1. Encontre as equações paramétricas e cartesiana do plano π que passa pelos pontos $A = (1, 0, 2), B = (1, 2, 3)$ e $C = (0, 1, 2)$.

2. Prove que os pontos $A = (1, 2, 1), B = (2, 3, 1)$ e $C = (0, -2, 4)$ determinam um plano e ache a equação deste plano.

3. Ache um ponto $C = (x, 0, 0)$ sobre o eixo-OX equidistante dos pontos $A = (1, 2, 3)$ e $B = (-2, 1, -3)$.

4. Dado $\vec{v} = (1, 2, 3)$, determine o vetor colinear com $\vec{v}$ de ponto inicial $A = (1, 1, 1)$ e ponto final B no plano π_{xy}.

5. Encontre a equação do plano:

   (a) que passa por $P_0 = (5, 1, 2)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{v} = (1, 2, 3)$.

   (b) que passa por $P_1 = (1, 2, 1)$ e é perpendicular ao segmento P_1P_2, onde $P_2 = (0, -1, 2)$.

6. Encontre um vetor unitário normal ao plano de equação $x - y + \sqrt{2}z + 1 = 0$.

7. Encontre a equação cartesiana do plano π que passa pelos pontos $A = (1, 0, 0), B = (0, 0, 1)$ e é perpendicular ao plano $y = z$.

8. Encontrar um vetor unitário $\vec{u}$, normal ao plano que passa pelos pontos $A = (1, 0, 0), B = (0, 2, 0)$ e $C = (0, 0, 3)$.

9. Encontre a equação do plano:

   (a) que passa por $A = (1, 2, 1)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (2, -1, 1)$.

   (b) que passa por $Q = (1, 0, 2)$ e é paralelo ao plano $2x - y + 5z - 3 = 0$.

10. Determine equações paramétricas dos planos dados a seguir:

    (a) $y = z$

    (b) $3x + y - 2 = 0$

    (c) $5x + z = 2$

11. Encontre as equações simétricas e paramétricas da reta que passa pelos pontos $A = (0, 1, 2)$ e $B = (1, 2, 1)$.

12. Determine as equações paramétricas da reta que satisfaz as seguintes propriedades:

    (a) que passa por $P_0 = (1, 1, 2)$ e é paralela ao vetor $\vec{u} = (2, 0, 3)$.

    (b) que passa pelos pontos $P_0 = (1, 2, 0)$ e $P_1 = (1, 3, 2)$.

13. Determine as equações paramétricas da reta
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z - 2.$$

14. Para que valores de A e D a reta $x = 3 + 4t, y = 1 - 4t, z = -3 + t, t \in \mathbb{R}$, pertence ao plano
$$Ax + 2y - 4z + D = 0?$$

15. Qual dos seguinte pares de equações representam uma reta ?

    (a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

    (b) $\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x + y - 2z = 2 \end{cases}$

    (c) $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 6x - 3y + 3z = 6 \end{cases}$

16. Determine as equações paramétricas da reta r dada pelas equações abaixo:

$$r : \begin{cases} x + 2y - 3z - 4 = 0 \\ x - 4y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

17. Encontre as equações da reta r que passa pelo ponto $P_0 = (1, 2, 1)$ e é perpendicular ao plano $x - y + 2z = 1$.

18. Encontre a equação da reta r que passa pelo ponto $A = (1, 0, 1)$ e é paralela aos planos $2x+3y+z = 1$ e $x-y+z = 0$.

19. Encontre a equação do plano π que passa pelo ponto $(-1, -2, -3)$ e contém a reta $x = t, y = 2t, z = 1$.

20. Classifique as retas abaixo como paralelas ou coincidentes:

   (a) $r : \begin{cases} x &= t \\ y &= t+1 \\ z &= 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ e $s : \begin{cases} x &= -t \\ y &= -t+2 \\ z &= -2t+1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

   (b) $r : \begin{cases} x &= 2t \\ y &= t+1 \\ z &= -t+2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ e $s : \begin{cases} x &= 4t+4 \\ y &= 2t+3 \\ z &= -2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

   (c) $r : \begin{cases} x &= 3t+1 \\ y &= t+1 \\ z &= -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ e $s : \begin{cases} x &= 6t-8 \\ y &= 2t+4 \\ z &= -2t+3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

21. Verifique se as retas abaixo são paralelas, se interceptam em um ponto ou são reversas:

   (a) $r_1 : \dfrac{x-2}{-1} = 2 - y = \dfrac{z-1}{2}$ e $r_2 : \begin{cases} x &= -2t \\ y &= -2t \\ z &= 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

   (b) $r_1 : \begin{cases} x &= t+1 \\ y &= t+2 \\ z &= 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ e $r_2 : \begin{cases} x &= -t \\ y &= 2t \\ z &= t+1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

   (c) $r_1 : x = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{3}$ e $r_2 : \begin{cases} x &= 2t \\ y &= t+1 \\ z &= -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

   (d) $r_1 : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{2y-2}{2} = \dfrac{z}{3}$ e $r_2 : \begin{cases} x &= t \\ y &= 2 \\ z &= 2t+1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

22. Determine para os pares de retas reversas do exercício anterior, os planos paralelos π_1 e π_2 tais que $r_1 \subset \pi_1$ e $r_2 \subset \pi_2$.

23. Determine para os pares de retas reversas do exercício 23:

   (a) o plano π que contém r_1 e é paralelo a $\vec{w}$, onde $\vec{w}$ é um vetor perpendicular a r_1 e r_2.
   (b) o ponto P_2 de interseção da reta r_2 com o plano π.
   (c) a reta s que passa por P_2 e é paralela a $\vec{w}$.
   (d) o ponto P_1 de interseção da reta s com a reta r_1.

24. Verifique se os seguintes ternos de planos se interceptam segundo um ponto. Em caso afirmativo, ache as coordenadas deste ponto.

   (a) $2x + y + z = 1, x + 3y + z = 2, x + y + 4z = 3$.
   (b) $x - 2y + z = 0, 2x - 4y + 2z = 1, x + y = 0$.
   (c) $3x + 2y - z = 8, 2x - 5y + 2z = -3, x - y + z = 1$.

25. Verifique se planos são paralelos ou coincidem dois a dois:

$$\pi_1 : x - 2y = 3;$$

$$\pi_2 : x + 2y + z = 0;$$

$$\pi_3 : x + 2y + z = 2;$$

$$\pi_4 : 3x - 6y = 9;$$

$$\pi_5 : \begin{cases} x &= 2t + 3 \\ y &= t + 1 \\ z &= s + 1 \end{cases} , t, s \in \mathbb{R}$$

26. Determine a equação do plano π que passa pelo ponto $(-4, 2, 9)$ e é perpendicular ao eixo-OZ.

27. Determine a equação do plano π:
    (a) perpendicular ao plano π_{xy} que passa pelos pontos $(2, -2, 11)$ e $(-7, -8, -3)$.
    (b) perpendicular ao plano $4x - 3y + 2z = 9$ que passa pelos pontos $(2, -6, 4)$ e $(3, -7, 5)$.
    (c) que passa pelo ponto $(3, -1, 0)$ e é perpendicular a cada um dos planos $4x - y - z = 1$ e $2x + y + 3z = 6$.
    (d) que contém o eixo-OY e o ponto $(8, 4, -6)$.

28. Determine a equação do plano π perpendicular ao plano $2x - 2y + z + 4 = 0$ que passa pelo ponto $(3, 1, -1)$ e corta o eixo-OZ no ponto $(0, 0, -3)$.

29. Determine a equação do plano π que é paralelo ao plano $7x + 3y - 2z + 2 = 0$ e corta o eixo-OZ no ponto $(0, 0, 4)$.

30. Determine a equação do plano π que passa pela reta de interseção dos planos $3x + y - 2z + 2 = 0$ e $x - 3y - z + 3 = 0$ e é perpendicular ao plano π_{xy}.

31. As equações de uma reta r são $\begin{cases} 4x + 2y - 3z + 8 = 0 \\ 2x - y + z - 11 = 0 \end{cases}$. Mostre que esta reta r está contida no plano $\pi : 2x + 7y - 9z + 49 = 0$.

32. Mostre que a reta $r : \frac{x+3}{4} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z+7}{2}$ pertence ao plano $\pi : x - 2y - 3z - 8 = 0$.

33. Mostre que a reta $r : \begin{cases} x + 3y + z + 9 = 0 \\ 4x + 3y - 2z + 12 = 0 \end{cases}$ é paralela ao plano $\pi : 2x - 3y - 4z + 6 = 0$.

34. Mostre que as retas $r_1 : \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - 4y + 2z + 12 = 0 \end{cases}$ e $r_2 : \frac{x+7}{2} = \frac{3y+4}{-3} = \frac{9-z}{3}$ são paralelas.

35. Determine a equação da reta r que passa pelo ponto $(5, 0, -3)$ e é paralela à reta $\frac{x+6}{3} = \frac{y+2}{-8} = \frac{4-3z}{9}$.

36. Mostre que as retas $r_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{4}$ e $r_2 : \frac{x-3}{2} = \frac{3-2y}{2} = \frac{1-z}{-4}$ são paralelas e encontre a equação do plano determinado pelas mesmas.

37. Determine a equação do plano π que contém a reta r_1 e é paralelo à reta r_2, onde

$$r_1 : \begin{cases} 5x - 3y + 2z + 1 = 0 \\ x + 3y - z + 11 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x + 4y - 3z - 2 = 0 \\ 3x - y + 4z - 9 = 0 \end{cases}$$

38. Determine a interseção da reta r com o plano π, onde

$$r : \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 4x + z = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi : \begin{cases} x = 2t - s \\ y = t + s - 1 \\ z = 1 - t. \end{cases} , t, s \in \mathbb{R}$$

39. Determine dois planos cuja interseção é a reta

$$r : \begin{cases} x = 2t \\ y = t + 1 \\ z = -t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

40. Determine a interseção da reta r com o plano π, onde

$$r : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 1 \\ z = -t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \pi : 2x - y + 2z = 3.$$

41. Verifique se os vetores são ou não colineares:
    (a) $(3, -1, 2)$ e $(-6, 2, -4)$
    (b) $(1, 1, 2)$ e $(2, 3, 1)$
42. Se os pontos A, B, C são os vértices de um paralelogramo $ABDC$, determine o ponto D, onde
    (a) $A = (0, 0, 0), B = (1, 2, 3), C = (-1, 1, 3)$
    (b) $A = (1, 2, 3), B = (-1, 3, 1), C = (4, 1, 3)$
43. Sejam $\vec{u} = (1, 2, -3)$ e $\vec{v} = (2, 1, -2)$ vetores no espaço. Determine os vetores unitários paralelos ao vetor $2\vec{u} - 3\vec{v}$.
44. Determine $x \in \mathbb{R}$ para o qual os vetores $(x, 3, 4)$ e $(3, 1, 2)$ são perpendiculares.
45. Prove que não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que os vetores $(x, 2, 4)$ e $(x, -2, 3)$ sejam perpendiculares.
46. Determine os cossenos dos ângulos do triângulo cujos vértices são os pontos $A = (3, 2, 1), B = (3, 2, 2)$ e $C = (3, 3, 2)$.
47. Verifique se os pontos $A = (2, 2, 1), B = (3, 1, 2), C = (2, 3, 0)$ e $D = (2, 3, 2)$ são coplanares.
48. Encontre $s, t \in \mathbb{R}$ para que os vetores $\vec{v} = (s, 0, t)$ e $\vec{w} = (t, s, s)$ sejam perpendiculares.

Respostas:

1. Equação cartesiana: $x + y - 2z = -3$
   Equações paramétricas: $x = 1 - s, y = 2t + s, z = 2 + t$ onde $t, s \in \mathbb{R}$
2. É necessário provar que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são colineares para que A, B e C determinem um plano.
   Equação cartesiana: $-x + y + z = 2$
   Equações paramétricas: $x = 1 + t - s, y = 2 + t - 4s, z = 1 + 3s$ onde $t, s \in \mathbb{R}$
3. $C = (0, 0, 0)$ é tal que $d(A, C) = d(B, C)$
4. $B = (2/3, 1/3, 0)$
5. (a) $x + 2y + 3z = 13$
   (b) $-x - 3y + z = -6$
6. $(1/2, -1/2, \sqrt{2}/2)$
7. $\pi : x + y + z = 1$
8. $\vec{u} = (6/7, 3/7, 2/7)$
9. (a) $x + y - z = 2$
   (b) $2x - y + 5z = 12$
10. (a) $x = t, y = s, z = s$, onde $t, s \in \mathbb{R}$
    (b) $x = 1, y = -1, z = t + 2s$, onde $t, s \in \mathbb{R}$
    (c) $x = 1, y = 1 + t + s, z = -3$, onde $t, s \in \mathbb{R}$
11. Equação simétrica: $x = y - 1 = 2 - z$
    Equações paramétricas: $x = t, y = 1 + t, z = 2 - t$, onde $t \in \mathbb{R}$
12. (a) $x = 1 + 2t, y = 1, z = 2 + 3t$, onde $t \in \mathbb{R}$
    (b) $x = 1, y = 2 + t, z = 2t$, onde $t \in \mathbb{R}$

13. $x = 1 + 2t, y = 3t, z = t + 2$, onde $t \in \mathbb{R}$
14. $A = 3$ e $D = -23$
15. (a) Sim, a reta $x = y = z$
    (b) Não, são planos paralelos
    (c) Não, são planos coincidentes
16. $r : x = 9 + 8t, y = 5 + 5t, z = 5 + 6t$, onde $t \in \mathbb{R}$
17. $r : x = 1 + t, y = 2 - t, z = 1 + 2t$, onde $t \in \mathbb{R}$
18. $r : x = 1 - 4t, y = t, z = 1 + 5t$, onde $t \in \mathbb{R}$
19. $\pi : 2x - y = 0$
20. (a) r e s são paralelas
    (b) r e s são coincidentes
    (c) r e s são paralelas
21. (a) r_1 e r_2 são paralelas
    (b) r_1 e r_2 são reversas
    (c) r_1 e r_2 são concorrentes no ponto $(0, 1, 0)$
    (d) r_1 e r_2 são reversas
22. Para a letra b temos: $\pi_1 : -x + y - 3z = -5$ e $\pi_2 : -x + y - 3z = -3$
    Para a letra d temos: $\pi_1 : -2x + y + z = -3$ e $\pi_2 : -2x + y + z = 3$
23. Para a letra b temos:
    (a) $\pi : 3x - 3y - 2z = -7$
    (b) $P_2 = (-5/11, 10/11, 16/11)$
    (c) $s : x = -5/11 - t, y = 10/11 + t, z = 16/11 - 3t$, onde $t \in \mathbb{R}$
    (d) $P_1 = (-3/11, 8/11, 2)$

    Para a letra d temos:
    (a) $\pi : x + 4y - 2z = 6$
    (b) $P_2 = (0, 2, 1)$
    (c) $s : x = -2t, y = 2 + t, z = 1 + t$, onde $t \in \mathbb{R}$
    (d) $P_1 = (2, 1, 0)$
24. (a) Se interceptam em $(-1/17, 8/17, 11/17)$
    (b) Não se interceptam
    (c) Se interceptam em $(11/6, 5/3, 5/6)$
25. $\pi_1 = \pi_4$, $\pi_2 \parallel \pi_3$ e $\pi_4 \parallel \pi_5$
26. $\pi : z = 9$
27. (a) $\pi : 2x - 3y = 10$
    (b) $\pi : x + 2y + z = -6$
    (c) $\pi : x + 7y - 3z = -4$
    (d) $\pi : 3x + 4y = 0$
28. $\pi : 5x + y - 8z = 24$
29. $\pi : 7x + 3y - 2z = -8$
30. $\pi : x + 7y = 4$
31. Dica: Encontre a equação cartesiana da reta r e substitua na equação de π.
32. Utilize a mesma sugestão do exercício anterior.
33. Dica: Encontre um vetor paralelo a r e compare com um vetor perpendicular a π. Eles deverão ser perpendiculares.
34. Dica: Encontre um vetor paralelo a r_1 e um vetor paralelo a r_2 e compare-os. Tais vetores deverão ser paralelos. Ainda é necessário mostrar que as retas não são coincidentes, ou seja, basta encontrar um ponto que pertença a r_1 e não pertença a r_2.
35. $r : x = 5 + 3t, y = -8t, z = -3 - 3t$, onde $t \in \mathbb{R}$
36. Utilize a dica do exercício 35.
    O plano procurado é: $\pi : -5x + 18y + 7z = 19$
37. $\pi : 11x + 15y - 4z = -67$
38. $r \cap \pi = (-1/13, -24/13, 17/13)$
39. Um exemplo é $\pi_1 : x + 2z = 4$ e $\pi_2 : -2x + 5y + z = 7$. Lembrem-se: existem infinitos exemplos para este caso !
40. $r \cap \pi = r$ pois $r \subset \pi$
41. (a) Sim
    (b) Não
42. Para encontrar D basta encontrar a interseção da reta paralela a $\overrightarrow{AC}$ que passa por B com a reta paralela a $\overrightarrow{AB}$ que passa por C.
    (a) $D = (0, 3, 6)$
    (b) $D = (2, 2, 1)$
43. $\pm\frac{1}{\sqrt{17}}(-4, 1, 0)$
44. $x = -11/8$
45. $<(x, 2, 4), (x, -2, 3)>= x^2 + 8 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$
46. $\hat{B} = \pi/2$ e $\hat{A} = \hat{C} = \pi/4$
47. Basta mostrar que que existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.
48. $s = 0$ ou $t = 0$