1. Considere os vetores do espaço $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Se $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 30^o$, e as normas de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são, respectivamente, 2 e 3, calcule $||\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}||$.

2. Sabendo que $||\overrightarrow{u}|| = 1, ||\overrightarrow{v}|| = 7$ e $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{6}$, calcule $||\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}||$ e $||4\overrightarrow{u} \times 9\overrightarrow{v}||$.

3. Calcule $(\sqrt{2}\overrightarrow{u} - \sqrt{3}\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) \times (-\sqrt{6}\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v} - \sqrt{3}\overrightarrow{w})$.

4. Prove que, se $\theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ então $||\overrightarrow{u}||^2||\overrightarrow{v}||^2 - < \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} >^2 = ||\overrightarrow{u}||^2||\vec{v}||^2 \sin^2\theta$. O que significa esta afirmação em relação à definição de produto vetorial ?

5. Calcule $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$ nos casos abaixo:

   (a) $\overrightarrow{u} = (6, -2, -4)$ e $\overrightarrow{v} = (-1, -2, 1)$;
   (b) $\overrightarrow{u} = (7, 0, -5)$ e $\overrightarrow{v} = (1, 2, -1)$;
   (c) $\overrightarrow{u} = (1, -3, 1)$ e $\overrightarrow{v} = (1, 1, 4)$;
   (d) $\overrightarrow{u} = (2, 1, 2)$ e $\overrightarrow{v} = (4, 2, 4)$.

6. Calcule a área do paralelogramo $ABCD$, sendo $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$ e $\overrightarrow{AD} = (2, 1, 4)$.

7. Utilizando o produto vetorial, determine a área do triângulo ABC, sendo $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$ e $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 3)$.

8. Prove que $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \times (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = 2\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$.

9. Prove que $(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}) \times (\overrightarrow{w} - \overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} + \overrightarrow{w} \times \overrightarrow{u}$.

10. Dados os vetores:
$$\overrightarrow{u} = (2, -3, 1), \overrightarrow{v} = (2, 2, 0) \text{ e } \overrightarrow{w} = (1, -3, 4).$$
    Calcule:

    (a) $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >$ e $< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} >$;
    (b) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$;
    (c) $< \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} >$ e $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} >$;
    (d) $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})$;
    (e) $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w})$;
    (f) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \times (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w})$;
    (g) o ângulo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

11. Calcule a área do triângulo cujos vértices são:

    (a) $A = (0, 0, 0), B = (2, 3, 0)$ e $C = (0, 0, 5)$
    (b) $A = (2, -1, 1), B = (2, 1, -1)$ e $C = (0, 3, -5)$

12. Calcule a área do paralelogramo definido pelos vetores $\overrightarrow{u} = (2, 3, 1)$ e $\overrightarrow{v} = (1, 5, -3)$.

13. Calcule o volume do paralelepípedo definido pelos vetores $\overrightarrow{u} = (2, -1, 1), \overrightarrow{v} = (1, 3, 2)$ e $\overrightarrow{w} = (-1, 4, -3)$.

14. Sejam $\overrightarrow{u} = (1, 1, 0), \overrightarrow{v} = (2, 0, 1), \overrightarrow{w_1} = 3\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w_3} = (1, 1, -2)$. Determine o volume do paralelepípedo definido por $\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}$ e $\overrightarrow{w_3}$.

15. Mostre que qualquer que seja o valor de a, o módulo do vetor $(1 - a, 1, a - 2)$ é igual à área do paralelogramo definido pelos vetores $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$ e $\overrightarrow{v} = (2, a, 1)$.

16. De um vértice de um cubo traçam-se uma diagonal do cubo e uma diagonal de uma face.

    (a) Calcule o ângulo entre as duas diagonais.
    (b) Calcule a área do triãngulo definido por estas diagonais e uma aresta do cubo.

17. Sejam $\overrightarrow{u} = (2, 1, -3)$ e $\overrightarrow{v} = (1, -2, 1)$.

(a) Determine um vetor unitário simultaneamente perpendicular a $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

(b) Determine um vetor $\overrightarrow{w}$ perpendicular a $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ tal que $||\overrightarrow{w}|| = 5$.

18. Verifique se os pontos $(2,2,1), (3,1,2), (2,3,0)$ e $(2,3,2)$ são coplanares.

19. Calcule o volume do paralelepípedo que tem os pontos como vértices: $(2,1,-5), (1,3,-1), (4,1,0)$ e $(0,1,2)$.

Respostas:

1. 3
2. 7/2 e 126
3. $\vec{0}$
4. Demonstração :)
5. (a) $(-10,-2,-14)$ e $(10,2,14)$
   (b) $(10,2,14)$ e $(-10,-2,-14)$
   (c) $(-13,-3,4)$ e $(13,3,-4)$
   (d) $(0,0,0)$ e $(0,0,0)$
6. $\sqrt{62}$
7. $\frac{\sqrt{19}}{2}$
8. Demonstração
9. Demonstração
10. (a) $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >=< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} >= -2$
    (b) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (-2,2,10)$ e $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u} = (2,-2,-10)$
    (c) $< \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} >=< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} >= 32$
    (d) $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = (38,18,4)$, $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = (32,24,8)$
    (e) $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}) = (64,-96,32)$
    (f) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \times (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) = (1,-17,-21)$
    (g) $\arccos -\frac{\sqrt{7}}{14}$
11. (a) $\frac{\sqrt{325}}{2}$
    (b) $2\sqrt{3}$
12. $7\sqrt{6}$
13. 28
14. 44
15. $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (1-a, 1, a-2)$
16. (a) $\arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$
    (b) $\frac{\sqrt{2}a^2}{2}$
17. (a) $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$
    (b) $(-\frac{5}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{\sqrt{3}})$
18. Não são coplanares
19. 48