Universidade Federal Fluminense
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

Estatística Básica para Engenharia
Prof. Mariana Albi

Material de Apoio
Assunto: Análise Combinatória

Análise Combinatória (Regras de Contagem)

(Será útil pois, de acordo com a definição clássica de probabilidade, devemos saber contar o nº de elementos de um conjunto/evento; e nem sempre é possível listar.)

1 Princípio Fundamental da Adição

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_k$ conjuntos tais que $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$, e $\#A_i = n_i$. Neste caso,

$$\#\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} (\#A_i) = n_1 + \ldots + n_k.$$

2 Princípio Fundamental da Multiplicação

Se temos k decisões (ou uma decisão em k etapas), d_1, d_2, $\ldots$, d_k, que podem ser tomadas de n_1, n_2, $\ldots$, n_k maneiras, respectivamente, então o número de maneiras de tomar as decisões d_1, $d_2, \ldots$ e d_k é

$$n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k.$$

2.1 Exemplos:

(a) Quantos números inteiros múltiplos de 5 com 3 algarismos existem?

$$9 \times 10 \times 2 = 180$$

**o 2 é devido aos múltiplos de 5 terminarem em 0 ou 5.*

(b) Tenho 2 calças e 4 blusas. De quantas maneiras diferentes posso me vestir?

$$2 \times 4 = 8$$

(c) Quantos números pares com 2 algarismos distintos existem?

$$8 \times 4 + 9 \times 1 = 41$$

**o 8 se deve ao fato de não podermos escolher nem o 0 nem o segundo algarismo; o 4 corresponde às possíveis escolhas $\{2, 4, 6, 8\}$; o 9 se deve ao fato de não podermos escolher o zero.*

3 Permutação Simples

Dados n objetos distintos, o nº de permutações simples (ordenações) de tais objetos é dada por:

$$P_n^n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1.$$

3.1 Exemplos:

(a) Quantos números diferentes podemos formar com os algarismos 4, 7 e 9?

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

(b) Quantas filas diferentes podem ser formadas com 4 pessoas?

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

(c) Se temos 2 homens e 4 mulheres, de quantas maneiras diferentes essas pessoas podem se organizar em uma fila? Qual a probabilidade de que na fila, todas as mulheres fiquem em posições consecutivas?

(i) nº de filas diferentes $= 6!$

(ii) nº de filas com todas as mulheres juntas $= 3! \times 4! = 6 \times 24 = 144$

* $3!$ - *permuta a fila de mulheres com os homens*
* $4!$ - *permuta as mulheres*

(iii) probabilidade $= \dfrac{\#casos\ \ favoraveis}{\#casos\ \ possiveis} = \dfrac{3! \times 4!}{6!} = \dfrac{3!}{6 \times 5} = \dfrac{1}{5}$

(d) 5 moças e 5 rapazes devem sentar em 5 bancos de 2 lugares. Qual a probabilidade de termos um casal em cada banco?

$$\frac{5! \times 5! \times 2^5}{10!} = 0,127$$

* 2^5 *representa o número de maneiras diferentes que podemos trocar moças e rapazes de lugar.*

4 Permutações de k dentre n objetos (Arranjo)

Dados n objetos distintos, o número de permutações simples de $k \leq n$ objetos selecionados entre os n é dado por:

$$P_n^k = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1).$$

4.1 Observação:

$$P_n^k = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) \times \frac{(n-k) \times (n-k-1) \times \ldots \times 1}{(n-k) \times (n-k-1) \times \ldots \times 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Sorteio sem reposição de elementos de um certo grupo, onde a ordem é relevante.

4.2 Exemplos:

(a) Em um campeonato com 20 times, quantas possibilidades existem para os 3 primeiros lugares?

$$P_{20}^{3} = \frac{20!}{17!} = 20 \times 19 \times 18 = 6840$$

(b) Se 12 bolas são distribuídas em 20 caixas aleatoriamente, qual a probabilidade de que nenhuma caixa receba mais de uma bola?

↙ Sorteio uma caixa para cada bola

$$\frac{P_{20}^{12}}{20^{12}} = \frac{20!}{8! \times 20^{12}}$$

↖ para cada bola pode-se escolher 20 caixas

(c) Problema dos Aniversários
Qual a probabilidade de pelo menos 2 pessoas em um grupo com k pessoas façam aniversário no mesmo dia? (Desconsidere pessoas nascidas em 29 de fevereiro e gêmeos no grupo)

(i) Se $k > 365$, então a probabilidade é de 100%, pois há mais pessoas que dias no ano.

(ii) Se $2 \leq k \leq 365$
P(pelo menos 2 façam aniversário no mesmo dia)=
1-P(todos façam aniversários em dias diferentes)=

$$1 - \frac{P_{365}^{k}}{365^{k}} = 1 - \frac{365!}{(365-k)!} \cdot \frac{1}{365^{k}}$$

Curiosidade: com $k = 23$, a probabilidade já chega a $0,507$. Veja na tabela outros valores para k e as respectivas probabilidades:

k	10	20	30	40	50	60
P	0,117	0,411	0,706	0,891	0,970	0,994

4.3 Exercício:

Uma secretária deveria mandar 4 cartas, uma para cada pessoa. Ela colocou ao acaso as 4 cartas nos 4 envelopes previamente endereçadas e as enviou. Qual a probabilidade

(a) de que todos tenham recebido a carta correta?

(b) de que ao menos um tenha recebido a carta correta?

5 Combinação Simples

O número de combinações simples de n elementos distintos tomados k a k é igual a

$$C_n^k = \frac{P_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

$\binom{n}{k}$ *é chamado coeficiente binomial.*

5.1 Observação:

Nas combinações, estamos formando subconjuntos de k elementos dentre n, portanto a ordem dos elementos não importa. Por outro lado, nas permutações, formamos sequências de k elementos, portanto a ordem é relevante.

$$*a\ ordem\ muda \Rightarrow ARRANJO$$
$$*a\ ordem\ não\ muda \Rightarrow COMBINAÇÃO$$

5.2 Exemplos:

(a) Queremos formar uma comissão com 8 pessoas dentre um grupo com 10 homens e 6 mulheres. Qual a probabilidade de que o grupo possua exatamente 4 homens e 4 mulheres?

$$\frac{\binom{10}{4} \times \binom{6}{4}}{\binom{16}{8}} = 0,245$$

(b) Jogo da Mega-Sena
Apostas de 6 a 15 números diferentes dentre 1 a 60.

1. Qual a chance de ganhar com um jogo simples (6 números)?

$$\frac{1}{\binom{60}{6}} = \frac{1}{50063860} = 0,000000019974$$

2. Qual a chance de ganhar com uma aposta de 15 números?

$$\frac{\binom{15}{6}}{\binom{60}{6}} = \frac{5005}{50063860} = 0,00009997$$

**Se um jogo simples custa R$ 1,50, um jogo com 15 números custa* $5005 \times R\$1,50 = R\$7507,50$

6 Coeficientes Multinomiais

Suponha que queremos alocar n elementos distintos em k categorias disjuntas ($k \geq 2$), com n_j elementos alocados na j-ésima categoria ($j = 1, \ldots, k$, $\sum n_j = n$). Nesta situação, os n elementos podem ser alocados nas k categorias de

$$\binom{n}{n_1, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2} \ldots \binom{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}{n_k}$$

maneiras diferentes.

6.1 Exemplos:

(a) Se n dados balanceados são jogados, qual a probabilidade de que o número j apareça exatamente n_j vezes?
(considere $j = 1, \ldots, 6$ e $\sum n_j = n$)

$$\frac{\binom{n}{n_1, \ldots, n_6}}{6^n} = \frac{n!}{6^n \times n_1! \ldots n_6!}$$

(b) Suponha que 18 contas vermelhas, 12 amarelas, 12 pretas e 8 azuis serão enfiadas em uma linha para formar um colar. Quantos arranjos de cores diferentes podem ser formados?

$$\binom{18+12+12+8}{12, 12, 12, 8} = \binom{50}{18, 12, 12, 8} = 5,135 \times 10^{26}$$