{y}{x} = -1$, isto é, $y = -x$, que é a equação da reta bissetriz do segundo e do quarto quadrantes.

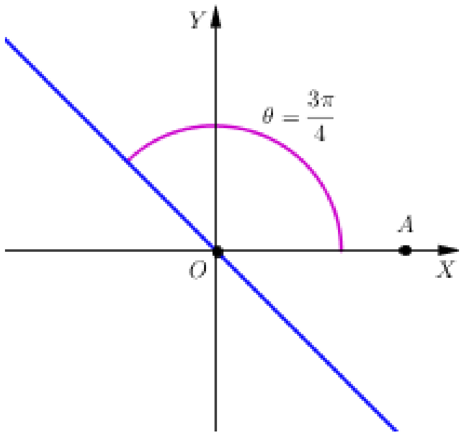

Figura 22: Reta $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

$\square$

(c) $\mathcal{C} : \rho\,\cos(\theta - \pi/3) = 2\,.$

Solução.

Usando a identidade $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b$, temos:

$$\rho\,\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \Longleftrightarrow \rho\,\cos\theta\,\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \rho\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\,.$$

Das relações:

$$x = \rho\,\cos\theta\,,\quad y = \rho\,\text{sen}\,\theta\,,\ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

obtemos

$$\mathcal{C} : x\left(\frac{1}{2}\right) + y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\,,$$

ou seja,

$$\mathcal{C} : x + y\sqrt{3} - 4 = 0\,,$$

é a reta normal ao vetor $\overrightarrow{v} = (1, \sqrt{3})$ que passa pelo ponto $P = (4, 0)$.

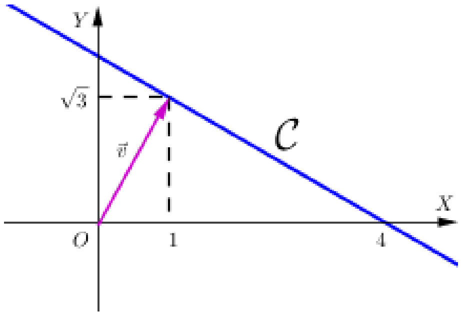

Figura 23: Reta $r : \rho\cos(\theta - \pi/3) = 2$, ou seja, $r : x + y\sqrt{3} - 4 = 0$.

□

(d) $\mathcal{C} : \rho\cos\theta = 3$.

Solução.
Como $x = \rho\cos\theta$, temos que $\mathcal{C} : x = 3$ é a reta vertical que intersecta o eixo$-OX$ no ponto $(3,0)$.

□

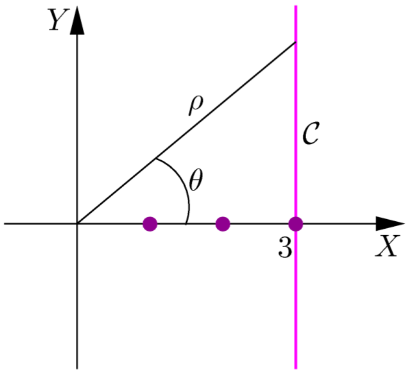

Figura 24: Curva $\mathcal{C} : \rho\cos\theta = 3$

(e) $\mathcal{C} : \rho = 2b\,\text{sen}\,\theta\,,\quad b > 0\,.$

Solução.

Sendo $\rho = \pm\sqrt{x^2+y^2}$ e $\text{sen}\,\theta = \pm\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

obtemos que

$$\begin{aligned} & \pm\sqrt{x^2+y^2} = \pm\frac{2by}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \Longleftrightarrow\quad & x^2+y^2 = 2by \\ \Longleftrightarrow\quad & x^2+y^2-2by = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & x^2+(y-b)^2 = b^2 \end{aligned}$$

é a equação cartesiana da curva $\mathcal{C}$, que representa o círculo de raio b e centro $(0,b)$.

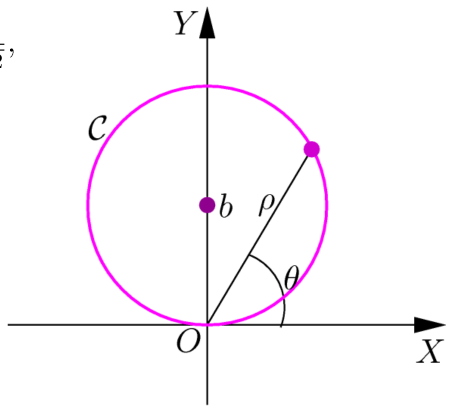

Figura 25: Curva $\mathcal{C} : \rho = 2b\,\text{sen}\,\theta$, $b > 0$.

□

(f) $\mathcal{C} : \rho^2 - 4\rho\cos\theta + 2 = 0.$

Solução.

Substituindo as relações $\rho^2 = x^2 + y^2$ e $x = \rho\cos\theta$ na equação dada, temos

$$x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0 \iff (x-2)^2 + y^2 = 2\,,$$

que é a equação cartesiana do círculo de centro $(2, 0)$ e raio $\sqrt{2}$.

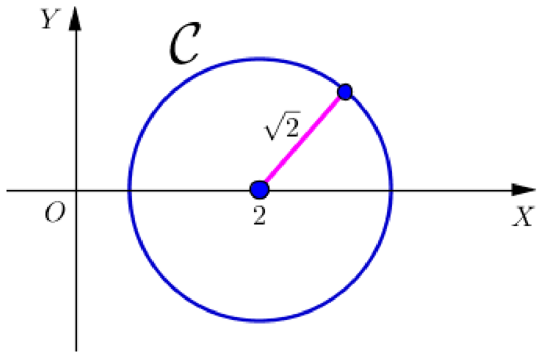

Figura 26: Círculo $\mathcal{C}$ e arcos $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$

□

(g) $\mathcal{C} : \rho = \dfrac{2}{3 - \cos\theta}$.

Solução.

Observe que $\rho > 0$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$. Substituindo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ na equação polar de $\mathcal{C}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+y^2} = \frac{2}{3 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} \quad & \iff \quad 3\sqrt{x^2+y^2} - x = 2 \\
& \iff \quad 3\sqrt{x^2+y^2} = x + 2 \\
& \iff \quad 9(x^2+y^2) = x^2 + 4x + 4 \\
& \iff \quad 8x^2 - 4x + 9y^2 = 4 \\
& \iff \quad 8\left(x^2 - \frac{x}{2}\right) + 9y^2 = 4 \\
& \iff \quad 8\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + 9y^2 = 4 + 8 \times \frac{1}{16} = \frac{9}{2} \\
& \iff \quad \frac{\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2}{\dfrac{9}{16}} + \frac{y^2}{\dfrac{1}{2}} = 1
\end{aligned}$$

é a equação cartesiana de $\mathcal{C}$. Portanto, $\mathcal{C}$ é uma elipse de centro $C = \left(\frac{1}{4}, 0\right)$, $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, reta focal $\ell : y = 0$, reta não focal $\ell' : x = \frac{1}{4}$, vértices sobre a reta focal $A_1 = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ e $A_2 = (1, 0)$, vértices sobre a reta não focal $B_1 = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $B_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

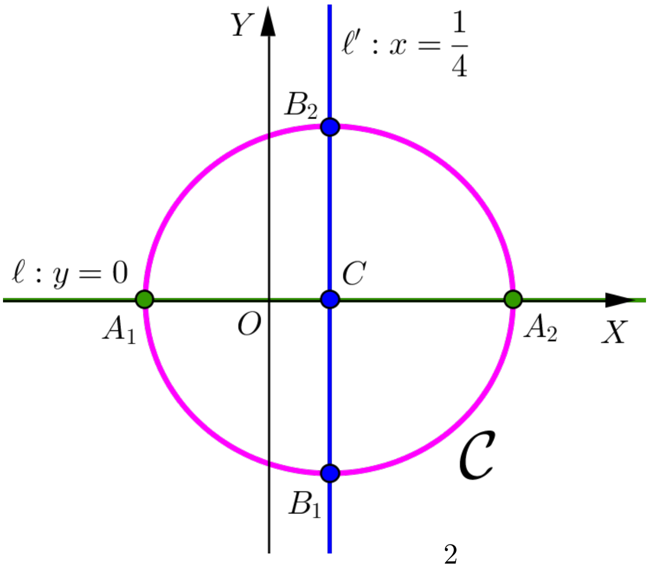

Figura 27: Curva $\mathcal{C} : \rho = \dfrac{2}{3 - \cos\theta}$

□

(h) $\mathcal{C} : \rho = 1 + \operatorname{sen} 2\theta$.

Solução.

Pela relação trigonométrica

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta\,,$$

obtemos que

$$\rho = 1 + 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta\,.$$

Além disso, como $\rho \geq 0$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$, temos que

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 + \frac{2xy}{x^2 + y^2} \iff (x^2 + y^2)^{3/2} = x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2 \quad (1)$$

é a equação cartesiana da curva.

Por (1), é fácil verificar que a curva $\mathcal{C}$ é simétrica em relação à reta $y = x$ (isto é, $(x, y) \in \mathcal{C} \iff (y, x) \in \mathcal{C}$) e à reta $y = -x$ (isto é, $(x, y) \in \mathcal{C} \iff (-y, -x) \in \mathcal{C}$) Logo, basta analisar a curva $\rho = 1 + \operatorname{sen} 2\theta$ para θ no intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Temos: $\rho = 0$ para $\theta = -\frac{\pi}{4}$; $\rho = 1$ para $\theta = 0$; $\rho = 2$ para $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $\rho > 0$ para $\theta \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

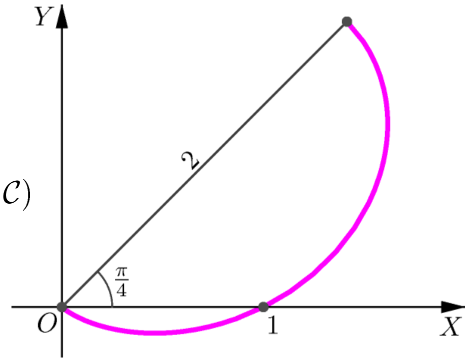

Figura 28: Curva $\mathcal{C}$ no intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

Na figura 28, mostramos o esboço da curva no intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Pelas simetrias da curva, é fácil ver que o esboço de $\mathcal{C}$ é o mostrado na figura 29.

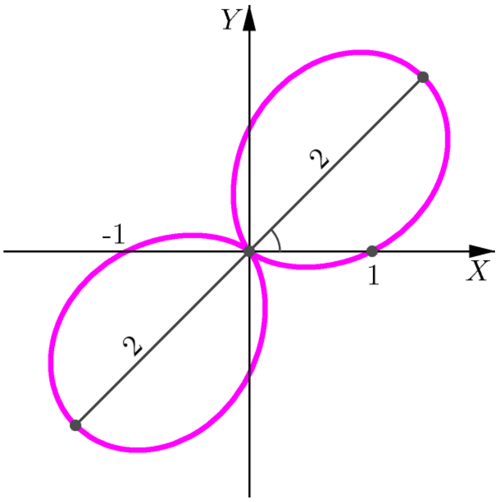

Figura 29: Curva $\mathcal{C} : \rho = 1 + \operatorname{sen} 2\theta$

□

(i) $\mathcal{C} : \rho = 1 + 2\cos\theta$.

Solução.

Neste exemplo, ρ pode assumir valores negativos e positivos.

Logo, $\rho = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ e $\cos\theta = \dfrac{\pm x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Substituindo ρ e θ na equação dada, obtemos que

$$\pm\sqrt{x^2+y^2} = 1 \pm \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} \iff x^2+y^2 = \pm\sqrt{x^2+y^2} + 2x$$
$$\iff (x^2+y^2-2x)^2 = x^2+y^2$$

é a equação cartesiana da curva. É fácil verificar que esta curva é simétrica em relação ao eixo$-OX$, mas não é simétrica em relação ao eixo$-OY$. Portanto, para esboçá-la, basta variar o parâmetro θ no intervalo $[0,\pi]$.

Para $\theta \in [0,\pi]$, temos:

- $\rho = 1 + 2\cos\theta = 0$ se, e só se, $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$, ou seja, $\rho = 0$ se, e só se, $\theta_0 = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$;
- $\rho > 0$ se, e só se, $-\dfrac{1}{2} < \cos\theta \leq 1$, ou seja, se, e só se, $0 \leq \theta < \dfrac{2\pi}{3}$;
- $\rho < 0$ se, e só se, $-1 \leq \cos\theta < -\dfrac{1}{2}$, ou seja, se, e só se, $\dfrac{2\pi}{3} < \theta \leq \pi$.

Tomando os pontos $P_1 = (3,0)$, $P_2 = (2,\pi/3)$, $P_3 = (1,\pi/2)$, $P_4 = (0,2\pi/3)$ e $P_5 = (-1,\pi)$ em coordenadas polares da curva, podemos esboçar a parte da curva correspondente ao intervalo $[0,\pi]$ (ver Fig. 30).

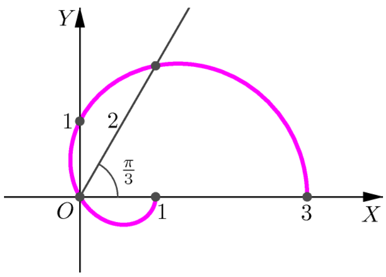

Figura 30: Curva $\mathcal{C}$ descrita variando θ em $[0,\pi]$

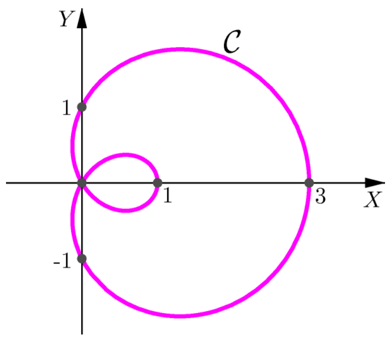

Figura 31: Curva $\mathcal{C}$

Sendo a curva simétrica em relação ao eixo$-OX$, obtemos o esboço completo da curva $\mathcal{C}$ (ver Fig. 31). □

(j) $\mathcal{C} : \rho^2 = \cos\theta$.

Solução.

Sendo $\rho = \pm\sqrt{x^2+y^2}$ e $\cos\theta = \dfrac{\pm x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, obtemos a equação cartesiana da curva:

$$x^2+y^2=\frac{\pm x}{\sqrt{x^2+y^2}} \iff (x^2+y^2)^{3/2}=\pm x \iff (x^2+y^2)^3=x^2\,.$$

Como esta curva é simétrica em relação aos eixos OX e OY, basta analizá-la no intervalo $[0,\pi/2]$.

Temos que $\rho=0$ se, e só se, $\cos\theta=0$, ou seja, $\rho=0$ se, e só se, $\theta=\pi/2$ para $\theta\in[0,\pi/2]$.

Considerando os pontos $P_1=(1,0)$, $P_2=\left(1/2^{1/4}\,,\,\pi/4\right)$ e $P_3=(0\,,\,\pi/2)$ da curva em coordenadas polares, podemos esboçar seu traço situado no primeiro quadrante (ver Fig. 32).

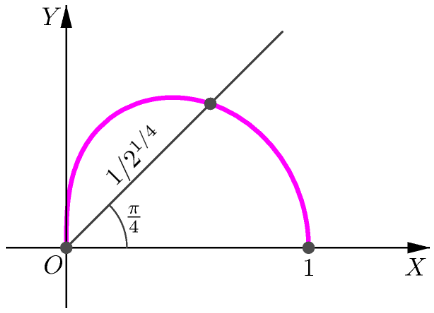

Figura 32: Curva $\mathcal{C}$ no primeiro quadrante

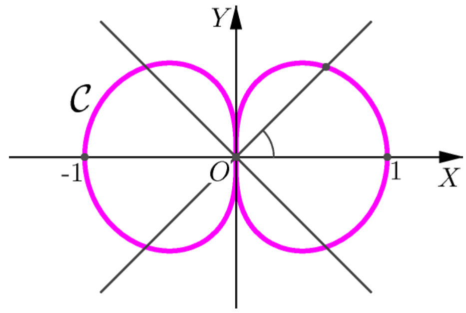

Figura 33: Curva $\mathcal{C}$

Usando as simetrias em relação aos eixos OX e OY, podemos esboçar a curva $\mathcal{C}$ (Fig. 33). $\square$

(k) $\mathcal{C}:\rho=2\,\mathrm{sen}^2\,\dfrac{\theta}{2}\,.$

Solução.

Usando a relação trigonométrica

$$2\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\theta}{2}=1-\cos\theta\,,$$

obtemos que $\mathcal{C}:\rho=1-\cos\theta\,.$

Sendo $\rho\geq 0$, temos que $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ e $\cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Logo,

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+y^2}=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} &\iff x^2+y^2=\sqrt{x^2+y^2}-x\\ &\iff x^2+y^2+x=\sqrt{x^2+y^2}\end{aligned}$$

é a equação cartesiana de $\mathcal{C}$.

É fácil verificar que $\mathcal{C}$ é simétrica em relação ao eixo$-OX$, mas não é simétrica

em relação ao eixo$-OY$. Basta, então, analisar a curva no intercalo $[0, \pi]$.
Como $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, \pi/2)$ e $P_3 = (2, \pi)$ são pontos da curva $\mathcal{C}$ no intervalo $[0, \pi]$, o esboço de $\mathcal{C}$, nos primeiro e segundo quadrantes, é da forma:

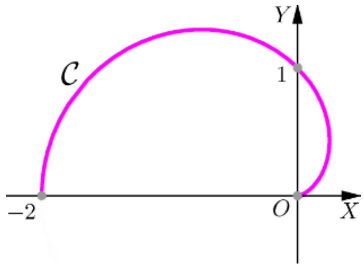

Figura 34: Curva $\mathcal{C}$ no primeiro e segundo quadrantes

Usando a simetria de $\mathcal{C}$ em relação ao eixo$-OX$, podemos esboçá-la:

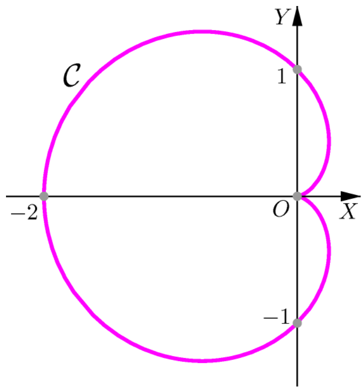

Figura 35: Curva $\mathcal{C}$, a cardióide

Esta curva é chamada cadióide por se assemelhar a um coração. $\square$

(1) $\mathcal{C} : \rho = \cos 2\theta$.

Solução.

Como $\rho = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ e $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, obtemos que

$$\pm\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \iff \pm(x^2 + y^2)^{3/2} = x^2 - y^2$$
$$\iff (x^2 + y^2)^3 = (x^2 - y^2)^2$$

é a equação cartesiana da curva, que é simétrica em relação aos eixos OX e OY e às retas $y = x$ e $y = -x$.

Basta, então, analisar a curva no intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$. Temos que

- $\rho > 0$ para $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right)$;

- $\rho = \cos 2\theta = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ para $\theta = \dfrac{\pi}{4}$;
- $\rho = \cos 2\theta = \cos 0 = 1$ para $\theta = 0$.

Logo, a figura 36 é um esboço da curva para θ variando no intervalo $[0, \pi/4]$.

Usando as simetrias em relação aos eixos OX e OY e em relação à reta $y = x$, obtemos o esboço completo da curva (figura 20).

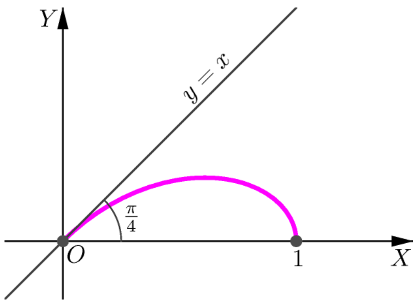

Figura 36: Curva $\mathcal{C}$ com θ variando no intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$

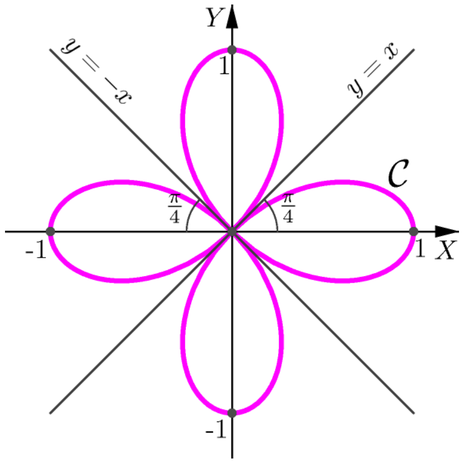

Figura 37: Curva $\mathcal{C}$

$\square$

(m) $\mathcal{C} : \rho = \operatorname{sen} 3\theta$.

Solução.

Sendo

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 3\theta &= \operatorname{sen}(\theta + 2\theta) = \operatorname{sen}\theta\cos 2\theta + \cos\theta \operatorname{sen} 2\theta \\ &= \operatorname{sen}\theta(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) + 2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta = 3\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta - \operatorname{sen}^3\theta \\ &= \operatorname{sen}\theta(3\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta), \end{aligned}$$

obtemos que

$$\pm\sqrt{x^2+y^2} = \frac{\pm y}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{3x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \iff (x^2+y^2)^2 = y(3x^2-y^2)$$

é a equação cartesiana da curva.

Portanto, ela é simétrica em relação ao eixo$-OY$, mas não é simétrica em relação ao eixo$-OX$.

Ao invés de usar as simetrias da curva, vamos analisá-la num ciclo completo, isto é, variando θ no intervalo $[0, 2\pi]$.

- $\rho = 0 \iff \operatorname{sen} 3\theta = 0 \iff 3\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi \iff \theta = 0, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \pi, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}, 2\pi$;
- $\rho = 1 \iff \operatorname{sen} 3\theta = 1 \iff 3\theta = \dfrac{\pi}{2}, 2\pi + \dfrac{\pi}{2}, 4\pi + \dfrac{\pi}{2} \iff \theta = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{9\pi}{6}$;
- $\rho = -1 \iff \operatorname{sen} 3\theta = -1 \iff 3\theta = \dfrac{3\pi}{2}, 2\pi + \dfrac{3\pi}{2}, 4\pi + \dfrac{3\pi}{2} \iff \theta = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}$;
- $\rho > 0$ em $\left(0, \dfrac{\pi}{3}\right) \cup \left(\dfrac{2\pi}{3}, \pi\right) \cup \left(\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right)$;
- $\rho < 0$ em $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\pi, \dfrac{4\pi}{3}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$.

Usando as informações acima, vemos que o traço da curva é o mostrado na figura 38.

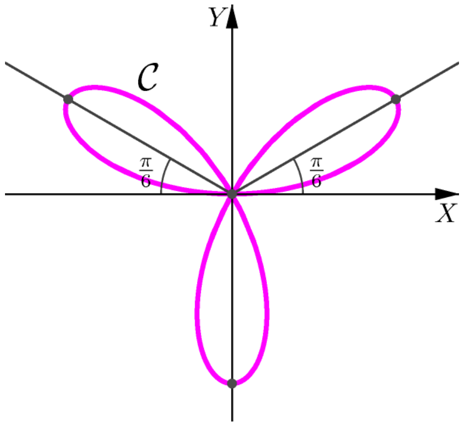

Figura 38: Curva $\mathcal{C}$

□

Vamos agora apresentar alguns exemplos que nos mostram como podemos determinar regiões do plano usando coordenadas polares, nos quais vamos considerar sempre $\rho \geq 0$.

Exemplo 6

Faça o esboço da região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ do plano dada pelos seguintes sistemas de desigualdades:

$$\mathcal{R}_1 : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq \dfrac{2}{\cos\theta} \\ -\dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{R}_2 : \begin{cases} 2\operatorname{sen}\theta \leq \rho \leq \dfrac{2}{\cos\theta} \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4} \end{cases} ,$$

onde (ρ, θ) *são as coordenadas polares de um ponto da região* $\mathcal{R}$.

Solução.

Primeiro analisaremos as curvas que delimitam a região

(I) $\rho = \dfrac{2}{\cos\theta} \iff \rho\cos\theta = 2 \iff x = 2$, que é uma reta vertical.

(II) $\rho = 2\,\text{sen}\,\theta \iff \pm\sqrt{x^2+y^2} = \dfrac{\pm 2y}{\sqrt{x^2+y^2}} \iff x^2+y^2 = 2y \iff x^2+(y-1)^2 = 1$, que é o círculo de centro $(0,1)$ e raio 1.

(III) $\theta = \dfrac{\pi}{4} \iff \dfrac{y}{x} = \text{tg}\,\theta = 1 \iff y = x$, que é a bissetriz dos primeiro e terceiro quadrantes.

(IV) $\theta = -\dfrac{\pi}{4} \iff \dfrac{y}{x} = \text{tg}\,\theta = -1 \iff y = -x$, que é a bissetriz dos segundo e quarto quadrantes.

Então,

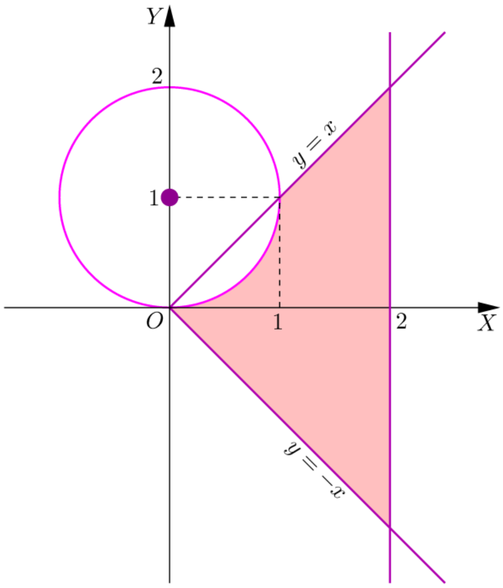

Figura 39: $\mathcal{R}$ é a região sombreada

é o esboço da região no sistema de eixos OXY, e

$$\mathcal{R} : \begin{cases} x^2+y^2-2y \geq 0 \\ x \leq 2 \\ x-y \geq 0 \\ x+y \geq 0 \end{cases}$$

é a região dada em coordenadas cartesianas.

Como a interseção do círculo $x^2 + y^2 = 2y$ com a reta $y = x$ são os pontos $(0,0)$ e $(1,1)$, e na equação $x^2+y^2 = 2y$ temos $y = 1-\sqrt{1-x^2}$ para $y \in [0,1]$ e $x \in [0,1]$, a região $\mathcal{R}$ pode ser descrita também na forma $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, onde:

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} -x \leq y \leq 1-\sqrt{1-x^2} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{S}_2 : \begin{cases} -x \leq y \leq x \\ 1 \leq x \leq 2\,. \end{cases}$$

□

Exemplo 7

Descreva as regiões esboçadas abaixo por meio de um sistema de desigualdades da forma

$$\begin{cases} \rho_1(\theta) \leq \rho \leq \rho_2(\theta) \\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \end{cases}.$$

(a)

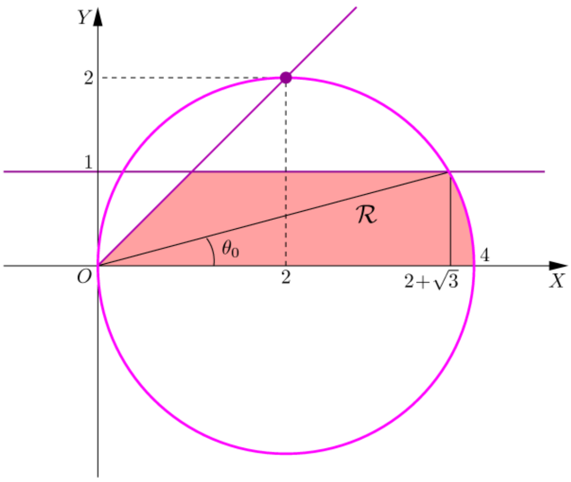

Figura 40: Região $\mathcal{R}$

Solução.

Primeiro vamos determinar as equações polares das curvas $\mathcal{C}_1 : (x-2)^2+y^2 = 4\,$, $\mathcal{C}_2 : y = 1\,$, $\mathcal{C}_3 : x - y = 0$ e $\mathcal{C}_4 : y = 0$ que delimitam a região $\mathcal{R}$.

(I) $(x-2)^2+y^2 = 4 \iff x^2-4x+4+y^2 = 4 \iff x^2+y^2 = 4x \iff \rho^2 = 4\rho\cos\theta \iff \rho = 4\cos\theta\,.$

(II) $y = 1 \iff \rho\,\text{sen}\,\theta = 1 \iff \rho = \dfrac{1}{\text{sen}\,\theta}\,.$

(III) $x - y = 0 \iff x = y \iff \operatorname{tg}\theta = 1 \iff \theta = \dfrac{\pi}{4}$.

(IV) $y = 0 \iff \rho \operatorname{sen}\theta = 0 \iff \operatorname{sen}\theta = 0 \iff \theta = 0$.

Por um cálculo simples, obtemos que

$\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 = \{(1,1)\}$; $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{(2-\sqrt{3},1),\ (2+\sqrt{3},1)\}$; $y = \pm\sqrt{4x - x^2}$ ou $x = 2 \pm \sqrt{4 - y^2}$ para $(x,y) \in \mathcal{C}_1$.

Logo,

$$\mathcal{R} : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 4\cos\theta \\ 0 \leq \theta \leq \theta_0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1/\operatorname{sen}\theta \\ \theta_0 \leq \theta \leq \pi/4 \end{cases}$$

é a região dada em coordenadas polares, onde $\operatorname{tg}\theta_0 = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$, $\theta_0 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Além disso,

$$\mathcal{R} : \begin{cases} 0 \leq y \leq x \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \bigcup \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 1 \leq x \leq 2 + \sqrt{3} \end{cases} \bigcup \begin{cases} 0 \leq y \leq \sqrt{4x - x^2} \\ 2 + \sqrt{3} \leq x \leq 4 \end{cases}$$

ou, simplesmente,

$$\mathcal{R} : \begin{cases} y \leq x \leq 2 + \sqrt{4 - y^2} \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

é a região dada em coordenadas cartesianas. $\square$

(b)

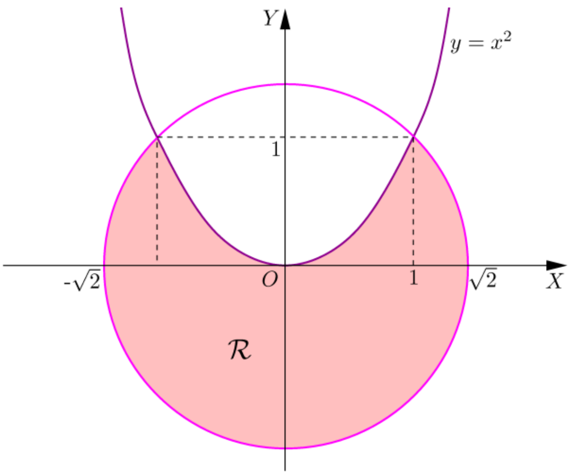

Figura 41: Região $\mathcal{R}$

Solução.
As curvas que delimitam a região são $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 = 2$ e $\mathcal{C}_2 : y = x^2$, que em coordenadas polares são dadas por: $\mathcal{C}_1 : \rho = \sqrt{2}$ e $\mathcal{C}_2 : \rho \operatorname{sen}\theta = \rho^2 \cos^2\theta$, ou seja, $\mathcal{C}_2 : \rho = \operatorname{tg}\theta \sec\theta$.
Como $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{(1,1), (-1,1)\}$, temos que o ângulo polar θ varia no intervalo $\left[-\pi - \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right] = \left[-\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$.
Logo,

$$\mathcal{R} : \begin{cases} \operatorname{tg}\theta \sec\theta \le \rho \le \sqrt{2} \\ -\dfrac{5\pi}{4} \le \theta \le -\pi \end{cases} \bigcup \begin{cases} 0 \le \rho \le \sqrt{2} \\ -\pi \le \theta \le 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} \operatorname{tg}\theta \sec\theta \le \rho \le \sqrt{2} \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

é a região dada em coordenadas polares. Além disso,

$$\mathcal{R} : \quad \begin{array}{c} \begin{cases} -\sqrt{2-x^2} \le y \le x^2 \\ -1 \le x \le 1 \end{cases} \\ \bigcup \\ \begin{cases} -\sqrt{2-x^2} \le y \le \sqrt{2-x^2} \\ -\sqrt{2} \le x \le -1 \end{cases} \\ \bigcup \\ \begin{cases} -\sqrt{2-x^2} \le y \le \sqrt{2-x^2} \\ 1 \le x \le \sqrt{2} \end{cases} \end{array}$$

é a região dada em coordenadas cartesianas. $\square$

Exemplo 8

Descreva a região $\mathcal{R}$ do plano interior a ambas as curvas: $\mathcal{C}_1 : \rho = 4\sqrt{3}\cos\theta$ e $\mathcal{C}_2 : \rho = 4\operatorname{sen}\theta$.

Solução.
As curvas em coordenadas cartesianas são dadas por:

- $\mathcal{C}_1 : \rho = 4\sqrt{3}\cos\theta \iff \pm\sqrt{x^2+y^2} = 4\sqrt{3}\left(\dfrac{\pm x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \iff x^2+y^2 = 4\sqrt{3}\,x$
$\iff (x-2\sqrt{3})^2 + y^2 = 12$, que é o círculo de centro $(2\sqrt{3}, 0)$ e raio $2\sqrt{3}$.

• $\mathcal{C}_2 \,:\, \rho = 4\operatorname{sen}\theta \iff \pm\sqrt{x^2+y^2} = 4\left(\dfrac{\pm y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \iff x^2+y^2 = 4y$
$\iff x^2+(y-2)^2 = 4$, que é o círculo de centro $(0,2)$ e raio 2.
Assim,

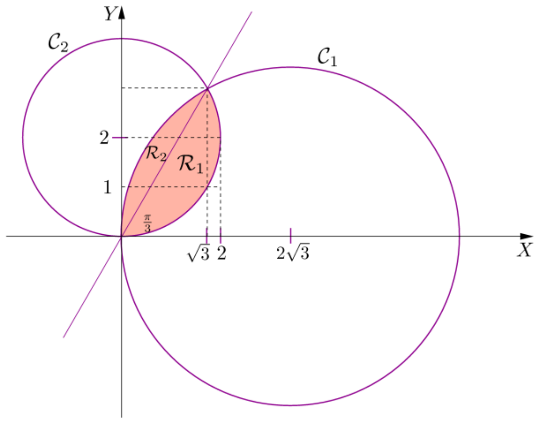

Figura 42: Região $\mathcal{R}$

é um esboço da região no sistema de coordenadas OXY.
Temos que

$$\begin{aligned}
(x,y)\in\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2 &\iff x^2+y^2=4\sqrt{3}\,x \quad \text{e} \quad x^2+y^2=4y\\
&\iff y=\sqrt{3}x \quad \text{e} \quad x^2+y^2=4y\\
&\iff y=\sqrt{3}x \quad \text{e} \quad x^2+3x^2=4\sqrt{3}x\\
&\iff y=\sqrt{3}x \quad \text{e} \quad 4x^2=4\sqrt{3}\,x\\
&\iff x=0 \quad \text{e} \quad y=0 \quad \text{ou} \quad x=\sqrt{3} \quad \text{e} \quad y=3\,.
\end{aligned}$$

Ou seja, $\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2 = \left\{(0,0),\left(\sqrt{3},3\right)\right\}$.

Como o ângulo θ_0 que o segmento OP_0, $P_0=\left(\sqrt{3},3\right)$, faz com o eixo$-OX$ é $\dfrac{\pi}{3}$, pois $\operatorname{tg}\theta_0 = \dfrac{y}{x} = \sqrt{3}$, temos que a região em coordenadas polares é $\mathcal{R}=\mathcal{R}_1\cup\mathcal{R}_2$, onde:

$$\mathcal{R}_1 : \begin{cases} 0\le\rho\le 4\operatorname{sen}\theta \\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{3}\end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{R}_2 : \begin{cases} 0\le\rho\le 4\sqrt{3}\,\cos\theta \\ \dfrac{\pi}{3}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\,,\end{cases}$$

e, em coordenadas cartesianas,

$$\mathcal{R} : \begin{cases} 2\sqrt{3}-\sqrt{12-y^2} \;\le\; x \;\le\; \sqrt{4-(y-2)^2} \\ 0 \;\le\; y \;\le\; 3\,.\end{cases}$$

□

Exemplo 9

Considere a região $\mathcal{R}$ do plano dada pelo sistema de inequações:

$$\mathcal{R}: \begin{cases} \dfrac{x^2}{12} \leq y \leq \dfrac{1}{2}\sqrt{16-x^2} \\ 0 \leq x \leq 2\sqrt{3}\,. \end{cases}$$

(a) *Faça um esboço detalhado da região $\mathcal{R}$.*

(b) *Descreva a região por meio de um sistema de inequações da forma*

$$\mathcal{R}: \begin{cases} \rho_1(\theta) \leq \rho \leq \rho_2(\theta) \\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\,, \end{cases}$$

onde (ρ, θ) são as coordenadas polares de um ponto do plano.

Solução.

(a) As curvas que delimitam a região $\mathcal{R}$ são:

- as retas verticais $x = 0$ e $x = 2\sqrt{3}$;
- a parábola $\mathcal{C}_1 : x^2 = 12y$ de vértice na origem e reta focal igual ao eixo$-OY$, voltada para cima;
- a parte $\mathcal{C}_2$ situada no semiplano $y \geq 0$ da elipse:

$$\mathcal{C}_2 : 2y = \sqrt{16-x^2} \Longrightarrow 4y^2 = 16 - x^2 \Longrightarrow x^2 + 4y^2 = 16 \Longrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1\,,$$

de centro $C = (0, 0)$, vértices $(4, 0)$, $(-4, 0)$, $(0, 2)$ e $(0, -2)$ e reta focal igual ao eixo$-OX$.

Observe que $\left(2\sqrt{3}, 1\right) \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$. Portanto, o esboço da região $\mathcal{R}$ é:

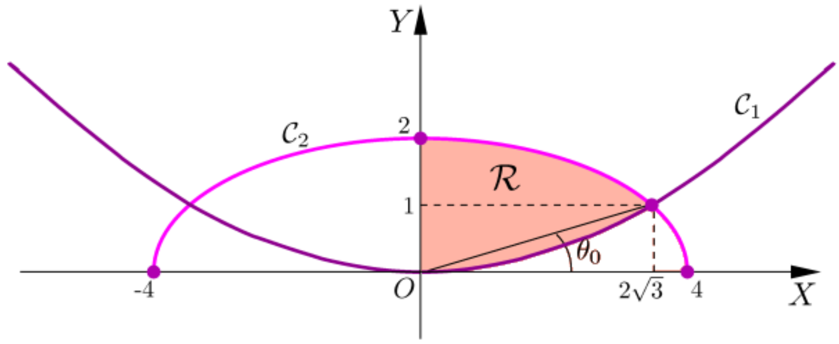

Figura 43: Região $\mathcal{R}$

(b) As curvas $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ em coordenadas polares são dadas por

• $12y = x^2 \iff 12\rho \operatorname{sen}\theta = \rho^2\cos^2\theta \iff \rho = 12\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} = 12\operatorname{tg}\theta\,\sec\theta\,;$

• $x^2+4y^2 = 16 \iff \rho^2(\cos^2\theta+4\operatorname{sen}^2\theta) = 16 \iff \rho^2(1-\operatorname{sen}^2\theta+4\operatorname{sen}^2\theta) = 16$

$\iff \rho = \dfrac{4}{\sqrt{1+3\operatorname{sen}^2\theta}}$

Seja $\theta_0 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ tal que $\operatorname{tg}\theta_0 = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Então, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$, onde:

$$\mathcal{R}_1 : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 12\operatorname{tg}\theta\,\sec\theta \\ 0 \leq \theta \leq \theta_0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{R}_2 : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq \dfrac{4}{\sqrt{1+3\operatorname{sen}^2\theta}} \\ \theta_0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\,. \end{cases}$$

□