



**UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA**



DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

Ana Maria Lima de Farias

Março 2009

Conteúdo

1	Variáveis Aleatórias Contínuas	3
1.1	Noções básicas	3
1.2	Variável aleatória contínua	5
1.3	Função de densidade de probabilidade	5
1.4	Função de distribuição acumulada	7
1.5	Esperança de variáveis aleatórias contínuas	8
1.5.1	Esperança de funções de variáveis aleatórias contínuas	9
1.6	Variância de variáveis aleatórias contínuas	9
1.7	Propriedades da média e da variância de variáveis aleatórias contínuas	10
1.8	Exemplo 1	10
1.9	Exemplo 2	14
1.10	Exemplo 3	17
1.11	Exercícios resolvidos	21
1.12	Exercícios propostos	25
2	Algumas Distribuições Contínuas	26
2.1	Distribuição uniforme	26
2.1.1	Função de distribuição acumulada	27
2.1.2	Esperança	28
2.1.3	Variância	28
2.1.4	Exercícios propostos	28
2.2	Distribuição exponencial	29
2.2.1	Função de distribuição acumulada	30
2.2.2	Alguns resultados sobre a função exponencial	30
2.2.3	Esperança	31
2.2.4	Variância	32
2.2.5	Parametrização alternativa	32
2.2.6	Exercícios resolvidos	33
2.2.7	Exercícios propostos	33
2.3	Distribuição gama	34
2.3.1	A função gama	34
2.3.2	A distribuição gama	35
2.3.3	O gráfico da distribuição gama	35
2.3.4	Esperança	39
2.3.5	Variância	40
2.3.6	Função de distribuição acumulada	41
2.3.7	A distribuição de Erlang	41

2.3.8	A distribuição qui-quadrado	41
2.4	Distribuição de Weibull	41
2.4.1	Definição	41
2.4.2	Esperança e variância	42
2.4.3	Função de distribuição acumulada	42
2.5	Distribuição de Pareto	43
2.5.1	Definição	43
2.5.2	Esperança	43
2.5.3	Variância	44
2.5.4	Função de distribuição acumulada	44
3	Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas	45
3.1	Exemplo	45
3.2	Funções inversíveis	46
3.2.1	Exemplo	48
3.2.2	Transformação linear	49
4	A Distribuição Normal	51
4.1	Alguns resultados de Cálculo	51
4.1.1	Exercício resolvido	51
4.2	Densidade normal padrão	52
4.2.1	Definição	52
4.2.2	Esperança	52
4.2.3	Variância	52
4.2.4	Características da curva normal padrão	53
4.2.5	Função de distribuição acumulada	54
4.2.6	Tabulação da distribuição normal padrão	54
4.2.7	Exemplos	55
4.3	Densidade $N(\mu; \sigma^2)$	59
4.3.1	Definição	59
4.3.2	Características da curva normal	59
4.3.3	Parâmetros da $N(\mu; \sigma^2)$	60
4.3.4	Função de distribuição acumulada	61
4.3.5	Cálculo de probabilidades de uma variável normal	63
4.3.6	Exemplos	63
4.4	Exemplo: qui-quadrado e normal	68
4.4.1	Tabela da qui-quadrado	69
4.4.2	Exemplos	71
4.5	A distribuição log-normal	71
4.5.1	Definição	71
4.5.2	Esperança	72
4.5.3	Variância	74
4.6	Exercícios propostos	75

Capítulo 1

Variáveis Aleatórias Contínuas

1.1 Noções básicas

No estudo das distribuições de frequência para variáveis quantitativas contínuas, vimos que, para resumir os dados, era necessário agrupar os valores em classes. O histograma e o polígono de frequências eram os gráficos apropriados para representar tal distribuição. Para apresentar os conceitos básicos relativos às variáveis aleatórias contínuas, vamos considerar os histogramas e respectivos polígonos de frequência apresentados na **Figura 1.1**. Esses gráficos representam as distribuições de frequências de um mesmo conjunto de dados, cada uma com um número de classes diferente — no histograma superior, há menos classes do que no histograma inferior. Suponhamos, também que as áreas de cada retângulo sejam iguais às frequências relativas das respectivas classes (essa é a definição mais precisa de um histograma). Por resultados vistos anteriormente, sabemos que a soma das áreas dos retângulos é 1 (as frequências relativas devem somar 1 ou 100%) e que cada frequência relativa é uma aproximação para a probabilidade de um elemento pertencer à respectiva classe.

Analisando atentamente os dois gráficos, podemos ver o seguinte: à medida que aumentamos o número de classes, diminui a diferença entre a área total dos retângulos e a área abaixo do polígono de frequência.

A divisão em classes se fez pelo simples motivo de que uma variável contínua pode assumir um número não-enumerável de valores. Faz sentido, então, pensarmos em reduzir, cada vez mais, o comprimento de classe δ , até a situação limite em que $\delta \rightarrow 0$. Nessa situação limite, o polígono de frequências se transforma em uma curva na parte positiva (ou não-negativa) do eixo vertical, tal que a área sob ela é igual a 1. Essa curva será chamada *curva de densidade de probabilidade*.

Considere, agora, a **Figura 1.2**, onde ilustramos um fato visto anteriormente: para estimar a frequência de valores da distribuição entre os pontos a e b , podemos usar a área dos retângulos sombreados de cinza claro.

Conforme ilustrado na **Figura 1.3**, a diferença entre essa área e a área sob o polígono de frequências tende a diminuir, à medida que aumenta-se o número de classes. Essa diferença é a parte sombreada de cinza mais escuro. Isso nos permite concluir, intuitivamente, o seguinte: no limite, quando $\delta \rightarrow 0$, podemos estimar a probabilidade de uma variável de interesse estar entre dois valores a e b pela área sob a curva de densidade de probabilidade, delimitada pelos pontos a e b .

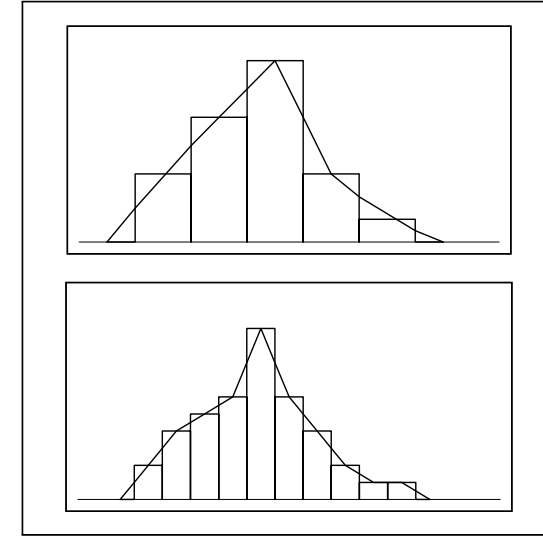


Figura 1.1: Histogramas de uma variável contínua com diferentes números de classes

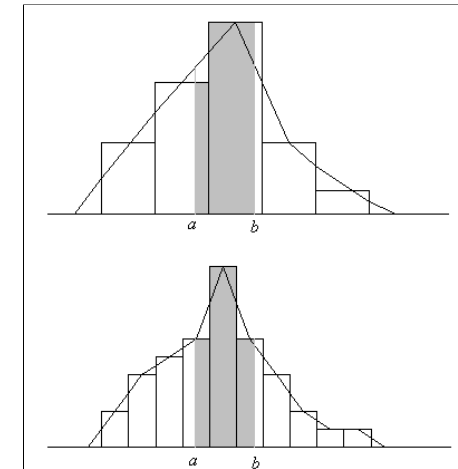


Figura 1.2: Cálculo da frequência entre dois pontos a e b

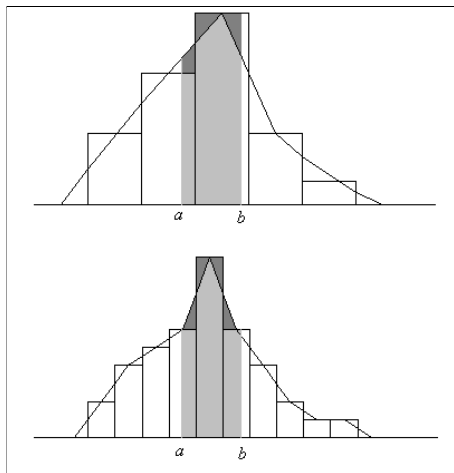


Figura 1.3: Diferença entre as áreas dos retângulos e a área sob o polígono de freqüência

1.2 Variável aleatória contínua

Apresentamos, mais uma vez, o conceito de variável aleatória, que já foi visto no estudo das variáveis discretas, por ser este um conceito muito importante. Relembramos também as definições de variáveis aleatórias discretas e contínuas.

Definição 1.1 Uma **variável aleatória** é uma função real (isto é, que assume valores em $\mathbb{R}$) definida no espaço amostral Ω de um experimento aleatório. Dito de outra forma, uma variável aleatória é uma função que associa a cada evento de Ω um número real.

Definição 1.2 Uma variável aleatória é **discreta** se sua imagem (ou conjunto de valores que ela assume) for um conjunto finito ou enumerável. Se a imagem for um conjunto não enumerável, dizemos que a variável aleatória é **contínua**.

1.3 Função de densidade de probabilidade

Os valores de uma variável aleatória contínua são definidos a partir do espaço amostral de um experimento aleatório. Sendo assim, é natural o interesse na probabilidade de obtenção de diferentes valores dessa variável. O comportamento probabilístico de uma variável aleatória contínua será descrito pela sua *função de densidade de probabilidade*.

Inicialmente apresentamos a definição da função de densidade de probabilidade utilizando a noção de área, para seguir a apresentação inicial que considerou um histograma de uma variável contínua.

Definição 1.3 Uma **função de densidade de probabilidade** é uma função $f(x)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- $f(x) \geq 0$
- A área total sob o gráfico de $f(x)$ é igual a 1.
- Dada uma função $f(x)$ satisfazendo as propriedades acima, então $f(x)$ representa alguma variável aleatória contínua X , de modo que $P(a \leq X \leq b)$ é a área sob a curva limitada pelos pontos a e b (veja a **Figura 1.4**).

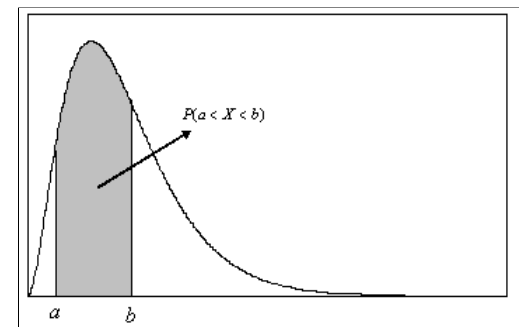


Figura 1.4: Probabilidade como área

A definição acima usa argumentos geométricos; no entanto, uma definição mais precisa envolve o conceito de *integral* de uma função de uma variável, que, como se sabe, representa a área sob o gráfico da função.

Definição 1.4 Uma **função de densidade de probabilidade** é uma função $f(x)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- $f(x) \geq 0$
- $\int f(x)dx = 1$
- Dada uma função $f(x)$ satisfazendo as propriedades acima, então $f(x)$ representa alguma variável aleatória contínua X , de modo que

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Para deixar clara a relação entre a função de densidade de probabilidade e a respectiva variável aleatória X , usaremos a notação $f_X(x)$.

Uma primeira observação importante que resulta da interpretação geométrica de probabilidade como área sob a curva de densidade de probabilidade é a seguinte: se X é uma variável aleatória contínua, então a probabilidade do evento $X = a$ é zero, ou seja, a probabilidade de X ser exatamente igual a um valor específico é nula. Isso pode ser visto na **Figura 1.4**: o evento $\{X = a\}$ corresponde a um segmento de reta e tal segmento tem área nula. Como consequência, temos as seguintes igualdades:

$$\Pr(a \leq X \leq b) = \Pr(a \leq X < b) = \Pr(a < X \leq b) = \Pr(a < X < b)$$

1.4 Função de distribuição acumulada

Da mesma forma que a função de distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta, a função de densidade de probabilidade nos dá toda a informação sobre a variável aleatória contínua X , ou seja, a partir da função de densidade de probabilidade, podemos calcular qualquer probabilidade associada à variável aleatória X . Também como no caso discreto, podemos calcular probabilidades associadas a uma variável aleatória contínua X a partir da *função de distribuição acumulada* (também denominada simplesmente função de distribuição).

Definição 1.5 Dada uma variável aleatória X , a *função de distribuição acumulada* de X é definida por

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

A definição é a mesma vista para o caso discreto; a diferença é que, para variáveis contínuas, a função de distribuição acumulada é uma função contínua, sem saltos. Veja a **Figura ??** para um exemplo.

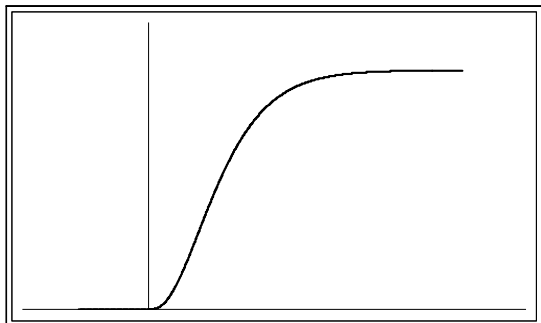


Figura 1.5: Exemplo de função de distribuição acumulada de uma variável aleatória contínua

Como no caso discreto, valem as seguintes propriedades para a função de distribuição acumulada de uma variável aleatória contínua:

$$0 \leq F_X(x) \leq 1 \quad (1.2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1 \quad (1.3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \quad (1.4)$$

$$a < b \Rightarrow F_X(a) \leq F_X(b) \quad (1.5)$$

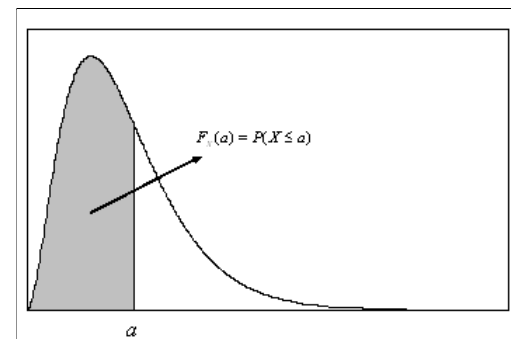


Figura 1.6: Função de distribuição acumulada - cálculo a partir da área sob a curva de densidade

Da interpretação de probabilidade como área, resulta que $F_X(x)$ é a área à esquerda de x sob a curva de densidade f_X . Veja a **Figura 1.6**.

Existe uma relação entre a função de densidade de probabilidade e a função de distribuição acumulada, que é resultante do Teorema Fundamental do Cálculo.

Por definição, temos o seguinte resultado:

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du \quad (1.6)$$

e do Teorema Fundamental do Cálculo resulta que

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) \quad (1.7)$$

isto é, a função de densidade de probabilidade é a *derivada* da função de distribuição acumulada.

1.5 Esperança de variáveis aleatórias contínuas

Nas distribuições de frequências agrupadas em classes de variáveis quantitativas contínuas, vimos que a média podia ser calculada como

$$\bar{x} = \sum f_i x_i$$

onde f_i era a frequência relativa da classe i e x_i era o ponto médio da classe i . Continuando com a idéia inicial de tomar classes de comprimento cada vez menor, isto é, fazendo $\delta \rightarrow 0$, chegamos à seguinte definição de esperança ou média de uma variável aleatória contínua.

Definição 1.6 Seja X uma variável aleatória contínua com função de densidade de probabilidade f_X . A *esperança* (ou *média* ou *valor esperado*) de X é definida como

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad (1.8)$$

1.5.1 Esperança de funções de variáveis aleatórias contínuas

Se X é uma variável aleatória contínua e $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função qualquer, então $Y = h(X)$ é uma variável aleatória e sua esperança é dada por

$$E(h(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)f_X(x)dx \quad (1.9)$$

1.6 Variância de variáveis aleatórias contínuas

Vimos também que a variância, uma medida de dispersão, era calculada como a média dos desvios quadráticos em torno da média, ou seja

$$\sigma^2 = \sum f_i(x_i - \bar{x})^2$$

No caso de uma variável aleatória contínua, fazendo $h(x) = [x - E(X)]^2$, resulta novamente a definição de variância como média dos desvios quadráticos:

Definição 1.7 *Seja X uma variável aleatória contínua com função de densidade de probabilidade f_X . A **variância** de X é definida como*

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f_X(x)dx \quad (1.10)$$

O **desvio padrão** é definido como

$$DP(X) = \sqrt{Var(X)} \quad (1.11)$$

Usando as propriedades do cálculo integral e representando por μ a esperança de X (note que μ é uma constante, um número real), temos que:

$$\begin{aligned} Var(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [x - \mu]^2 f_X(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f_X(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx - 2\mu \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx + \mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx \end{aligned}$$

Se definimos $h(x) = x^2$, a primeira integral nada mais é que $E(X^2)$, pelo resultado (1.9). A segunda integral é $E(X) = \mu$ e a terceira integral é igual a 1, pela definição de função de densidade. Logo,

$$Var(X) = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$$

o que nos leva ao resultado já visto para variáveis discretas:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad (1.12)$$

De forma resumida: a variância é a esperança do quadrado de X menos o quadrado da esperança de X .

1.7 Propriedades da média e da variância de variáveis aleatórias contínuas

As mesmas propriedades vistas para variáveis aleatórias discretas continuam valendo no caso contínuo:

Esperança	Variância	Desvio Padrão
$E(a) = a$	$Var(a) = 0$	$DP(a) = 0$
$E(X + a) = E(X) + a$	$Var(X + a) = Var(X)$	$DP(X + a) = DP(X)$
$E(bX) = bE(X)$	$Var(bX) = b^2 Var(X)$	$DP(bX) = b DP(X)$
$x_{\min} \leq E(X) \leq x_{\max}$	$Var(X) \geq 0$	$DP(X) \geq 0$

Esses resultados podem ser facilmente demonstrados a partir das propriedades da integral definida e das definições vistas. Por exemplo, vamos demonstrar que $E(bX) = bE(X)$ e $Var(bX) = b^2 Var(X)$. Por definição, temos que

$$E(bX) = \int bx f_X(x)dx = b \int x f_X(x)dx = bE(X)$$

Usando este resultado e a definição de variância, temos que

$$\begin{aligned} Var(bX) &= E[(bX)^2] - [E(bX)]^2 \\ &= E(b^2 X^2) - [bE(X)]^2 \\ &= b^2 E(X^2) - b^2 [E(X)]^2 \\ &= b^2 \{E(X^2) - [E(X)]^2\} \\ &= b^2 Var(X) \end{aligned}$$

Se interpretamos a função de densidade de probabilidade de X como uma distribuição de massa na reta real, então $E(X)$ é o centro de massa desta distribuição. Essa interpretação nos permite concluir, por exemplo, que se f_X é simétrica, então $E(X)$ é o valor central, que define o eixo de simetria.

1.8 Exemplo 1

Considere a função f_X apresentada na **Figura 1.7**.

1. Encontre o valor de k para que f_X seja uma função de densidade de probabilidade de uma variável aleatória X .
2. Determine a equação que define f_X .
3. Calcule $\Pr(2 \leq X \leq 3)$.
4. Calcule a esperança e a variância de X .
5. Determine o valor de k tal que $\Pr(X \leq k) = 0,6$.

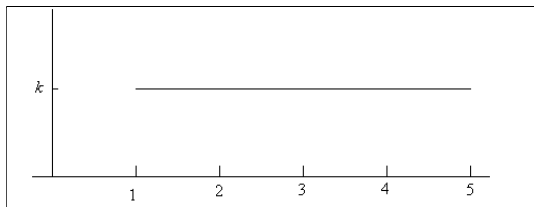


Figura 1.7: Função de densidade de probabilidade para o Exemplo 1

6. Encontre a função de distribuição acumulada de X .

Solução

1. A função dada corresponde a uma função constante, $f_X(x) = k$. Como a área sob a reta tem que ser 1, temos que ter

$$1 = (5 - 1) \times k \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

ou

$$\int_1^5 k dx = 1 \Rightarrow k x|_1^5 = 1 \Rightarrow k(5 - 1) = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

2. Temos que

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{se } 1 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

3. A probabilidade pedida é a área sombreada na **Figura 1.8**. Logo,

$$\Pr(2 \leq X \leq 3) = (3 - 2) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

ou

$$\Pr(2 \leq X \leq 3) = \int_2^3 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4}$$

4. Por argumentos de simetria, a esperança é o ponto médio, ou seja, $E(X) = 3$. Usando a definição, temos:

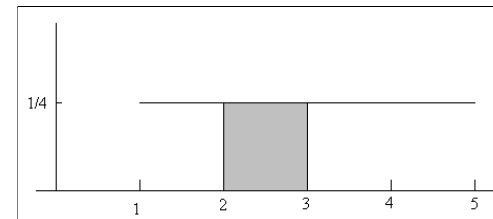
$$E(X) = \int_1^5 \frac{1}{4} x dx = \frac{1}{4} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_1^5 \right) = \frac{1}{8} (25 - 1) = 3$$

Para o cálculo da variância, temos que calcular $E(X^2)$:

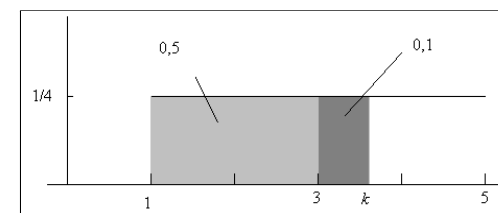
$$E(X^2) = \int_1^5 \frac{1}{4} x^2 dx = \frac{1}{4} \frac{x^3}{3} \Big|_1^5 = \frac{1}{12} (125 - 1) = \frac{124}{12} = \frac{31}{3}$$

e

$$\text{Var}(X) = \frac{31}{3} - 3^2 = \frac{31 - 27}{3} = \frac{4}{3}$$

Figura 1.8: Cálculo de $\Pr(2 \leq X \leq 3)$ para o Exemplo 1

5. Como a densidade é simétrica, a média e a mediana coincidem, ou seja, o ponto $x = 3$ divide a área ao meio. Como temos que $\Pr(X \leq k) = 0,6$, resulta que k tem que ser maior que 3, uma vez que abaixo de 3 temos área igual a 0,5. Veja a **Figura 1.9**.

Figura 1.9: Cálculo de k tal que $\Pr(X \leq k) = 0,6$ para o Exemplo 1

Temos que ter

$$0,6 = (k - 1) \times \frac{1}{4} \Rightarrow k = 3,4$$

Usando integral, temos ter

$$\int_1^k \frac{1}{4} dx = 0,6 \Rightarrow \frac{1}{4} (k - 1) = 0,6 \Rightarrow k = 3,4$$

6. Para $x < 1$, temos que $F_X(x) = 0$ e para $x > 5$, temos que $F_X(x) = 1$. Para $1 \leq x \leq 5$, $F_X(x)$ é a área de um retângulo de base $(x - 1)$ e altura $1/4$ (veja a **Figura 1.10**). Logo,

$$F_X(x) = \frac{x - 1}{4}$$

e a expressão completa de F_X é

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ \frac{x-1}{4} & \text{se } 1 \leq x \leq 5 \\ 1 & \text{se } x > 5 \end{cases}$$

cujo gráfico está ilustrado na **Figura 1.11**.

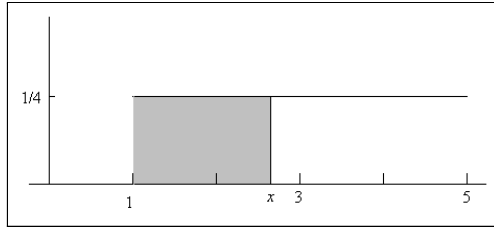
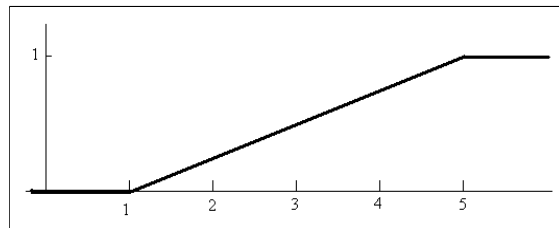
Figura 1.10: Cálculo de F_X para o Exemplo 1

Figura 1.11: Função de distribuição acumulada para o Exemplo 1

1.9 Exemplo 2

Considere a função f_X apresentada na **Figura 1.12**.

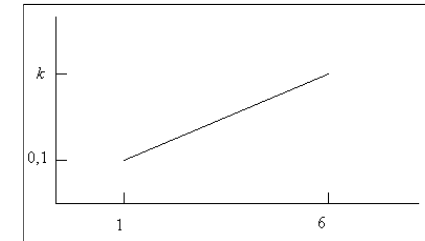


Figura 1.12: Função de densidade de probabilidade para o Exemplo 2

1. Encontre o valor de k para que f_X seja uma função de densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua X .
2. Determine a equação que define f_X .
3. Calcule $\Pr(2 \leq X \leq 3)$.
4. Encontre a função de distribuição acumulada de X .
5. Determine o valor de k tal que $\Pr(X \leq k) = 0,6$.
6. Calcule a esperança e a variância de X .

Solução

1. Podemos decompor a área sob a reta como a área de um triângulo e a área de um retângulo (na verdade, o resultado é a área de um trapézio - veja a **Figura 1.13**). Então, temos que ter

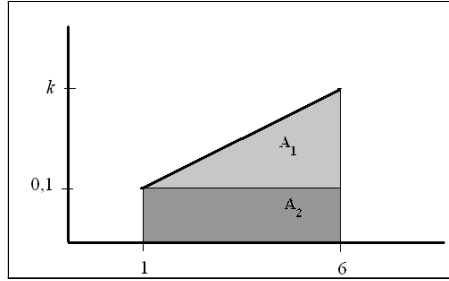
$$\begin{aligned} 1 &= (6-1) \times 0,1 + \frac{1}{2}(6-1) \times (k-0,1) \Rightarrow \\ 0,5 &= \frac{5}{2}(k-0,1) \Rightarrow k = 0,3 \end{aligned}$$

2. f_X é uma função linear $f_X(x) = a + bx$ que passa pelos pontos $(1; 0,1)$ e $(6; 0,3)$, resultando, portanto, o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 0,1 = a + b \\ 0,3 = a + 6b \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, obtemos

$$0,3 - 0,1 = 5b \Rightarrow b = 0,04$$

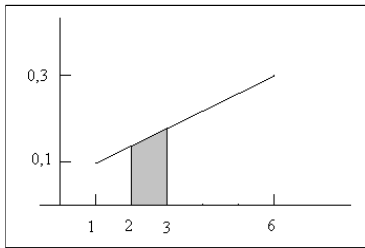
Figura 1.13: Cálculo de k para o Exemplo 2

Substituindo este valor na primeira equação, obtemos que $a = 0,1 - 0,04 = 0,06$. Logo,

$$f_X(x) = \begin{cases} 0,06 + 0,04x & \text{se } 1 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

3. Veja a **Figura 1.14**, em que a área sobreada corresponde à probabilidade pedida. Vemos que essa área é a área de um trapézio de altura $3 - 2 = 1$, base maior igual a $f_X(3) = 0,06 + 0,04 \times 3 = 0,18$ e base menor igual a $f(2) = 0,06 + 0,04 \times 2 = 0,14$. Logo,

$$\Pr(2 \leq X \leq 3) = \frac{0,18 + 0,14}{2} \times 1 = 0,16$$

Figura 1.14: Cálculo de $\Pr(2 \leq X \leq 3)$ para o Exemplo 2

Usando integral, temos:

$$\begin{aligned} \Pr(2 \leq X \leq 3) &= \int_2^3 (0,06 + 0,04x) dx = \left(0,06x + \frac{0,04x^2}{2} \right) \Big|_2^3 = \\ &= 0,06 \times (3 - 2) + 0,02 \times (9 - 4) = 0,06 + 0,1 = 0,16 \end{aligned}$$

4. Veja a **Figura 1.15**; aí podemos ver que, para $x \in [1, 6]$, $F_X(x)$ é a área de um trapézio de altura $x - 1$; base maior igual a $f_X(x)$ e base menor igual a $f_X(1) = 0,1$.

Logo,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \frac{(0,06 + 0,04x) + 0,1}{2} \times (x - 1) \\ &= (0,08 + 0,02x)(x - 1) \end{aligned}$$

ou seja,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 0,02x^2 + 0,06x - 0,08 & \text{se } 1 \leq x \leq 6 \\ 1 & \text{se } x > 6 \end{cases}$$

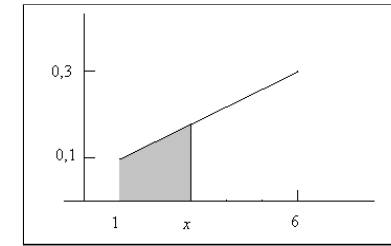


Figura 1.15: Cálculo da função de distribuição acumulada para o Exemplo 2

Usando integral, temos que

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x (0,06 + 0,04t) dt = \left(0,06t + \frac{0,04t^2}{2} \right) \Big|_1^x \\ &= (0,06x + 0,02x^2) - (0,06 + 0,02) \\ &= 0,02x^2 + 0,06x - 0,08 \quad 1 \leq x \leq 6 \end{aligned}$$

5. Queremos determinar k tal que $F_X(k) = 0,6$. Logo,

$$\begin{aligned} 0,6 &= 0,02k^2 + 0,06k - 0,08 \Rightarrow \\ 0,02k^2 + 0,06k - 0,68 &= 0 \Rightarrow \\ k^2 + 3k - 34 &= 0 \Rightarrow \\ k &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \times 34}}{2} \end{aligned}$$

A raiz que fornece resultado dentro do domínio de variação de X é

$$k = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4 \times 34}}{2} \approx 4,5208$$

6. Temos que

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_1^6 x (0,06 + 0,04x) dx = \left(0,06 \frac{x^2}{2} + 0,04 \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^6 \\ &= \left(0,03 \cdot 36 + 0,04 \cdot \frac{6^3}{3} \right) - \left(0,03 \cdot 1 + \frac{0,04}{3} \right) \\ &= 1,08 + 2,88 - 0,03 - \frac{0,04}{3} = \frac{11,75}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_1^6 x^2 (0,06 + 0,04x) dx = \left(0,06 \frac{x^3}{3} + 0,04 \frac{x^4}{4} \right) \Big|_1^6 \\
&= (0,02 \cdot 216 + 0,01 \cdot 1296) - (0,02 + 0,01) \\
&= 4,32 + 12,96 - 0,03 = 17,25 \\
Var(X) &= 17,25 - \left(\frac{11,75}{3} \right)^2 = \frac{155,25 - 138,0625}{9} = \frac{17,1875}{9}
\end{aligned}$$

1.10 Exemplo 3

Considere a função f_X apresentada na **Figura 1.16**.

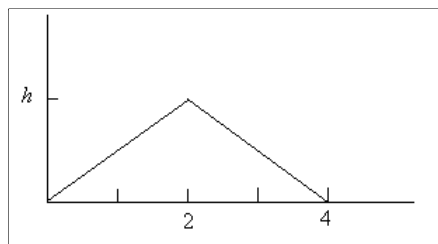


Figura 1.16: Função de densidade de probabilidade para o Exemplo 3

1. Encontre o valor de h para que f_X seja uma função de densidade de probabilidade de uma variável aleatória X (note que o triângulo é isósceles!).
2. Determine a equação que define f_X .
3. Calcule $\Pr(1 \leq X \leq 3)$.
4. Calcule $E(X)$ e $Var(X)$.
5. Encontre a função de distribuição acumulada de X .
6. Determine o valor de k tal que $\Pr(X \leq k) = 0,6$.

Solução

1. Como a área tem que ser 1, temos que ter

$$1 = \frac{1}{2} \times (4 - 0) \times h \Rightarrow h = \frac{1}{2}$$

2. A função f_X é dada por 2 equações de reta. A primeira é uma reta de inclinação positiva que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(2, \frac{1}{2})$. A segunda é uma reta de inclinação negativa, que passa pelos pontos $(2, \frac{1}{2})$ e $(4, 0)$. Para achar a equação de cada uma

das retas, basta substituir as coordenadas dos dois pontos e resolver o sistema. Para a primeira reta temos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
0 &= a + b \times 0 \\
\frac{1}{2} &= a + b \times 2
\end{aligned}$$

Da primeira equação resulta que $a = 0$ (é o ponto onde a reta cruza o eixo y) e substituindo esse valor de a na segunda equação, resulta que $b = \frac{1}{4}$.

Para a segunda reta, temos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
0 &= a + b \times 4 \\
\frac{1}{2} &= a + b \times 2
\end{aligned}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, resulta

$$0 - \frac{1}{2} = (a - a) + (4b - 2b) \Rightarrow b = -\frac{1}{4}$$

Substituindo na primeira equação, encontramos que $a = 1$.

Combinando essas duas equações, obtemos a seguinte expressão para f_X :

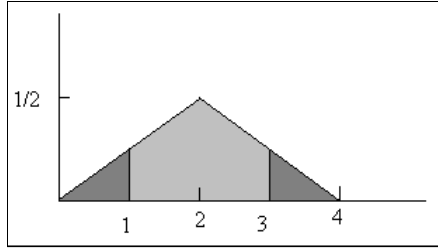
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 1 - \frac{x}{4} & \text{se } 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 4 \end{cases}$$

3. A probabilidade pedida é a área sombreada em cinza claro na **Figura 1.17**. Os dois triângulos sombreados de cinza escuro têm a mesma área, por causa da simetria. Assim, podemos calcular a probabilidade usando a regra do complementar, uma vez que a área total é 1. A altura dos dois triângulos é $\frac{1}{4}$; basta substituir o valor de $x = 1$ na primeira equação e o valor de $x = 3$ na segunda equação. Logo, a área de cada um dos triângulos é $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ e, portanto,

$$\Pr(1 \leq X \leq 3) = 1 - 2 \times \frac{1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Usando integral, temos

$$\begin{aligned}
\Pr(1 \leq X \leq 3) &= \int_1^2 \frac{x}{4} dx + \int_2^3 \left(1 - \frac{x}{4} \right) dx \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 + \left(x - \frac{x^2}{8} \right) \Big|_2^3 \\
&= \frac{1}{8} (4 - 1) + \left[\left(3 - \frac{9}{8} \right) - \left(2 - \frac{4}{8} \right) \right] \\
&= \frac{3}{8} + \frac{15}{8} - \frac{12}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Figura 1.17: Ilustração do cálculo de $\Pr(1 \leq X \leq 3)$

4. Como a função é simétrica, resulta que $E(X) = 2$.

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \int_0^2 \frac{x^3}{4} dx + \int_2^4 x^2 \left(1 - \frac{x}{4}\right) dx \\
 &= \left(\frac{x^4}{16}\right)\Big|_0^2 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{16}\right)\Big|_2^4 \\
 &= \left(\frac{16}{16} - 0\right) + \left[\left(\frac{64}{3} - \frac{256}{16}\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{16}{16}\right)\right] \\
 &= 1 + \frac{64}{3} - 16 - \frac{8}{3} + 1 \\
 &= \frac{56}{3} - 14 = \frac{14}{3} \\
 \text{Var}(X) &= \frac{14}{3} - 4 = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

5. Assim como a função de densidade de probabilidade, a função de distribuição acumulada será definida por 2 equações: uma para os valores de x no intervalo $[0, 2)$ e outra para valores de x no intervalo $[2, 4]$. Para $x \in [0, 2)$ temos que $F_X(x)$ é a área do triângulo sombreado na **Figura 1.18(a)** e para $x \in [2, 4]$, é a área sombreada na parte (b). e essa área pode ser calculada pela lei do complementar.

Logo,

$$F_X(x) = \frac{1}{2}(x - 0) \times \frac{x}{4} \quad x \in [0, 2)$$

Para $x \in [2, 4]$, temos que

$$F_X(x) = 1 - \frac{1}{2}(4 - x) \left(1 - \frac{x}{4}\right)$$

Combinando os resultados obtidos, resulta a seguinte expressão para F_X :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{8}x^2 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 1 - \frac{1}{8}(4 - x)^2 & \text{se } 2 \leq x \leq 4 \\ 1 & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

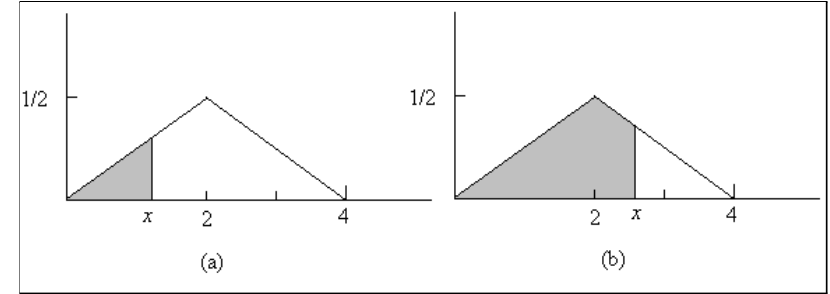


Figura 1.18: Cálculo da função de distribuição acumulada do Exemplo 3

Veja a **Figura 1.19**; para $0 \leq x < 2$, o gráfico de F_X é uma parábola côncava para cima; para $2 \leq x \leq 4$, o gráfico de F_X é uma parábola côncava para baixo.

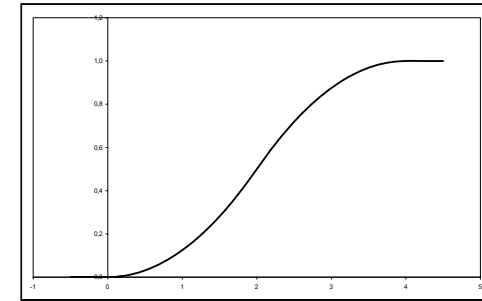


Figura 1.19: Função de distribuição acumulada do Exemplo 3

6. Queremos determinar k tal que $F(k) = 0,6$. Como $F(2) = 0,5$, resulta que $k > 2$. Substituindo na expressão de $F(x)$, temos que ter

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{1}{8}(4 - k)^2 &= 0,6 \implies \\
 1 - \frac{1}{8}(16 - 8k + k^2) &= 0,6 \implies \\
 1 - 2 + k - \frac{k^2}{8} &= 0,6 \implies \\
 \frac{k^2}{8} - k + 1,6 &= 0 \implies \\
 k^2 - 8k + 12,8 &= 0 \implies \\
 k &= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 12,8}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{12,8}}{2}
 \end{aligned}$$

A raiz que fornece resultado dentro do domínio de definição de X é

$$k = \frac{8 - \sqrt{12}, 8}{2} \approx 2, 21$$

1.11 Exercícios resolvidos

1. Considere a seguinte função:

$$g(x) = \begin{cases} K(2-x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$$

- (a) Esboce o gráfico de $g(x)$.

Solução

Veja a **Figura 1.20**. Note que $g(0) = 2K$ e $g(1) = K$.

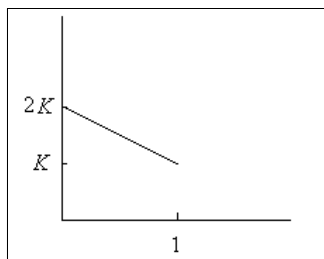


Figura 1.20: Solução do Exercício 1

- (b) Encontre o valor de K para que $g(x)$ seja uma função de densidade de probabilidade.

Solução

Temos que ter $K > 0$ para garantir a condição $g(x) \geq 0$. E também

$$\int_0^1 K(2-x)dx = 1 \Rightarrow \left(2Kx - K\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 1 \Rightarrow$$

$$2K - \frac{K}{2} = 1 \Rightarrow \frac{3K}{2} = 1 \Rightarrow K = \frac{2}{3}$$

- (c) Encontre a função de distribuição acumulada.

Solução

Por definição, $F(x) = \Pr(X \leq x)$. Portanto, para $0 \leq x \leq 1$ temos que

$$F(x) = \int_0^x \frac{2}{3}(2-t)dt = \frac{2}{3} \left(2t - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^x = \frac{4x}{3} - \frac{x^2}{3}$$

e a expressão completa de $F(x)$ é

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

- (d) Calcule os quartis da distribuição.

Solução

Se Q_1, Q_2 e Q_3 são os três quartis, então $F(Q_1) = 0,25$; $F(Q_2) = 0,5$; $F(Q_3) = 0,75$.

$$F_X(Q_1) = 0,25 \Rightarrow \frac{4}{3}Q_1 - \frac{1}{3}Q_1^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow 16Q_1 - 4Q_1^2 = 3 \Rightarrow$$

$$4Q_1^2 - 16Q_1 + 3 = 0 \Rightarrow Q_1^2 - 4Q_1 + 0,75 = 0 \Rightarrow$$

$$Q_1 = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 0,75}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{13}}{2}$$

A raiz que fornece solução no intervalo $(0, 1)$, que é o domínio de X , é

$$Q_1 = \frac{4 - \sqrt{13}}{2} \approx 0,19722$$

$$F_X(Q_2) = 0,5 \Rightarrow \frac{4}{3}Q_2 - \frac{1}{3}Q_2^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow 8Q_2 - 2Q_2^2 = 3 \Rightarrow$$

$$2Q_2^2 - 8Q_2 + 3 = 0 \Rightarrow Q_2^2 - 4Q_2 + 1,5 = 0 \Rightarrow$$

$$Q_2 = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1,5}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{2}$$

A raiz que fornece solução no domínio de X é

$$Q_2 = \frac{4 - \sqrt{10}}{2} \approx 0,41886$$

$$F_X(Q_3) = 0,75 \Rightarrow \frac{4}{3}Q_3 - \frac{1}{3}Q_3^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow 16Q_3 - 4Q_3^2 = 9 \Rightarrow$$

$$4Q_3^2 - 16Q_3 + 9 = 0 \Rightarrow Q_3^2 - 4Q_3 + \frac{9}{4} = 0 \Rightarrow$$

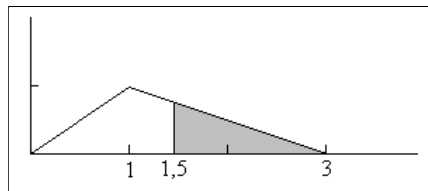
$$Q_3 = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 2,25}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{2}$$

A raiz que fornece solução no domínio de X é

$$Q_3 = \frac{4 - \sqrt{7}}{2} \approx 0,67712$$

2. (Bussab & Morettin) A demanda diária de arroz num supermercado, em centenas de quilos, é uma variável aleatória com função de densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ -\frac{x}{3} + 1 & \text{se } 1 \leq x < 3 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 3 \end{cases}$$

Figura 1.21: Solução do Exercício 2 - $\Pr(X \geq 1,5)$

- (a) Qual é a probabilidade de se vender mais de 150 kg num dia escolhido ao acaso?

Solução

Seja X a variável aleatória que representa a demanda diária de arroz, em centenas de quilos. Veja a **Figura 1.21**, onde a área sombreada corresponde à probabilidade pedida. Nesse triângulo, a base é $3 - 1,5 = 1,5$ e a altura é $f(1,5) = \frac{-1,5}{3} + 1$. Logo,

$$\Pr(X \geq 1,5) = \frac{1}{2} \times 1,5 \times 0,5 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8} = 0,375$$

ou

$$\begin{aligned} \Pr(X \geq 1,5) &= \int_{1,5}^3 \left(-\frac{x}{3} + 1\right) dx = \left(-\frac{x^2}{6} + x\right) \Big|_{1,5}^3 = \left(-\frac{3^2}{6} + 3\right) - \left(-\frac{1,5^2}{6} + 1,5\right) \\ &= \frac{9}{6} - \frac{6,75}{6} = \frac{2,25}{6} = 0,375 \end{aligned}$$

- (b) Qual a quantidade de arroz que deve ser deixada à disposição dos clientes diariamente para que não falte arroz em 95% dos dias?

Solução

Seja k o valor a estocar. Para que a demanda seja atendida, é necessário que a quantidade demandada seja menor que a quantidade em estoque. Logo, queremos encontrar o valor de k tal que $\Pr(X \leq k) = 0,95$.

Como $\Pr(X \leq 1) = \frac{1}{3}$, k tem que ser maior que 1, ou seja, k está no triângulo superior (veja a **Figura 1.22**).

Mas $\Pr(X \leq k) = 0,95$ é equivalente a $\Pr(X > k) = 0,05$. Logo,

$$\begin{aligned} 0,05 &= \frac{1}{2}(3-k) \left(-\frac{k}{3} + 1\right) \Rightarrow \\ 0,1 &= (3-k) \left(\frac{-k+3}{3}\right) \Rightarrow \\ 0,3 &= 9 - 6k + k^2 \Rightarrow \\ &k^2 - 6k + 8,7 = 0 \Rightarrow \\ k &= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 8,7}}{2} \end{aligned}$$

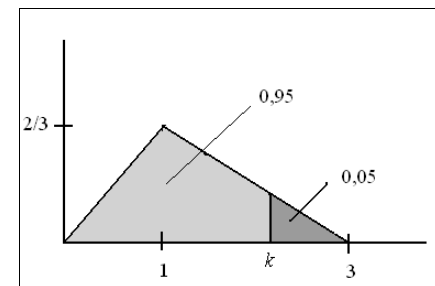


Figura 1.22: Solução do Exercício 2-b

A raiz que dá a solução dentro do domínio de X é

$$k = \frac{6 - \sqrt{36 - 4 \times 8,7}}{2} = 2,45 \text{ centenas de quilos}$$

Usando integração:

$$\begin{aligned} \Pr(X > k) &= 0,05 \Rightarrow \int_k^3 \left(-\frac{x}{3} + 1\right) dx = 0,05 \Rightarrow \left(-\frac{x^2}{6} + x\right) \Big|_k^3 = 0,05 \\ \left(-\frac{3^2}{6} + 3\right) - \left(-\frac{k^2}{6} + k\right) &= 0,05 \Rightarrow \frac{k^2}{6} - k + \frac{9}{6} - 0,05 = 0 \Rightarrow k^2 - 6k + 8,7 = 0 \\ &\text{mesma equação obtida anteriormente.} \end{aligned}$$

3. Seja X uma variável aleatória com função de densidade de probabilidade dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Calcule $\Pr\left(X \leq \frac{1}{2} \mid \frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right)$

Solução

Sabemos que $\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$. Assim,

$$\begin{aligned} \Pr\left(X \leq \frac{1}{2} \mid \frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right) &= \frac{\Pr\left[\left(X \leq \frac{1}{2}\right) \cap \left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right)\right]}{\Pr\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right)} \\ &= \frac{\Pr\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{1}{2}\right)}{\Pr\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right)} \\ &= \frac{\int_{1/3}^{1/2} 2x dx}{\int_{1/3}^{2/3} 2x dx} = \frac{x^2 \Big|_{1/3}^{1/2}}{x^2 \Big|_{1/3}^{2/3}} \\ &= \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{9}}{\frac{4}{9} - \frac{1}{9}} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{3}{9}} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

1.12 Exercícios propostos

1. A função de densidade f de uma variável aleatória X é dada pela função cujo gráfico se encontra na **Figura 1.23**.

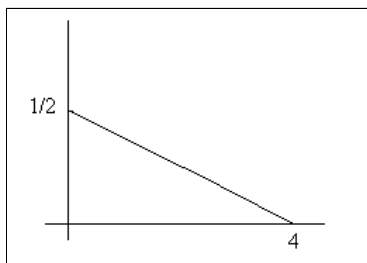


Figura 1.23: Função de densidade para o Exercício Proposto 1

- (a) Encontre a expressão de f .
 (b) Calcule $\Pr(X > 2)$. (Resp.: $1/4$)
 (c) Determine m tal que $\Pr(X > m) = 1/8$. (Resp.: $m = 4 - \sqrt{2}$)
 (d) Calcule a esperança e a variância de X . (Resp.: $E(X) = 4/3$; $E(X^2) = 8/3$)
 (e) Calcule a função de distribuição acumulada e esboce seu gráfico.
2. O diâmetro de um cabo elétrico é uma variável aleatória contínua com função de densidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} k(2x - x^2) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- (a) Determine o valor de k . (Resp.: $k = 3/2$)
 (b) Calcule $E(X)$ e $\text{Var}(x)$. (Resp.: $5/8$; $19/320$)
 (c) Calcule $\Pr(0 \leq X \leq 1/2)$. (Resp.: $5/16$)
3. Uma variável aleatória X tem função de densidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Se $\mu = E(X)$ e $\sigma^2 = \text{Var}(X)$, calcule $\Pr(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$. (Resp.: $0,9793$)

4. Uma variável aleatória X tem função de distribuição acumulada F dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x^5 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Calcule $E(X)$ e $\text{Var}(x)$. (Resp.: $5/6$; $5/252$)

Capítulo 2

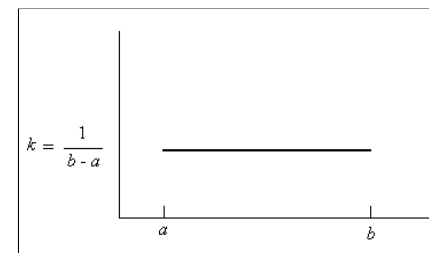
Algumas Distribuições Contínuas

2.1 Distribuição uniforme

Uma variável aleatória contínua X tem distribuição uniforme no intervalo $[a, b]$ (finito) se sua função de densidade é constante nesse intervalo, ou seja, temos que ter

$$f(x) = k \quad \forall x \in [a, b]$$

Então, o gráfico da função de densidade de probabilidade de X é como o ilustrado na **Figura 2.1**:

Figura 2.1: Densidade uniforme no intervalo $[a, b]$

Para que tal função seja uma função de densidade de probabilidade, temos que ter $k > 0$ e a área do retângulo tem que ser 1, ou seja,

$$(b-a) \times k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{b-a}$$

Logo, a função de densidade de uma variável aleatória uniforme no intervalo $[a, b]$ é dada por

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{se } x \in [a, b] \quad (2.1)$$

Os valores a e b são chamados parâmetros da distribuição uniforme; note que ambos têm que ser finitos para que a integral seja igual a 1. Quando $a = 0$ e $b = 1$ temos a uniforme padrão, denotada por $\mathcal{U}(0, 1)$.

2.1.1 Função de distribuição acumulada

Por definição, temos que

$$F(x) = \Pr(X \leq x)$$

e essa probabilidade é dada pela área sob a curva de densidade à esquerda de x , conforme ilustrado na **Figura 2.2**.

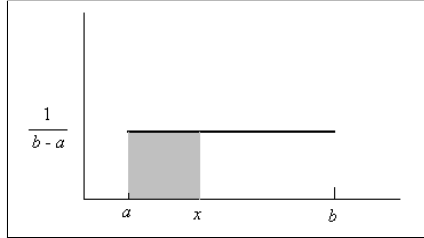


Figura 2.2: Função de distribuição acumulada da densidade $Unif[a, b]$

Essa é a área de um retângulo com base $(x - a)$ e altura $\frac{1}{b - a}$. Logo,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \frac{x - a}{b - a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{se } x > b \end{cases} \quad (2.2)$$

O gráfico dessa função de distribuição acumulada é dado na **Figura 2.3**.

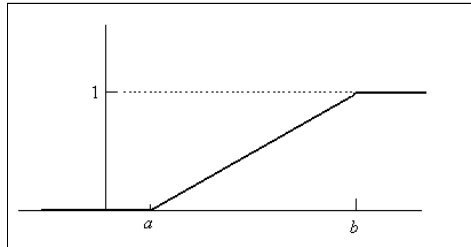


Figura 2.3: Função de distribuição acumulada da $Unif[a, b]$

No caso da $\mathcal{U}[0, 1]$, temos que

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

2.1.2 Esperança

Das propriedades da esperança e das características da densidade uniforme, sabemos que $E(X)$ é o ponto médio do intervalo $[a, b]$, ou seja,

$$E(X) = a + \frac{b - a}{2} = \frac{a + b}{2}$$

Usando a integral:

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b - a} dx = \frac{1}{b - a} \left. \frac{x^2}{2} \right|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b - a)} = \frac{(b - a)(a + b)}{2(b - a)}$$

ou seja,

$$E(X) = \frac{a + b}{2} \quad (2.3)$$

2.1.3 Variância

Por definição, $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$; vamos, então, calcular $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b - a} dx = \frac{1}{b - a} \left. \frac{x^3}{3} \right|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b - a)} = \frac{(b - a)(b^2 + ab + a^2)}{3(b - a)} \quad (2.4)$$

Logo,

$$\begin{aligned} Var(X) &= \frac{(b^2 + ab + a^2)}{3} - \left(\frac{a + b}{2} \right)^2 = \frac{(b^2 + ab + a^2)}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \\ &= \frac{4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} \end{aligned}$$

ou

$$Var(X) = \frac{(b - a)^2}{12} \quad (2.5)$$

2.1.4 Exercícios propostos

1. Você está interessado em dar um lance em um leilão de um lote de terra. Você sabe que existe um outro licitante. Pelas regras estabelecidas para este leilão, o lance mais alto acima de R\$ 100.000,00 será aceito. Suponha que o lance do seu competidor seja uma variável aleatória uniformemente distribuída entre R\$ 100.000,00 e R\$ 150.000,00.
 - (a) Se você der um lance de R\$120.000,00, qual é a probabilidade de você ficar com o lote? (Resp.: 0,4)
 - (b) Se você der um lance de R\$140.000,00, qual é a probabilidade de você ficar com o lote? (Resp.: 0,8)
 - (c) Que quantia você deve dar como lance para maximizar a probabilidade de você ganhar o leilão?
2. O rótulo de uma lata de coca-cola indica que o conteúdo é de 350 ml. Suponha que a linha de produção encha as latas de forma que o conteúdo seja uniformemente distribuído no intervalo [345, 355].

- (a) Qual é a probabilidade de que uma lata tenha conteúdo superior a 353 ml? (Resp.: 0,2)
- (b) Qual é a probabilidade de que uma lata tenha conteúdo inferior a 346 ml? (Resp.: 0,1)
- (c) O controle de qualidade aceita uma lata com conteúdo dentro de 4 ml do conteúdo exibido na lata. Qual é a proporção de latas rejeitadas nessa linha de produção? (Resp.: 0,2)
3. Uma distribuição uniforme no intervalo $[a, b]$ tem média 7,5 e variância 6,75. Determine os valores de a e b , sabendo que $b > a > 0$. (Resp.: $a = 3$ e $b = 12$)

2.2 Distribuição exponencial

Consideremos o gráfico da função exponencial $f(x) = e^x$, dado na **Figura 2.4**. Podemos ver aí que, se $x < 0$, então a área sob a curva é limitada, o mesmo valendo para uma função mais geral $f(x) = e^{\lambda x}$. Então, é possível definir uma função de densidade a partir da função exponencial $e^{\lambda x}$, desde que nos limitemos ao domínio dos números reais negativos. Mas isso é equivalente a trabalhar com a função $e^{-\lambda x}$ para x positivo.

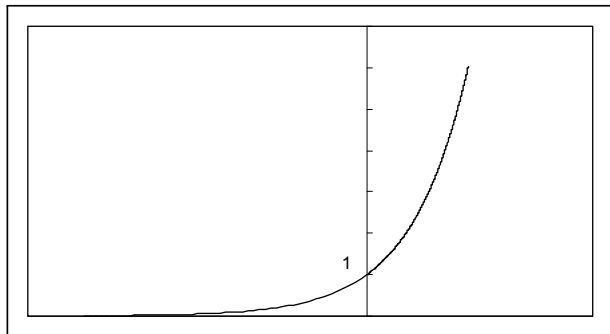


Figura 2.4: Gráfico da função exponencial natural $f(x) = \exp x$

Mas

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right)_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

Logo

$$\lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = 1$$

e, portanto, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ define uma função de densidade de probabilidade para $x > 0$.

Definição 2.1 Diz-se que uma variável aleatória contínua X tem distribuição exponencial com parâmetro λ se sua função de densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Como a f.d.p. exponencial depende apenas do valor de λ , esse é o parâmetro da densidade exponencial.

Usaremos a seguinte notação para indicar que uma variável aleatória tem distribuição exponencial com parâmetro λ : $X \sim \exp(\lambda)$. Na **Figura 2.5** temos o gráfico de uma densidade exponencial para $\lambda = 2$.

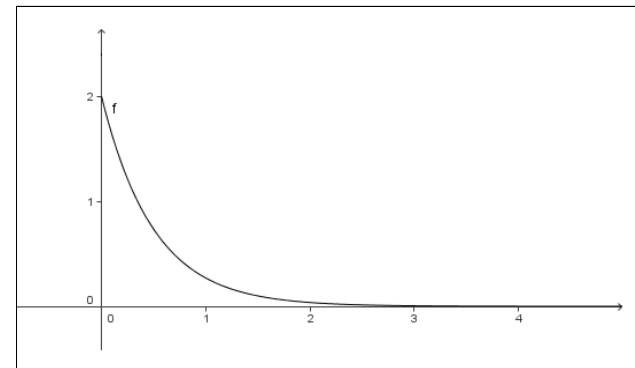


Figura 2.5: Densidade exponencial - $\lambda = 2$

2.2.1 Função de distribuição acumulada

Por definição, temos que

$$F(x) = \Pr(X \leq x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t} \Big|_0^x = -(e^{-\lambda x} - 1)$$

ou seja

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

2.2.2 Alguns resultados sobre a função exponencial

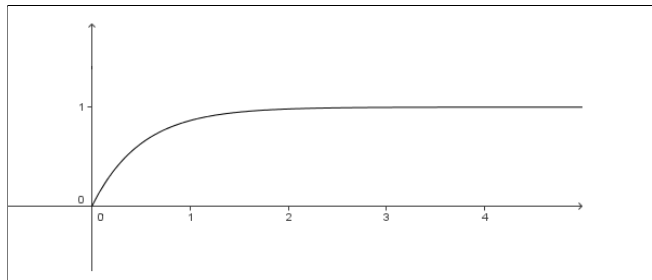
No cálculo dos momentos da densidade exponencial serão necessários alguns resultados sobre a função exponencial que apresentaremos a seguir.

O resultado crucial é

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^k e^{-x} = 0 \quad (2.7)$$

Vamos mostrar esse resultado usando a regra de L'Hôpital e demonstração por indução. Consideremos o caso em que $k = 1$. Então

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$$

Figura 2.6: Função de distribuição acumulada da densidade exponencial - $\lambda = 2$

que tem a forma $\frac{\infty}{\infty}$ e, portanto, podemos aplicar L'Hôpital, que diz que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Logo, o resultado vale para $k = 1$. Suponhamos verdadeiro para qualquer k ; vamos mostrar que vale para $k + 1$. De fato:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{k+1} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{k+1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^{k+1})'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(k+1)x^k}{e^x} = (k+1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x} = (k+1) \times 0 = 0$$

pela hipótese de indução. De maneira análoga, prova-se um resultado mais geral dado por:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^k e^{-\lambda x} = 0 \quad \forall k > 0 \text{ e } \lambda > 0 \quad (2.8)$$

2.2.3 Esperança

O cálculo dos momentos da distribuição exponencial se faz com auxílio de integração por partes. A esperança é:

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Definindo

- $u = x \Rightarrow du = dx$;
- $dv = \lambda e^{-\lambda x} dx \Rightarrow v = -e^{-\lambda x}$

O método de integração por partes nos dá que:

$$-x e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx + \int_0^{\infty} (-e^{-\lambda x}) dx$$

Pelo resultado (2.7), o lado esquerdo desta última igualdade é zero. Logo,

$$0 = E(X) + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} \Rightarrow 0 = E(X) + \left(0 - \frac{1}{\lambda}\right)$$

ou seja,

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad (2.9)$$

Desse resultado segue que

$$\int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2} \quad (2.10)$$

2.2.4 Variância

Vamos calcular o segundo momento de uma variável aleatória exponencial.

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Seguindo raciocínio análogo ao empregado no cálculo da esperança, vamos definir:

- $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$;
- $dv = \lambda e^{-\lambda x} dx \Rightarrow v = -e^{-\lambda x}$

Logo,

$$-x^2 e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx + \int_0^{\infty} (-2x e^{-\lambda x}) dx \Rightarrow 0 = E(X^2) - 2 \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx$$

Usando o resultado (2.10), resulta que

$$E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2} \quad (2.11)$$

e, portanto:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad (2.12)$$

Resumindo:

$$X \sim \exp(\lambda) \Rightarrow \begin{cases} E(X) = \frac{1}{\lambda} \\ \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} \end{cases} \quad (2.13)$$

2.2.5 Parametrização alternativa

É possível parametrizar a densidade exponencial em termos de um parâmetro $\beta = \frac{1}{\lambda}$. Neste caso,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & x > 0; \beta > 0 \\ E(X) &= \beta \\ E(X^2) &= 2\beta^2 \\ \text{Var}(X) &= \beta^2 \end{aligned}$$

Essa parametrização alternativa é mais interessante, uma vez que o valor médio é igual ao parâmetro, e será utilizada deste ponto em diante.

2.2.6 Exercícios resolvidos

1. Seja X uma variável aleatória exponencial com média 4. Calcule

(a) $\Pr(X > 1)$

Solução

A função de densidade é $f(x) = \frac{1}{4}e^{-x/4}$ e a função de distribuição é $F(x) = 1 - e^{-x/4}$

$$\Pr(X > 1) = 1 - \Pr(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - [1 - e^{-1/4}] = e^{-0.25} = 0,7788$$

(b) $\Pr(1 \leq X \leq 2)$

Solução

$$\begin{aligned} \Pr(1 \leq X \leq 2) &= \Pr(X \leq 2) - \Pr(X < 1) \\ &= \Pr(X \leq 2) - \Pr(X \leq 1) \\ &= F(2) - F(1) = [1 - e^{-2/4}] - [1 - e^{-1/4}] \\ &= e^{-0.25} - e^{-0.5} = 0,17227 \end{aligned}$$

2. Seja $X \sim \exp(\beta)$. Calcule $\Pr(X > E(X))$.

Solução

$$\Pr(X > E(X)) = 1 - \Pr(X \leq E(X)) = 1 - F(E(X)) = 1 - [1 - e^{-\beta/\beta}] = e^{-1}$$

Note que essa é a probabilidade de uma variável aleatória exponencial ser maior que o seu valor médio; o que mostramos é que essa probabilidade é constante, qualquer que seja o parâmetro.

2.2.7 Exercícios propostos

1. Seja X uma variável aleatória com distribuição exponencial de média 8. Calcule as seguintes probabilidades:

- (a) $\Pr(X > 10)$ (Resp.: 0,286505)
 (b) $\Pr(X > 8)$ (Resp.: 0,36788)
 (c) $\Pr(5 < X < 11)$ (resp.: 0,28242)

2. O tempo entre chegadas de automóveis num lava-jato é distribuído exponencialmente, com uma média de 12 minutos.

- (a) Qual é a probabilidade de que o tempo entre chegadas de veículos neste lava-jato seja maior que 10 minutos? (Resp.: 0,43460)
 (b) Qual é a probabilidade de que o tempo entre chegadas de veículos neste lava-jato seja menor que 8 minutos? (Resp.: 0,48658)

2.3 Distribuição gama

A distribuição gama é uma generalização da distribuição exponencial, que utiliza a função gama, cuja definição apresentamos a seguir.

2.3.1 A função gama

A função gama é definida pela seguinte integral:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx \quad \alpha \geq 1$$

Note que o argumento da função é α , que aparece no expoente da variável de integração x .

A função gama tem a seguinte propriedade recursiva: $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$. Para demonstrar esse resultado, iremos usar integração por partes.

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} dx$$

Fazendo

- $u = x^{\alpha} \Rightarrow du = \alpha x^{\alpha-1}$
- $dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x}$

Logo,

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha + 1) &= -x^{\alpha} e^{-x} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-x} \alpha x^{\alpha-1} dx \Rightarrow \\ \Gamma(\alpha + 1) &= 0 + \alpha \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx \Rightarrow \\ \Gamma(\alpha + 1) &= \alpha \Gamma(\alpha) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Aqui usamos o resultado dado em (2.7).

Vamos trabalhar, agora, com $\alpha = n$ inteiro.

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{1-1} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1 \times \Gamma(1) = 1 = 1! \\ \Gamma(3) &= 2 \times \Gamma(2) = 2 \times 1 = 2! \\ \Gamma(4) &= 3 \times \Gamma(3) = 3 \times 2 \times 1 = 3! \\ \Gamma(5) &= 4 \times \Gamma(4) = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! \end{aligned}$$

Em geral, se n é inteiro,

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{2.15}$$

2.3.2 A distribuição gama

Definição 2.2 Diz-se que uma variável aleatória tem distribuição gama com parâmetros α e β se sua função de densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Note que, quando $\alpha = 1$, resulta a densidade exponencial com parâmetro β , ou seja, a distribuição exponencial é um caso particular da densidade gama. Note que estamos usando a parametrização alternativa da densidade exponencial.

Para verificar que a função dada em (2.16) realmente define uma função de densidade, notamos inicialmente que $f(x) \geq 0$. Além disso,

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx$$

Fazendo a mudança de variável $\frac{x}{\beta} = t$ resulta

$$\begin{aligned} x &= \beta t \\ dx &= \beta dt \\ x &= 0 \Rightarrow t = 0 \\ x &= \infty \Rightarrow t = \infty \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x)dx &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\infty (\beta t)^{\alpha-1} e^{-t} \beta dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \beta^\alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha) = 1 \end{aligned}$$

Logo, as duas condições para uma função de densidade são satisfeitas. Usaremos a notação $X \sim \text{gama}(\alpha; \beta)$ para indicar que a variável aleatória X tem distribuição gama com parâmetros α, β .

2.3.3 O gráfico da distribuição gama

Para a construção do gráfico da densidade gama, devemos observar inicialmente que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Vamos, agora, calcular as derivadas primeira e segunda de $f(x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \left[(\alpha-1)x^{\alpha-2} e^{-x/\beta} - \frac{1}{\beta} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} \right] \quad (2.17)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \left[\left(x^{\alpha-2} e^{-x/\beta} \right) \left(\alpha - 1 - \frac{1}{\beta} x \right) \right] \quad (2.18)$$

Derivando $f'(x)$ dada em (2.17), temos que

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \left[(\alpha-2)(\alpha-1)x^{\alpha-3} e^{-x/\beta} - \frac{1}{\beta}(\alpha-1)x^{\alpha-2} e^{-x/\beta} - \frac{1}{\beta^2}(\alpha-1)x^{\alpha-2} e^{-x/\beta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\beta^2}x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \left[(\alpha-2)(\alpha-1)x^{\alpha-3} e^{-x/\beta} - \frac{2}{\beta}(\alpha-1)x^{\alpha-2} e^{-x/\beta} + \frac{1}{\beta^2}x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \left\{ \left(x^{\alpha-3} e^{-x/\beta} \right) \left[(\alpha-2)(\alpha-1) - \frac{2}{\beta}(\alpha-1)x + \frac{1}{\beta^2}x^2 \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \left\{ \frac{(x^{\alpha-3} e^{-x/\beta})}{\beta^2} [\beta^2(\alpha-2)(\alpha-1) - 2\beta(\alpha-1)x + x^2] \right\} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Analisando as expressões (2.18) e (2.19), vemos que o sinal da derivada primeira depende do sinal de $\alpha - 1 - \frac{1}{\beta}x$ e o sinal da derivada segunda depende do sinal da expressão entre colchetes, que é uma função do segundo grau. Vamos denotar essa expressão por $h(x)$, de modo que

$$h(x) = x^2 - 2\beta(\alpha-1)x + \beta^2(\alpha-2)(\alpha-1)$$

Vamos analisar a derivada primeira. A primeira observação é que, se $\alpha \leq 1$, $f'(x) < 0$, ou seja, se $\alpha \leq 1$ a densidade gama é uma função estritamente decrescente.

No caso em que $\alpha > 1$, temos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \Leftrightarrow x = \beta(\alpha-1) \\ f'(x) &< 0 \Leftrightarrow x > \beta(\alpha-1) \\ f'(x) &> 0 \Leftrightarrow x < \beta(\alpha-1) \end{aligned}$$

Logo,

$$x = \beta(\alpha-1) \text{ é um ponto de máximo}$$

Resumindo a dependência em α :

$$\begin{aligned} \alpha &\leq 1 \implies \text{função de densidade gama é estritamente decrescente} \\ \alpha &> 1 \implies \text{função de densidade gama tem um máximo em } x = \beta(\alpha-1) \end{aligned}$$

Vamos, agora, estudar a concavidade da função de densidade gama, analisando o sinal da derivada segunda, que será o mesmo sinal de

$$h(x) = x^2 - 2\beta(\alpha-1)x + \beta^2(\alpha-2)(\alpha-1)$$

que é uma função do segundo grau.

Se $\alpha \leq 1$, podemos ver que $h(x) \geq 0$, já que $x > 0$ e $\alpha, \beta > 0$. Logo, se $\alpha \leq 1$ a função de densidade gama é côncava para cima e, como visto, estritamente decrescente.

Vamos considerar, agora, o caso em que $\alpha > 1$. Para estudar o sinal de $h(x)$, temos que estudar o discriminante da equação de segundo grau definida por $h(x)$.

$$\begin{aligned} \Delta &= [2\beta(\alpha-1)]^2 - 4\beta^2(\alpha-2)(\alpha-1) \\ &= 4\beta^2(\alpha-1)^2 - 4\beta^2(\alpha-1)(\alpha-2) \\ &= 4\beta^2(\alpha-1)[(\alpha-1) - (\alpha-2)] \\ &= 4\beta^2(\alpha-1) \end{aligned}$$

Se $\alpha > 1$, o discriminante é sempre positivo, ou seja, temos duas raízes reais distintas, calculadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (\alpha - 2)(\alpha - 1) - \frac{2}{\beta}(\alpha - 1)x + \frac{1}{\beta^2}x^2 &= 0 \iff \\ \beta^2(\alpha - 2)(\alpha - 1) - 2\beta(\alpha - 1)x + x^2 &= 0 \iff \\ x = \frac{2\beta(\alpha - 1) \pm \sqrt{4\beta^2(\alpha - 1)^2 - 4\beta^2(\alpha - 2)(\alpha - 1)}}{2} &\iff \\ x = \frac{2\beta(\alpha - 1) \pm 2\beta\sqrt{(\alpha - 1)(\alpha - 1 - \alpha + 2)}}{2} &\iff \\ x = \beta(\alpha - 1) \pm \beta\sqrt{\alpha - 1} &\iff \\ x = \beta\sqrt{\alpha - 1}(\sqrt{\alpha - 1} \pm 1) \end{aligned}$$

A raiz $r_2 = \beta\sqrt{\alpha - 1}(\sqrt{\alpha - 1} + 1)$ é sempre positiva para $\alpha > 1$. Já a raiz $r_1 = \beta\sqrt{\alpha - 1}(\sqrt{\alpha - 1} - 1)$ só será positiva se $\sqrt{\alpha - 1} - 1 > 0$, ou seja, se $\alpha > 2$.

Considerando a função de segundo grau $h(x)$ que define o sinal da derivada segunda, vemos que o coeficiente do termo quadrático é 1; assim, a função é negativa (sinal oposto ao de a) para valores de x entre as raízes, e positiva (mesmo sinal de a) fora das raízes. Veja a **Figura 2.7**; aí podemos ver que, se $\alpha > 2$, a derivada segunda muda de sinal em dois pontos dentro do domínio de definição da densidade gama. Isso não ocorre se $\alpha < 2$ (ou $\alpha = 2$), uma vez que, neste caso a menor raiz é negativa (nula).

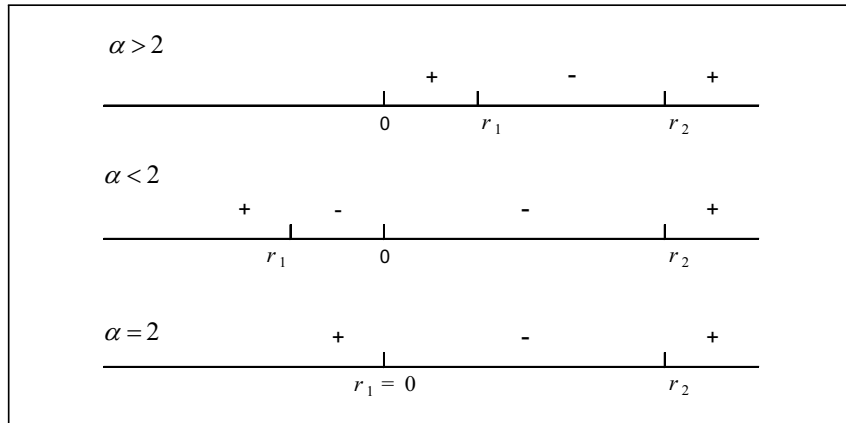


Figura 2.7: Ilustração do sinal da derivada segunda da função de densidade gama

Mais precisamente, se $\alpha > 2$ temos a seguinte situação:

$$\begin{aligned} f''(x) &< 0 \text{ se } \beta\sqrt{\alpha - 1}(\sqrt{\alpha - 1} - 1) < x < \beta\sqrt{\alpha - 1}(\sqrt{\alpha - 1} + 1) \\ f''(x) &> 0 \text{ se } x > \beta\sqrt{\alpha - 1}(\sqrt{\alpha - 1} + 1) \text{ ou } x < \beta\sqrt{\alpha - 1}(\sqrt{\alpha - 1} - 1) \end{aligned}$$

ou seja, a função de densidade é côncava para cima se $x > \beta\sqrt{\alpha - 1}(\sqrt{\alpha - 1} + 1)$ ou $x < \beta\sqrt{\alpha - 1}(\sqrt{\alpha - 1} - 1)$ e é côncava para baixo se $\beta\sqrt{\alpha - 1}(\sqrt{\alpha - 1} - 1) < x < \beta\sqrt{\alpha - 1}(\sqrt{\alpha - 1} + 1)$, o que indica a ocorrência de dois pontos de inflexão.

Quando $\alpha \leq 2$

$$\begin{aligned} f''(x) &< 0 \text{ se } 0 < x < \beta(\alpha - 1) + \beta\sqrt{\alpha - 1} \\ f''(x) &> 0 \text{ se } x > \beta(\alpha - 1) + \beta\sqrt{\alpha - 1} \end{aligned}$$

ou seja, a função de densidade gama é côncava para cima se $x > \beta(\alpha - 1) + \beta\sqrt{\alpha - 1}$ e é côncava para baixo se $0 < x < \beta(\alpha - 1) + \beta\sqrt{\alpha - 1}$, o que indica a ocorrência de apenas um ponto de inflexão.

Na **Figura 2.8** ilustra-se o efeito do parâmetro α sobre a densidade gama. Aí o parâmetro β está fixo ($\beta = 2$) e temos o gráfico para diferentes valores de α . Note que, para $\alpha = 1$, o gráfico é o da distribuição exponencial com parâmetro $\beta = 2$ e para qualquer valor de $\alpha < 1$, o gráfico terá essa forma. Note que para $\alpha = 2$ só há um ponto de inflexão; essa situação se repetirá para valores de α no intervalo $(1, 2]$. Para valores de α maiores que 2, há dois pontos de inflexão. Na **Figura ??** ilustra-se o efeito do parâmetro β sobre a densidade gama. Aí o parâmetro α está fixo ($\alpha = 2$ ou $\alpha = 3$) e temos o gráfico para diferentes valores de β . Analisando essas duas figuras, vemos que o parâmetro α tem grande influência sobre a forma da distribuição, enquanto o parâmetro β tem grande influência sobre a escala (ou dispersão) da distribuição. Dessa forma, o parâmetro α é chamado *parâmetro de forma*, enquanto o parâmetro β é chamada *parâmetro de escala*.

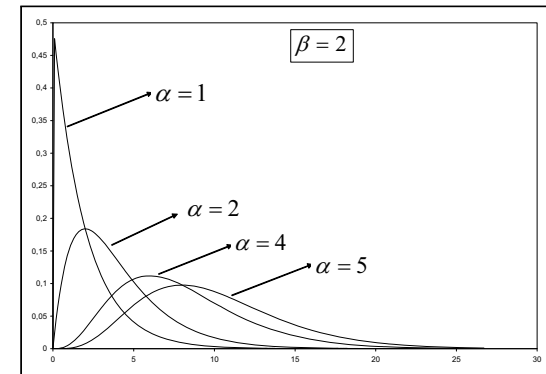
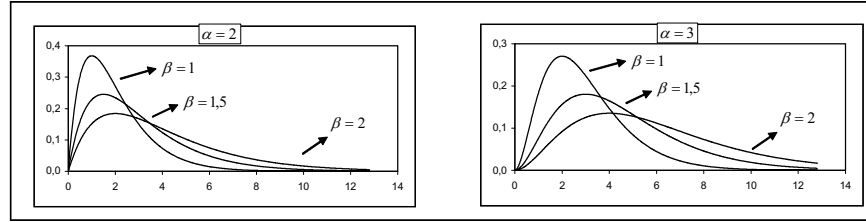


Figura 2.8: Efeito do parâmetro de forma α sobre a densidade gama

A seguir apresentamos um resumo dos resultados sobre a forma da densidade gama:

1. $\alpha \leq 1$

- (a) estritamente decrescente
- (b) côncava para cima

Figura 2.9: Efeito do parâmetro de escala β sobre a densidade gama2. $\alpha > 1$

- (a) crescente se $x < \beta(\alpha - 1)$
- (b) decrescente se $x > \beta(\alpha - 1)$
- (c) máximo em $x = \beta(\alpha - 1)$
- (d) $\alpha \leq 2$
 - i. côncava para baixo se $x < \beta\sqrt{\alpha-1}(\sqrt{\alpha-1}+1)$
 - ii. côncava para cima se $x > \beta\sqrt{\alpha-1}(\sqrt{\alpha-1}+1)$
 - iii. único ponto de inflexão em $x = \beta\sqrt{\alpha-1}(\sqrt{\alpha-1}+1)$
- (e) $\alpha > 2$
 - i. côncava para cima se $x < \beta\sqrt{\alpha-1}(\sqrt{\alpha-1}-1)$
 - ii. côncava para baixo se $\beta\sqrt{\alpha-1}(\sqrt{\alpha-1}-1) < x < \beta\sqrt{\alpha-1}(\sqrt{\alpha-1}+1)$
 - iii. côncava para cima se $x > \beta\sqrt{\alpha-1}(\sqrt{\alpha-1}+1)$
 - iv. dois pontos de inflexão: $x = \beta\sqrt{\alpha-1}(\sqrt{\alpha-1}-1)$ e $x = \beta\sqrt{\alpha-1}(\sqrt{\alpha-1}+1)$

2.3.4 Esperança

Se $X \sim \text{gama}(\alpha; \beta)$, então

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty xf(x)dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\infty xx^{\alpha-1}e^{-x/\beta}dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\infty x^\alpha e^{-x/\beta}dx \end{aligned}$$

Fazendo a mesma mudança de variável já usada anteriormente $\frac{x}{\beta} = t$ temos que

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\infty (\beta t)^\alpha e^{-t} \beta dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \beta^{\alpha+1} \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} dt \\ &= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} dt \\ &= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha+1) \\ &= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \alpha \Gamma(\alpha) \end{aligned}$$

ou seja,

$$X \sim \text{gama}(\alpha, \beta) \Rightarrow E(X) = \alpha\beta$$

2.3.5 Variância

De modo análogo, vamos calcular o segundo momento da densidade gama.

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^\infty x^2 f(x)dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\infty x^2 x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\infty x^{\alpha+1} e^{-x/\beta} dx \end{aligned}$$

Fazendo a mesma mudança de variável usada anteriormente $\frac{x}{\beta} = t$ temos que

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\infty (\beta t)^{\alpha+1} e^{-t} \beta dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \beta^{\alpha+2} \int_0^\infty t^{\alpha+1} e^{-t} dt \\ &= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha+1} e^{-t} dt \\ &= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha+2) \\ &= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} (\alpha+1)\Gamma(\alpha+1) \\ &= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} (\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha) \\ &= \beta^2(\alpha+1)\alpha \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{Var}(X) = \beta^2(\alpha+1)\alpha - (\alpha\beta)^2 = \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = \alpha\beta^2$$

Resumindo:

$$X \sim \text{gama}(\alpha, \beta) \Rightarrow \begin{cases} E(X) = \alpha\beta \\ \text{Var}(X) = \alpha\beta^2 \end{cases} \quad (2.20)$$

2.3.6 Função de distribuição acumulada

A função de distribuição da gama envolve a função gama incompleta e não será objeto de estudo neste curso.

2.3.7 A distribuição de Erlang

Quando o parâmetro de forma α é um inteiro positivo, a distribuição gama é conhecida como *distribuição de Erlang*.

2.3.8 A distribuição qui-quadrado

Quando o parâmetro de forma é igual a $\frac{n}{2}$, com n inteiro positivo, e o parâmetro de escala é $\beta = 2$ resulta a distribuição qui-quadrado com n graus de liberdade, cuja densidade é

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{n/2}} x^{n/2-1} e^{-x/2} \quad \text{se } x > 0 \quad (2.21)$$

Usaremos a seguinte notação para indicar que X tem distribuição qui-quadrado com n graus de liberdade: $X \sim \chi_n^2$. Usando os resultados dados em (2.20), temos

$$X \sim \chi_n^2 \implies \begin{cases} E(X) = \frac{n}{2} \cdot 2 = n \\ Var(X) = \frac{n}{2} \cdot 2^2 = 2n \end{cases}$$

2.4 Distribuição de Weibull

2.4.1 Definição

Uma variável aleatória X tem distribuição de Weibull com parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ se sua função de densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{\left(-\frac{x}{\beta}\right)^\alpha} \quad x > 0 \quad (2.22)$$

Note que podemos reescrever essa expressão como

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{\left(-\frac{x}{\beta}\right)^\alpha} \quad x > 0 \quad (2.23)$$

e alguns autores (ver Rohatgi, por exemplo) usam um novo parâmetro η em vez de β^α . Para mostrar que f define uma densidade, vamos mostrar que a integral é 1. Para tal, vamos fazer a seguinte mudança de variável:

$$\begin{aligned} u &= \left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha \implies du = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} dx \\ x &= 0 \implies u = 0; x = \infty \implies u = \infty \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\int_0^\infty \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{\left(-\frac{x}{\beta}\right)^\alpha} dx = \int_0^\infty e^{-u} du = 1$$

2.4.2 Esperança e variância

Vamos calcular o momento de ordem r :

$$E(X^r) = \int_0^\infty \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{\left(-\frac{x}{\beta}\right)^\alpha} x^r dx$$

Fazendo $u = \frac{x}{\beta}$, resulta que $x = \beta u$ e $dx = \beta du$; logo

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \int_0^\infty \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{\left(-\frac{x}{\beta}\right)^\alpha} x^r dx = \int_0^\infty \frac{\alpha}{\beta} u^{\alpha-1} e^{-u^\alpha} \beta^r u^r \beta du \\ &= \int_0^\infty \alpha u^{\alpha-1} e^{-u^\alpha} \beta^r u^r du \end{aligned}$$

Fazendo $u^\alpha = t$ resulta que $u = t^{1/\alpha}$ e $\alpha u^{\alpha-1} du = dt$; logo,

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \int_0^\infty e^{-t} \beta^r \left(t^{1/\alpha}\right)^r dt = \beta^r \int_0^\infty t^{r/\alpha} e^{-t} dt \\ &= \beta^r \int_0^\infty t^{r/\alpha+1-1} e^{-t} dt = \beta^r \int_0^\infty t^{\frac{r+\alpha}{\alpha}-1} e^{-t} dt = \beta^r \Gamma\left(\frac{r+\alpha}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

Fazendo $r = 1$, obtemos que

$$E(X) = \beta \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)$$

Fazendo $r = 2$ obtemos que

$$E(X^2) = \beta^2 \Gamma\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right)$$

e, portanto,

$$Var(X) = \beta^2 \left\{ \Gamma\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right) - \left[\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) \right]^2 \right\}$$

2.4.3 Função de distribuição acumulada

Por definição,

$$F(x) = \int_0^x \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{\left(-\frac{t}{\beta}\right)^\alpha} dt$$

Fazendo a mudança de variável

$$\begin{aligned} u &= \left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha \implies du = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1} dt \\ t &= 0 \implies u = 0; t = x \implies u = \left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha \end{aligned}$$

resulta

$$F(x) = \int_0^x \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{\left(-\frac{t}{\beta}\right)^\alpha} dt = \int_0^{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha} e^{-u} du = -e^{-u} \Big|_0^{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha} = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right]$$

2.5 Distribuição de Pareto

2.5.1 Definição

Uma variável aleatória X tem distribuição de Pareto com parâmetros $\alpha > 0$ e $b > 0$ se sua função de densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{b} \left(\frac{b}{x}\right)^{\alpha+1} & \text{se } x \geq b \\ 0 & \text{se } x < b \end{cases}$$

Para mostrar que $f(x)$ realmente define uma função de densidade de probabilidade resta provar que a integral é 1, uma vez que $f(x) \geq 0$.

$$\int_b^{\infty} \frac{\alpha}{b} \left(\frac{b}{x}\right)^{\alpha+1} dx = \alpha b^{\alpha} \int_b^{\infty} x^{-\alpha-1} dx = \alpha b^{\alpha} \frac{x^{-\alpha}}{-\alpha} \Big|_b^{\infty}$$

Essa integral converge apenas se $-\alpha < 0$ ou equivalentemente, $\alpha > 0$, pois nesse caso $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{\alpha}} = 0$. Satisfeita esta condição, temos que

$$\alpha b^{\alpha} \frac{x^{-\alpha}}{-\alpha} \Big|_b^{\infty} = 0 - \alpha b^{\alpha} \frac{b^{-\alpha}}{-\alpha} = 1$$

Na **Figura 2.10** ilustra-se a distribuição de Pareto para $a = 3$ e $b = 2$.

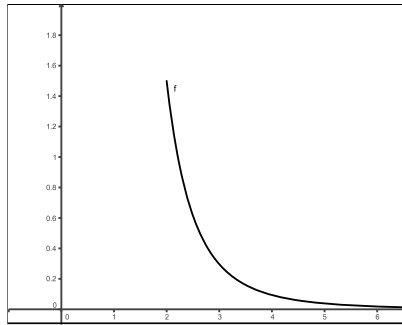


Figura 2.10: Distribuição de Pareto - $a = 3, b = 2$

2.5.2 Esperança

Se $X \sim \text{Pareto}(\alpha, b)$ então

$$E(X) = \int_b^{\infty} x \frac{\alpha}{b} \left(\frac{b}{x}\right)^{\alpha+1} dx = \alpha b^{\alpha} \int_b^{\infty} x^{-\alpha} dx = \alpha b^{\alpha} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_b^{\infty}$$

Para que essa integral convirja, temos que ter $-\alpha + 1 < 0$, ou $\alpha > 1$. Satisfeita esta condição,

$$E(X) = \alpha b^{\alpha} \left(0 - \frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right) = \frac{-\alpha b^{\alpha-\alpha+1}}{1-\alpha} = \frac{\alpha b}{\alpha-1}$$

2.5.3 Variância

Se $X \sim \text{Pareto}(\alpha, b)$ então

$$E(X^2) = \int_b^{\infty} x^2 \frac{\alpha}{b} \left(\frac{b}{x}\right)^{\alpha+1} dx = \alpha b^{\alpha} \int_b^{\infty} x^{-\alpha+1} dx = \alpha b^{\alpha} \frac{x^{-\alpha+2}}{-\alpha+2} \Big|_b^{\infty}$$

Para que essa integral convirja, temos que ter $-\alpha + 2 < 0$, ou $\alpha > 2$. Satisfeita esta condição,

$$E(X) = \alpha b^{\alpha} \left(0 - \frac{b^{-\alpha+2}}{-\alpha+2}\right) = \frac{-\alpha b^{\alpha-\alpha+2}}{2-\alpha} = \frac{\alpha b^2}{\alpha-2}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \frac{\alpha b^2}{\alpha-2} - \left(\frac{\alpha b}{\alpha-1}\right)^2 = \frac{\alpha b^2 (\alpha-1)^2 - \alpha^2 b^2 (\alpha-2)}{(\alpha-1)^2 (\alpha-2)} \\ &= \frac{\alpha b^2 [\alpha^2 - 2\alpha + 1 - \alpha(\alpha-2)]}{(\alpha-1)^2 (\alpha-2)} = \frac{\alpha b^2 [\alpha^2 - 2\alpha + 1 - \alpha^2 + 2\alpha]}{(\alpha-1)^2 (\alpha-2)} \\ &= \frac{\alpha b^2}{(\alpha-1)^2 (\alpha-2)} \end{aligned}$$

Resumindo:

$$X \sim \text{Pareto}(\alpha, b) \implies \begin{cases} E(X) = \frac{\alpha b}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \\ \text{Var}(X) = \frac{\alpha b^2}{(\alpha-1)^2 (\alpha-2)} & \text{se } \alpha > 2 \end{cases} \quad (2.24)$$

2.5.4 Função de distribuição acumulada

Por definição, $F(x) = \Pr(X \leq x) = 0$ se $x < b$. Para $x \geq b$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \Pr(X \leq x) = \int_b^x \frac{\alpha}{b} \left(\frac{b}{t}\right)^{\alpha+1} dt = \alpha b^{\alpha} \int_b^x t^{-\alpha-1} dt = \alpha b^{\alpha} \frac{t^{-\alpha}}{-\alpha} \Big|_b^x \\ &= -b^{\alpha} (x^{-\alpha} - b^{-\alpha}) = 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^{\alpha} \end{aligned}$$

Capítulo 3

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Dada uma variável aleatória contínua X com função de densidade $f_X(x)$, muitas vezes estamos interessados em conhecer a densidade de uma outra variável aleatória $Y = g(x)$ definida como uma função de X .

3.1 Exemplo

Se $X \sim Unif(-1, 1)$, calcule a densidade de $Y = g(X) = X^2$ e de $W = h(X) = |X|$.

Solução:

Temos que

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 < x < 1 \\ 0 & x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \end{cases}$$

$$-1 < x < 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq g(x) < 1 \\ 0 \leq h(x) < 1 \end{cases}$$

Para calcular a função de densidade de probabilidade de $Y = g(X) = X^2$ devemos notar que

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr(Y \leq y) = \Pr(X^2 \leq y) \\ &= \Pr(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= \Pr(X \leq \sqrt{y}) - \Pr(X < -\sqrt{y}) \\ &= \Pr(X \leq \sqrt{y}) - \Pr(X \leq -\sqrt{y}) \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

e, portanto

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy} [F_Y(y)] \\ &= \frac{d}{dy} [F_X(\sqrt{y})] - \frac{d}{dy} [F_X(-\sqrt{y})] \\ &= F'_X(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} - F'_X(-\sqrt{y}) \left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right) \\ &= f_X(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X(-\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{aligned}$$

Como $0 \leq \sqrt{y} < 1$ e $-1 < -\sqrt{y} \leq 0$, resulta que $f_X(\sqrt{y}) = f_X(-\sqrt{y}) = \frac{1}{2}$. Logo

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} & \text{se } 0 \leq y < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

De modo análogo, para $0 \leq w < 1$

$$\begin{aligned} F_W(w) &= \Pr(W \leq w) = \Pr(|X| \leq w) = \Pr(-w \leq X \leq w) = \\ &= F_X(w) - F_X(-w) \end{aligned}$$

e, portanto

$$\begin{aligned} f_W(w) &= F'_W(w) = F'_X(w) - F'_X(-w)(-1) = \\ &= f_X(w) + f_X(-w) \end{aligned}$$

Como $0 \leq w < 1$ e $-1 < -w \leq 0$, resulta que $f_X(w) = f_X(-w) = \frac{1}{2}$. Logo

$$f_W(w) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq y < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

que é a densidade uniforme padrão.

3.2 Funções inversíveis

Quando a função g é inversível, é possível obter uma expressão para a função de densidade de Y .

Teorema 3.1 *Seja X uma variável aleatória contínua com função de densidade $f_X(x)$ e seja $Y = g(x)$ uma outra variável aleatória. Se a função $g(x)$ é inversível e diferenciável, então a função de densidade de Y é dada por:*

$$f_Y(y) = f_X[g^{-1}(y)] \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| \quad (3.1)$$

Demonstração:

Esse resultado segue diretamente da relação entre as funções de densidade e de distribuição acumulada dada na equação (3.2):

$$f_X(x) = F'_X(x) \quad (3.2)$$

Suponhamos inicialmente que $g(x)$ seja crescente; nesse caso, $g'(x) > 0$ e $x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$. Então, a função de distribuição acumulada de Y é:

$$F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr(g(X) \leq y)$$

Mas, conforme ilustrado na **Figura 3.1**, $g(X) \leq y \Leftrightarrow X \leq g^{-1}(y)$.

Logo,

$$F_Y(y) = \Pr(g(X) \leq y) = \Pr(X \leq g^{-1}(y)) = F_X[g^{-1}(y)]$$

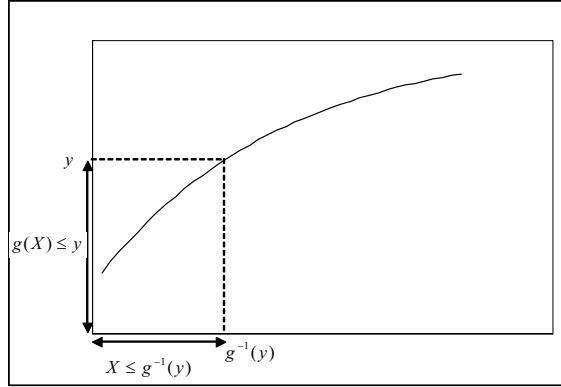


Figura 3.1: Função inversa de uma função crescente

Da relação entre a função de densidade de probabilidade e a função de distribuição e da regra da cadeia, segue que:

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = F'_X[g^{-1}(y)] \frac{dg^{-1}(y)}{dy} = f_X[g^{-1}(y)] \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \quad (3.3)$$

Como a inversa de uma função crescente também é crescente, resulta que $\frac{dg^{-1}(y)}{dy} > 0$ e, portanto, (3.3) pode ser reescrita como

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = f_X[g^{-1}(y)] \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| \quad (3.4)$$

Quando $g(x)$ é decrescente, vale notar que $g'(x) < 0$ e, conforme ilustrado na **Figura 3.2**, $g(X) \leq y \Leftrightarrow X \geq g^{-1}(y)$.

Dessa forma,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr(Y \leq y) = \Pr(g(X) \leq y) = \Pr(X \geq g^{-1}(y)) = 1 - \Pr(X < g^{-1}(y)) \\ &= 1 - \Pr[X \leq g^{-1}(y)] = 1 - F_X[g^{-1}(y)] \end{aligned}$$

e, portanto

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = -F'_X[g^{-1}(y)] \frac{dg^{-1}(y)}{dy} = -f_X[g^{-1}(y)] \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \quad (3.5)$$

Como $\frac{dg^{-1}(y)}{dy} < 0$ (lembre que estamos considerando g decrescente agora, o que implica que a inversa também é decrescente), resulta

$$-\frac{dg^{-1}(y)}{dy} = \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|$$

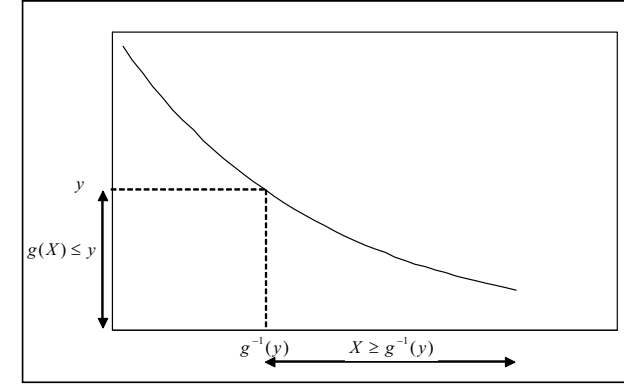


Figura 3.2: Função inversa de uma função decrescente

e (3.5) pode ser reescrita como

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = f_X[g^{-1}(y)] \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| \quad (3.6)$$

Os resultados (3.4) e (3.6), para funções crescentes e decrescentes, podem ser reunidos para completar a prova do teorema.

Quando a função não é monotônica, não podemos aplicar o teorema acima e nem sempre conseguiremos obter uma expressão usando os recursos vistos neste curso.

3.2.1 Exemplo

Seja $X \sim \text{Unif}(0, 1)$, isto é:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1 \end{cases}$$

Defina $Y = -\ln X$. Vamos calcular a função de densidade de probabilidade de Y . A função $g(x) = -\ln x$ é estritamente decrescente e podemos aplicar o Teorema 3.1. Então, como $0 < x < 1$, segue que $0 < y = -\ln x < \infty$ (ver **Figura 3.3**).

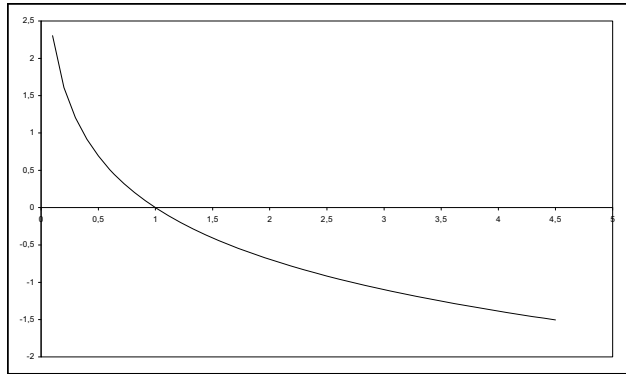
Por outro lado, a inversa de $y = g(x) = -\ln x$ é $g^{-1}(y) = e^{-y}$ e, portanto,

$$\frac{dg^{-1}(y)}{dy} = -e^{-y}$$

Como $0 < y < \infty$, então $0 < e^{-y} < 1$ e a função de densidade de probabilidade de Y é

$$f_Y(y) = f_X[e^{-y}] \times |-e^{-y}| = 1 \times e^{-y} \Rightarrow f_Y(y) = e^{-y}$$

uma vez que $f_X(x) = 1$ no intervalo $(0, 1)$. Note que essa é a densidade exponencial com parâmetro igual a 1.

Figura 3.3: Gráfico da função $Y = g(X) = -\ln X$

3.2.2 Transformação linear

Consideremos a transformação $Y = aX + b$, que define uma reta. Se X é uma variável aleatória contínua com densidade $f_X(x)$, então podemos aplicar o Teorema 3.1 para calcular a densidade de Y . Se $Y = g(X) = aX + b$, então a função inversa é

$$X = g^{-1}(Y) = \frac{Y - b}{a}$$

cuja derivada é

$$\frac{dg^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{a}$$

Logo, a densidade de Y é

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y - b}{a}\right) \left|\frac{1}{a}\right| \quad (3.7)$$

Exemplo

Se a função de densidade da variável aleatória X é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{se } x < -1 \text{ ou } x > 0 \end{cases}$$

calcule a função de densidade de $Y = 2X - \frac{3}{5}$, bem como sua esperança e sua variância.

Solução:

Temos que $a = 2$ e $b = -\frac{3}{5}$. Como $-1 \leq x \leq 0$, resulta que $-2,6 \leq y \leq -0,6$. Logo,

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y + 0,6}{2}\right) \times \frac{1}{2} \quad \text{se } -2,6 \leq y \leq -0,6$$

ou seja

$$f_Y(y) = 3 \left(\frac{y + 0,6}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8} (y + 0,6)^2 \quad \text{se } -2,6 \leq y \leq -0,6$$

Pelas propriedades da esperança e da variância, se $Y = 2X - \frac{3}{5}$ então

$$\begin{aligned} E(Y) &= 2E(X) - \frac{3}{5} \\ \text{Var}(Y) &= 4\text{Var}(X) \end{aligned}$$

$$E(X) = \int_{-1}^0 x 3x^2 dx = \left(3\frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^0 = -\frac{3}{4} \Rightarrow E(Y) = -\frac{6}{4} - \frac{3}{5} = \frac{-30 - 12}{20} = -2,1$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-1}^0 x^2 3x^2 dx = \left(3\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^0 = \frac{3}{5} \Rightarrow \text{Var}(X) = \frac{3}{5} - \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{48 - 45}{80} = \frac{3}{80} \\ \Rightarrow \text{Var}(Y) &= 4 \times \frac{3}{80} = \frac{3}{20} \end{aligned}$$

Capítulo 4

A Distribuição Normal

4.1 Alguns resultados de Cálculo

Com o uso de coordenadas polares, pode-se mostrar que

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (4.1)$$

Como o integrando é uma função par, temos também que

$$\int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = 2 \times \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = 2 \times \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2\pi}$$

ou ainda

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = 1 \quad (4.2)$$

4.1.1 Exercício resolvido

Calcule $\Gamma(1/2)$. Por definição,

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-x} x^{1/2-1} dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

Vamos usar a seguinte transformação de variável:

$$x = \frac{t^2}{2}$$

Então,

$$\begin{aligned} dx &= t dt \\ x &= 0 \Rightarrow t = 0 \\ x &\rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Logo,

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{\frac{t^2}{2}}} \right) t dt = \sqrt{2} \int_0^\infty e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

ou seja:

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

4.2 Densidade normal padrão

4.2.1 Definição

Analisando a equação (4.2), vemos que a função $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$ satisfaz as condições para ser uma função de densidade. Essa é, por definição, a *densidade normal padrão* $\varphi(x)$ (note que $\varphi(x) > 0$) definida por:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad -\infty < x < \infty \quad (4.3)$$

Vamos denotar por $N(0; 1)$ a densidade normal padrão e, se uma variável aleatória Z é distribuída segundo uma normal padrão, representaremos esse fato como $Z \sim N(0; 1)$.

4.2.2 Esperança

Seja $Z \sim N(0, 1)$. Por definição, a esperança de Z é:

$$E(Z) = \int_{-\infty}^\infty x \varphi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

Como $\varphi(x)$ é simétrica em torno do ponto $x = 0$, sabemos que $E(Z) = 0$.

4.2.3 Variância

Como $E(Z) = 0$ se $Z \sim N(0; 1)$, então

$$Var(Z) = E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

uma vez que o integrando é par (note os limites de integração). Esta integral é calculada usando-se o método de integração por partes. Fazendo:

- $x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = dv \Rightarrow v = -\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$
- $x = u \Rightarrow dx = du$

resulta que:

$$-x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \Big|_0^\infty = \int_0^\infty \left[-\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right] dx + \int_0^\infty x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \quad (4.4)$$

Pelos resultados (2.7) e (4.1) resulta

$$0 = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \int_0^\infty x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \Rightarrow \int_0^\infty x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Logo,

$$Var(Z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow Var(Z) = 1 \quad (4.5)$$

4.2.4 Características da curva normal padrão

1. Simétrica em torno de 0; note que $\varphi(-x) = \varphi(x)$.
2. Assíntotas: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$; esse resultado segue diretamente do fato de que $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$
3. Ponto de máximo

Para calcular a primeira e segunda derivadas de $\varphi(x)$, devemos lembrar que $(e^x)' = e^x$ e, pela regra da cadeia, $(e^{g(x)})' = e^{g(x)} g'(x)$. Aplicando esses resultados à densidade normal padrão, obtemos que:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] \left[-\frac{1}{2} 2x\right] = -\varphi(x)x \quad (4.6)$$

Derivando novamente, obtemos:

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= -\varphi'(x)x - \varphi(x) = -[-\varphi(x)x]x - \varphi(x) \\ &= \varphi(x)x^2 - \varphi(x) = \varphi(x)(x^2 - 1) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Analisando a equação (4.6) e lembrando que $\varphi(x) > 0$, pode-se ver que:

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

e assim, $x = 0$ é um ponto crítico. Como $\varphi'(x) > 0$ para $x < 0$ e $\varphi'(x) < 0$ para $x > 0$, então φ é crescente à esquerda de 0 e decrescente à direita de 0. Segue, então, que $x = 0$ é um ponto de máximo e nesse ponto

$$\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (4.8)$$

4. Pontos de inflexão

Analisando a segunda derivada dada por (4.7), tem-se que:

$$\varphi''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \quad (4.9)$$

Além disso,

$$\varphi''(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow x > 1 \quad \text{ou} \quad x < -1$$

e

$$\varphi''(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

Logo, $\varphi(x)$ é côncava para cima se $x > 1$ ou $x < -1$ e é côncava para baixo quando $-1 < x < +1$. Na **Figura 4.1** temos o gráfico da densidade normal padrão; aí as linhas pontilhadas indicam a ocorrência dos pontos de inflexão

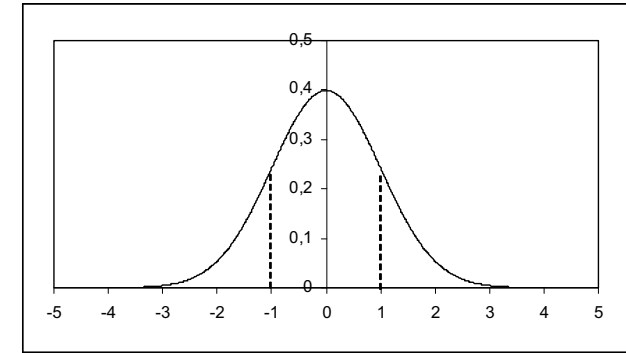


Figura 4.1: Densidade normal padrão

4.2.5 Função de distribuição acumulada

A função de distribuição acumulada de qualquer variável aleatória X é definida por $F_X(X) = \Pr(X \leq x)$. No caso da densidade normal padrão, essa função é dada pela integral

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt \quad (4.10)$$

para a qual não existe uma antiderivada em forma de função elementar. Assim, a função de distribuição acumulada da normal padrão é calculada por integração numérica. Todos os pacotes estatísticos possuem rotinas especiais para esse cálculo. No EXCEL, a função DIST.NORMP calcula $\Pr(Z \leq x)$ para qualquer x , onde $Z \sim N(0; 1)$.

4.2.6 Tabulação da distribuição normal padrão

Para completar o estudo da distribuição normal padrão, é necessário calcular probabilidades de quaisquer eventos, tais como $\Pr(a \leq Z \leq b)$. Por definição da função de densidade, essa probabilidade, no caso da normal padrão, é dada por:

$$\Pr(a \leq Z \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx$$

Como já dito, tal integral, que dá a área sob a curva compreendida entre os pontos a e b , não pode ser calculada pelos procedimentos usuais; a dificuldade está no fato de que aqui não podemos aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo, já que não existe uma função elementar cuja derivada seja $\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. Assim, para calcular probabilidades do tipo acima, é necessária a aplicação de métodos numéricos e esses métodos permitem tabular $\Pr(Z \leq z)$ para qualquer valor de z .

Ao final deste capítulo, são dadas 2 versões da tabela da normal padrão. Na Tabela 1 é dada a distribuição acumulada para cada valor de $z > 0$, ou seja é dado o valor de $\Phi(z) = \Pr(Z \leq z)$. Na Tabela 2, usa-se novamente o fato de a distribuição normal

ser simétrica para “economizar” no tamanho da tabela e apresenta-se, para cada $z > 0$, $tab(z) = \Pr(0 \leq Z \leq z)$. A partir de qualquer uma delas é possível calcular a probabilidade de qualquer evento associado à distribuição normal padrão. Em ambas, a abscissa z é apresentada com 2 casas decimais, sendo que a casa inteira e a primeira casa decimal estão nas linhas da coluna à esquerda e a segunda casa decimal está na linha superior da tabela.

4.2.7 Exemplos

Seja $Z \sim N(0, 1)$. Calcule:

1. $\Pr(0 \leq Z \leq 1)$

Solução

Essa probabilidade corresponde à área sombreada na **Figura 4.2**. Pela Tabela 1, temos:

$$\begin{aligned}\Pr(0 \leq Z \leq 1) &= \Pr(Z \leq 1) - \Pr(Z < 0) = \Pr(Z \leq 1) - \Pr(Z \leq 0) \\ &= \Phi(1) - \Phi(0) = 0,84134 - 0,5 = 0,34134\end{aligned}$$

Pela Tabela 2, temos que

$$\Pr(0 \leq Z \leq 1) = tab(1) = 0,34134$$

onde $tab(z)$ representa o valor dado na Tabela 2 correspondente à abscissa z .

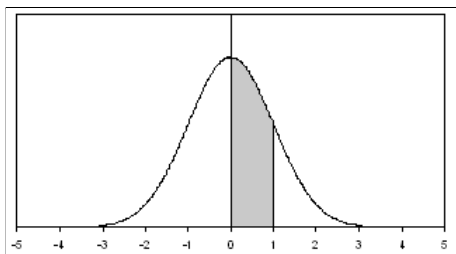


Figura 4.2: $\Pr(0 < Z < 1)$

2. $\Pr(1 \leq Z < 2,5)$

Solução

Essa probabilidade corresponde à área sombreada na **Figura 4.3**. Pela Tabela 1, temos:

$$\begin{aligned}\Pr(1 \leq Z < 2,5) &= \Pr(Z < 2,5) - \Pr(Z < 1) = \Pr(Z \leq 2,5) - \Pr(Z \leq 1) \\ &= \Phi(2,5) - \Phi(1) = 0,99379 - 0,84134 = 0,15245\end{aligned}$$

Pela Tabela 2, temos que

$$\Pr(1 \leq Z \leq 2,5) = tab(2,5) - tab(1) = 0,49379 - 0,34134 = 0,15245$$

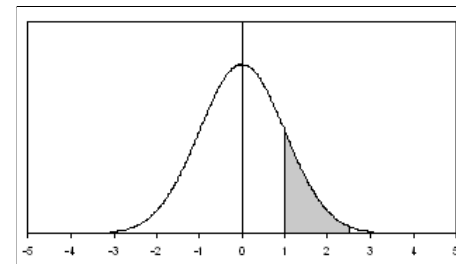


Figura 4.3: $\Pr(1 \leq Z < 2,5)$

3. $\Pr(-1 \leq Z \leq 0)$

Solução

Essa probabilidade corresponde à área sombreada na **Figura 4.4**. Por simetria e pela continuidade da densidade, temos que

$$\Pr(-1 < Z < 0) = \Pr(0 < Z < 1) = \Pr(0 < Z \leq 1)$$

Da Tabela 1 resulta

$$\begin{aligned}\Pr(-1 < Z < 0) &= \Pr(0 < Z < 1) = \Pr(0 < Z \leq 1) = \Pr(Z \leq 1) - \Pr(Z \leq 0) \\ &= \Phi(1) - \Phi(0) = 0,84134 - 0,5 = 0,34134\end{aligned}$$

Pela Tabela 2, temos que (note a simetria das áreas!)

$$\Pr(-1 < Z < 0) = \Pr(0 \leq Z \leq 1) = tab(1) = 0,34134$$

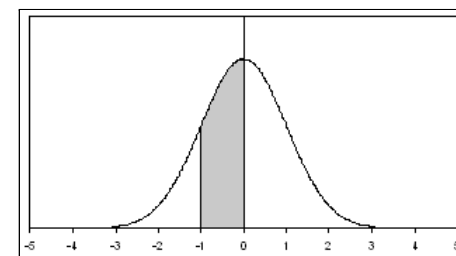


Figura 4.4: $\Pr(-1 < Z < 0)$

4. $\Pr(Z < -1,0)$

Solução

Essa probabilidade corresponde à área sombreada em cinza claro na **Figura 4.5**. Por simetria, essa área (probabilidade) é igual à área sombreada em cinza escuro, que corresponde a $\Pr(Z > 1)$. Então, pela Tabela 1, temos:

$$\Pr(Z < -1, 0) = \Pr(Z > 1, 0) = 1 - \Pr(Z \leq 1) = 1 - \Phi(1, 0) = 1 - 0,84134 = 0,15866$$

Pela Tabela 2, temos que

$$\Pr(Z < -1, 0) = \Pr(Z > 1, 0) = 0,5 - \Pr(0 \leq Z \leq 1) = 0,5 - \text{tab}(1, 0) = 0,5 - 0,34134 = 0,15866$$

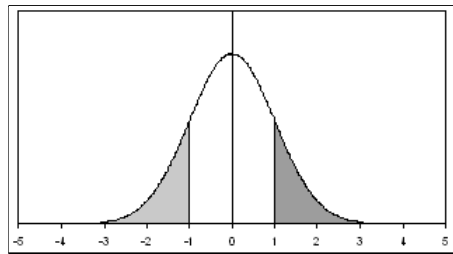


Figura 4.5: $\Pr(Z < -1)$

5. $\Pr(-1 < Z < 2)$

Solução

Essa probabilidade corresponde à área sombreada na **Figura 4.6**. Pela Tabela 1, temos:

$$\begin{aligned} \Pr(-1 < Z < 2) &= \Pr(-1 < Z \leq 2) = \Pr(Z \leq 2) - \Pr(Z \leq -1) = \Pr(Z \leq 2) - \Pr(Z \geq 1) \\ &= \Phi(2, 0) - [1 - \Pr(Z < 1)] = \Phi(2, 0) - 1 + \Phi(1, 0) = 0,97725 - 1 + 0,84134 = \end{aligned}$$

Pela Tabela 2, temos que

$$\begin{aligned} \Pr(-1 < Z < 2) &= \Pr(-1 \leq Z \leq 2) = \Pr(-1 \leq Z \leq 0) + \Pr(0 \leq Z \leq 2) = \\ &= \Pr(0 \leq Z \leq 1) + \Pr(0 \leq Z \leq 2) = \\ &= \text{tab}(1, 0) + \text{tab}(2, 0) = 0,34134 + 0,47725 = 0,81859 \end{aligned}$$

6. $\Pr(Z > 1,5)$

Solução

Essa probabilidade corresponde à área sombreada na **Figura 4.7**. Pela Tabela 1, temos:

$$\Pr(Z > 1,5) = 1 - \Pr(Z \leq 1,5) = 1 - \Phi(1,5) = 1 - 0,93319 = 0,06681$$

Pela Tabela 2, temos que

$$\Pr(Z > 1,5) = 0,5 - \Pr(0 \leq Z \leq 1,5) = 0,5 - \text{tab}(1,5) = 0,5 - 0,43319 = 0,06681$$

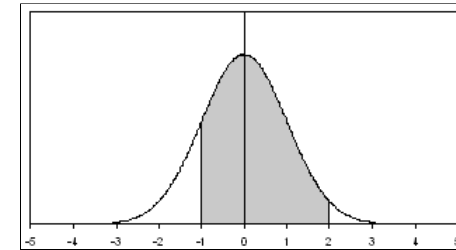


Figura 4.6: $\Pr(-1 < Z < 2)$

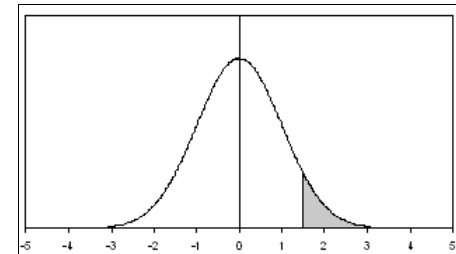


Figura 4.7: $P(Z > 1,5)$

4.3 Densidade $N(\mu; \sigma^2)$

4.3.1 Definição

Seja $Z \sim N(0; 1)$ e vamos definir uma nova variável aleatória $X = g(Z) = \mu + \sigma Z$, em que $\sigma > 0$. Usando o resultado (3.7), temos que:

$$f_X(x) = f_Z\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \times \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \times \frac{1}{\sigma}$$

ou ainda:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

e essa é a densidade da normal $N(\mu; \sigma^2)$

Definição 4.1 Uma variável aleatória contínua X , definida para todos os valores da reta real, tem densidade normal com parâmetros μ e σ^2 , onde $-\infty < \mu < \infty$ e $0 < \sigma^2 < \infty$, se sua função de densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad -\infty < x < \infty \quad . \quad (4.11)$$

Usaremos a seguinte notação para indicar que uma variável aleatória X tem distribuição normal com parâmetros μ e σ^2 : $X \sim N(\mu; \sigma^2)$.

4.3.2 Características da curva normal

1. Simétrica em torno de μ ; note que $f(\mu - x) = f(\mu + x)$.
2. Assíntotas: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$; esse resultado segue diretamente do fato de que $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$
3. Ponto de máximo

Para calcular a primeira e segunda derivadas de $f(x)$, devemos lembrar que $(e^x)' = e^x$ e, pela regra da cadeia, $(e^{g(x)})' = e^{g(x)} g'(x)$. Aplicando esses resultados à densidade normal, obtemos que:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \left[-\frac{1}{2\sigma^2} 2(x-\mu)\right] = -f(x) \left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right) \quad (4.12)$$

Derivando novamente, obtemos:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -f'(x) \left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right) - f(x) \frac{1}{\sigma^2} = -\left[-f(x) \left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)\right] \left[\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right] - f(x) \frac{1}{\sigma^2} = \\ &= f(x) \left[\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^4}\right] - f(x) \frac{1}{\sigma^2} = f(x) \left[\frac{(x-\mu)^2 - \sigma^2}{\sigma^4}\right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

Analisando a equação (4.12) e lembrando que $f(x) > 0$, pode-se ver que:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \mu$$

e assim, $x = \mu$ é um ponto crítico. Como $f'(x) > 0$ para $x < \mu$ e $f'(x) < 0$ para $x > \mu$, então f é crescente à esquerda de μ e decrescente à direita de μ . Segue, então, que $x = \mu$ é um ponto de máximo e nesse ponto

$$f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \quad (4.14)$$

4. Pontos de inflexão

Analisando a segunda derivada dada por (4.13), tem-se que:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x-\mu)^2 = \sigma^2 \Leftrightarrow |x-\mu| = \sigma \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mu + \sigma \\ x = \mu - \sigma \end{cases} \quad (4.15)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\Leftrightarrow (x-\mu)^2 > \sigma^2 \Leftrightarrow |x-\mu| > \sigma \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x - \mu > \sigma \quad \text{ou} \quad \mu - x > \sigma \\ &\Leftrightarrow x > \mu + \sigma \quad \text{ou} \quad x < \mu - \sigma \end{aligned} \quad (4.16)$$

e

$$\begin{aligned} f''(x) < 0 &\Leftrightarrow (x-\mu)^2 < \sigma^2 \Leftrightarrow |x-\mu| < \sigma \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - \mu < \sigma \\ \mu - x < \sigma \end{cases} \Leftrightarrow \mu - \sigma < x < \mu + \sigma \end{aligned} \quad (4.17)$$

Logo, $f(x)$ é côncava para cima se $x > \mu + \sigma$ ou $x < \mu - \sigma$ e é côncava para baixo quando $\mu - \sigma < x < \mu + \sigma$.

Na **Figura 4.8** é apresentado o gráfico da densidade normal no caso em que $\mu = 3$ e $\sigma^2 = 1$. Aí a linha pontilhada central representa o eixo de simetria e as linhas pontilhadas laterais passam pelos pontos de inflexão 3 ± 1 .

4.3.3 Parâmetros da $N(\mu; \sigma^2)$

Se $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, então $X = \mu + \sigma Z$, em que $Z \sim N(0; 1)$. Das propriedades de média e variância, sabemos que, se X é uma variável aleatória e $k_1 \neq 0$ e k_2 são constantes quaisquer, então

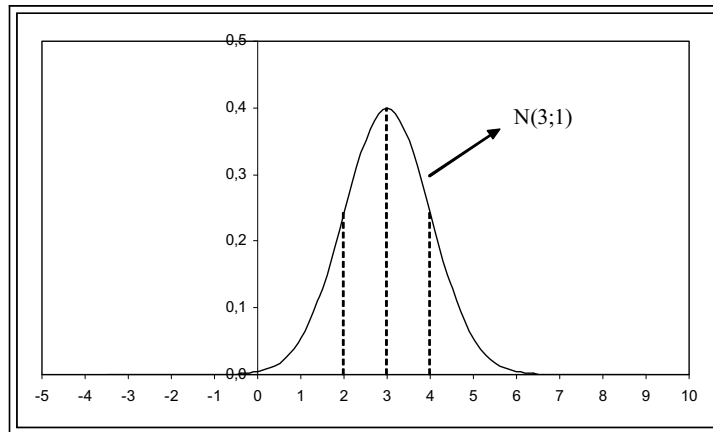
$$\begin{aligned} E(k_1 X + k_2) &= k_1 E(X) + k_2 \\ \text{Var}(k_1 X + k_2) &= k_1^2 \text{Var}(X) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Resulta, então, que se $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ então

$$E(X) = \mu + \sigma E(Z) = \mu + 0 \Rightarrow E(X) = \mu \quad (4.19)$$

e

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 \text{Var}(Z) = \sigma^2 \times 1 \Rightarrow \text{Var}(X) = \sigma^2 \quad (4.20)$$

Figura 4.8: Densidade normal com média $\mu = 3$ e variância $\sigma^2 = 1$

Resumindo:

$$X \sim N(\mu; \sigma^2) \Rightarrow \begin{cases} E(X) = \mu \\ Var(X) = \sigma^2 \end{cases} \quad (4.21)$$

Os parâmetros da densidade normal são, então, a média e a variância, que são medidas de posição e dispersão, respectivamente. Valores diferentes de μ deslocam o eixo de simetria da curva e valores diferentes de σ^2 mudam a dispersão da curva. Quanto maior σ^2 , mais “espalhada” é a curva; mas o ponto de máximo, dado pela equação (4.14), é inversamente proporcional a σ^2 . Logo, quanto maior σ^2 , mais “espalhada” e mais “achatada” é a curva. A questão é que a forma é sempre a de um “sino”. Na **Figura 4.9** temos exemplos de densidades normais com a mesma variância, mas com médias diferentes. O efeito é o “delocamento” da densidade. Já na **Figura 4.10**, temos duas densidades com a mesma média, mas variâncias diferentes. O efeito é que a densidade com maior variância é mais dispersa e achatada.

4.3.4 Função de distribuição acumulada

Como no caso da normal padrão, a função de distribuição acumulada não pode ser calculada diretamente, sendo necessários programas computacionais. Com o auxílio da função DISTR.NORM do Excel foi obtida a **Figura 4.11**, onde temos os gráficos da função de distribuição acumulada para as densidades $N(0, 1)$, $N(3, 1)$ e $N(3, 2)$.

Note que, pela simetria da densidade em torno da média μ , sempre teremos $\Phi(\mu) = 0,5$.

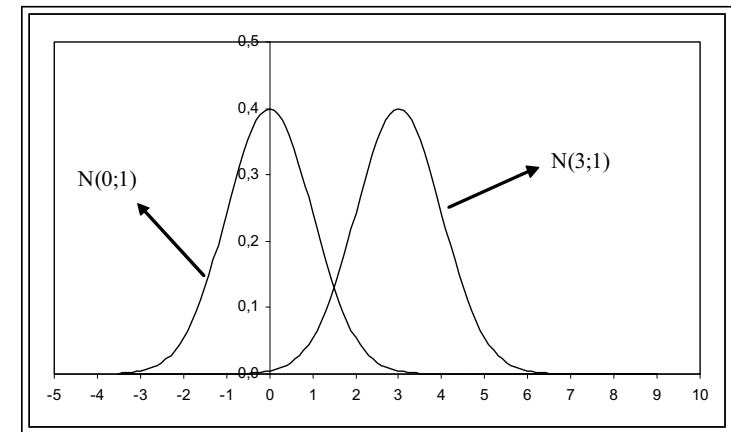


Figura 4.9: Exemplos de densidades normais com mesma variância e médias diferentes

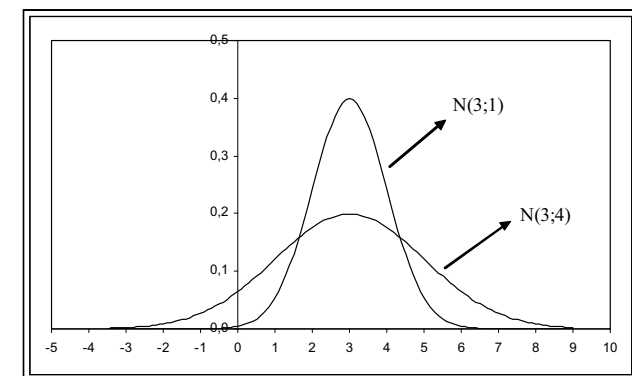


Figura 4.10: Exemplos de densidades normais com mesma média e variâncias diferentes

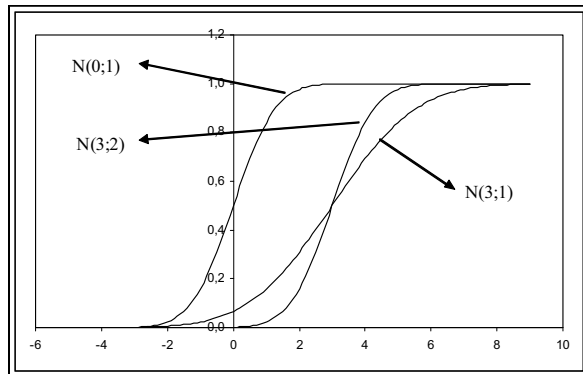


Figura 4.11: Função de distribuição acumulada de várias densidades normais

4.3.5 Cálculo de probabilidades de uma variável normal

O resultado a seguir garante que probabilidades de qualquer variável normal podem ser calculadas a partir das probabilidades da normal padrão.

De fato, já foi visto que se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $X = \mu + \sigma Z$, onde $Z \sim N(0, 1)$. Vamos ver como utilizar esse resultado para calcular probabilidades da normal. Temos que

$$\Pr(X \leq x) = \Pr\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Pr\left(Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad (4.22)$$

Na **Figura 4.12** ilustra-se esse fato com as densidades $Z \sim N(0; 1)$ e $X \sim N(3; 4)$. No gráfico inferior a área sombreada representa $\Pr(X \leq 5)$ e, no gráfico superior, a área sombreada representa a probabilidade equivalente:

$$\Pr(X \leq 5) = \Pr\left(\frac{X - 3}{2} \leq \frac{5 - 3}{2}\right) = \Pr(Z \leq 1)$$

O que o resultado diz é que essas áreas (probabilidades) são iguais.

Esse resultado mostra que probabilidades de *qualquer* variável normal podem ser obtidas a partir de probabilidades da normal padrão e, assim, só é necessário tabular a distribuição normal padrão.

4.3.6 Exemplos

1. Se $X \sim N(2, 4)$ calcule $\Pr(-1 \leq X \leq 5)$.

Solução

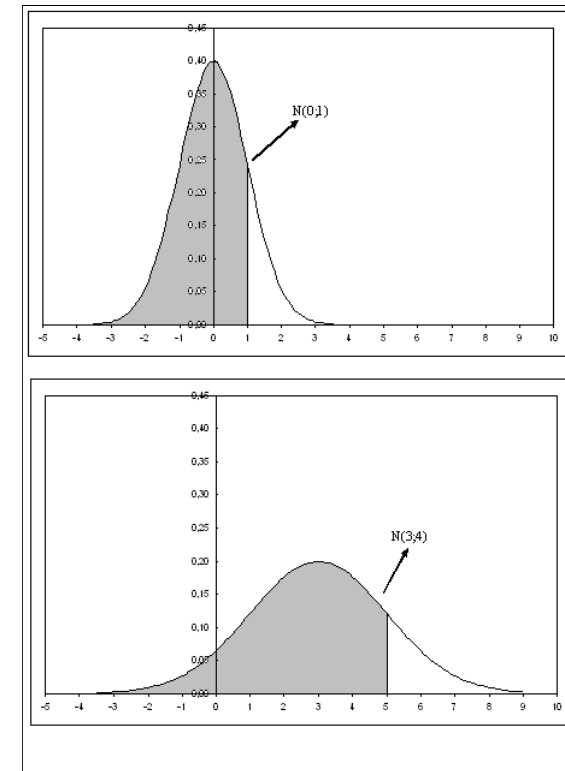


Figura 4.12: Ilustração da propriedade (4.22)

Temos que (veja **Figura 4.13**)

$$\begin{aligned}\Pr(-1 \leq X \leq 5) &= \Pr\left(\frac{-1-2}{\sqrt{4}} \leq \frac{X-2}{\sqrt{4}} \leq \frac{5-2}{\sqrt{4}}\right) = \Pr(-1,5 \leq Z \leq 1,5) = \\ &= 2\Pr(0 \leq Z \leq 1,5) = 2 \times \text{tab}(1,5) = 2 \times 0,43319 \\ &= 2[\Phi(1,5) - 0,5] = 2 \times [0,93319 - 0,5] = 0,86638\end{aligned}$$

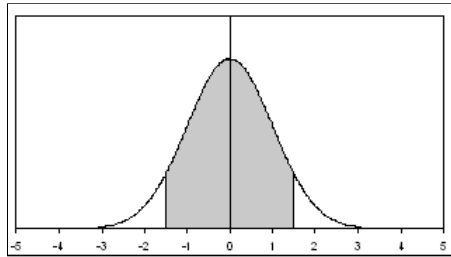


Figura 4.13: $X \sim N(2, 4) : \Pr(-1 \leq X \leq 5) = \Pr(-1,5 \leq Z \leq 1,5)$

2. Se $X \sim N(-1, 9)$ calcule $\Pr(-1 \leq X \leq 5)$.

Solução

Temos que (veja **Figura 4.14**)

$$\begin{aligned}\Pr(-1 \leq X \leq 9) &= \Pr\left(\frac{-1-(-1)}{\sqrt{9}} \leq \frac{X-(-1)}{\sqrt{9}} \leq \frac{9-(-1)}{\sqrt{9}}\right) = \Pr(0 \leq Z \leq 2) = \\ &= \text{tab}(2, 0) = \Phi(2, 0) - 0,5 = 0,47725\end{aligned}$$

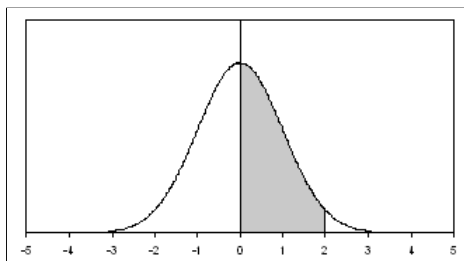


Figura 4.14: $X \sim N(-1, 9) : \Pr(-1 \leq X \leq 9) = \Pr(0 \leq Z \leq 2)$

3. Se $X \sim N(3, 4)$ calcule $\Pr(-7 \leq X \leq 5)$.

Solução

Temos que (veja **Figura 4.15**)

$$\begin{aligned}\Pr(-7 \leq X \leq 5) &= \Pr\left(\frac{-7-3}{\sqrt{4}} \leq \frac{X-3}{\sqrt{4}} \leq \frac{5-3}{\sqrt{4}}\right) = \Pr(-5 \leq Z \leq 1) = \\ &= \Pr(-5 \leq Z \leq 0) + \Pr(0 \leq Z \leq 1) = \\ &= \Pr(0 \leq Z \leq 5) + \text{tab}(1, 0) = 0,5 + 0,34134 = 0,84134 \\ &= \Phi(1, 0) - \Phi(-5, 0) = \Phi(1, 0) - [1 - \Phi(5, 0)]\end{aligned}$$

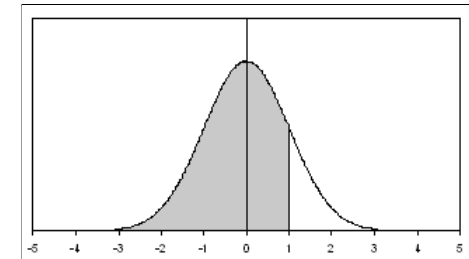


Figura 4.15: $X \sim N(3; 4) : \Pr(-7 \leq X \leq 5) = \Pr(-5 \leq Z \leq 1)$

4. Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, calcule $\Pr(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$.

Solução

Temos que (veja **Figura 4.16**):

$$\begin{aligned}\Pr(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) &= \Pr\left(\frac{\mu - 2\sigma - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{\mu + 2\sigma - \mu}{\sigma}\right) = \\ &= \Pr(-2 \leq Z \leq 2) = 2 \times \Pr(0 \leq Z \leq 2) = \\ &= 2 \times \text{tab}(2, 0) = 2 \times 0,47725 = 0,9545 \simeq 95\%\end{aligned}$$

Note que essa probabilidade não depende dos parâmetros μ e σ . Isso significa que a probabilidade de uma variável aleatória normal estar compreendida entre dois desvios padrões em torno da média é sempre 95%!

5. Se $X \sim N(2; 9)$, encontre o valor de k tal que $\Pr(X < k) = 0,95$.

Solução

Aqui, estamos analisando um problema inverso: dada a probabilidade de um evento, queremos encontrar a abscissa correspondente. Nesse exemplo, podemos observar que a abscissa k tem que estar do lado direito da curva, ou seja, acima da média, uma vez que a probabilidade abaixo dela tem que ser maior do que 0,5.

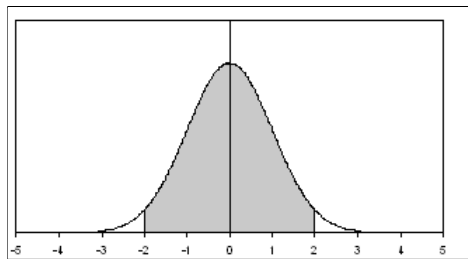


Figura 4.16: $X \sim N(\mu; \sigma^2) : \Pr(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = \Pr(-2 \leq Z \leq 2)$

Para resolver este problema, devemos, como antes, obter a probabilidade equivalente em termos da normal padrão (veja a **Figura 4.17**):

$$\begin{aligned} \Pr(X < k) &= 0,95 \iff \Pr\left(\frac{X-2}{3} < \frac{k-2}{3}\right) = 0,95 \iff \\ \Pr\left(Z < \frac{k-2}{3}\right) &= 0,95 \iff \Pr(Z < 0) + \Pr\left(0 \leq Z < \frac{k-2}{3}\right) = 0,95 \iff \\ 0,5 + \Pr\left(0 \leq Z < \frac{k-2}{3}\right) &= 0,95 \iff \Pr\left(0 \leq Z < \frac{k-2}{3}\right) = 0,45 \end{aligned}$$

Então, na Tabela 2, temos que procurar, no corpo da tabela, a abscissa que corresponde à área de 0,45. É fácil ver que essa abscissa é 1,64, ou seja:

$$\frac{k-2}{3} = 1,64 \implies k = 2 + 3 \times 1,64 = 6,92$$

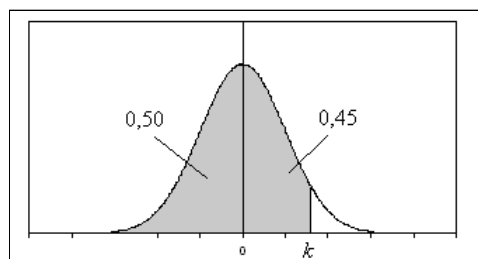


Figura 4.17: $X \sim N(2;9) : \Pr(X < k) = 0,95 \iff \Phi\left(\frac{k-2}{3}\right) = 0,95$

6. Se $X \sim N(2;9)$, encontre o valor de k tal que $\Pr(X < k) = 0,10$.

Solução

Como no exemplo anterior, dada a probabilidade de um evento, queremos encontrar a abscissa correspondente. Nesse exemplo, podemos observar que a abscissa k tem que estar do lado esquerdo da curva, ou seja, abaixo da média, uma vez que a probabilidade abaixo dela tem que ser menor do que 0,5.

Em termos da probabilidade equivalente da normal padrão :

$$\Pr(X < k) = 0,10 \iff \Pr\left(\frac{X-2}{3} < \frac{k-2}{3}\right) = 0,10 \iff \Pr\left(Z < \frac{k-2}{3}\right) = 0,10$$

Veja a **Figura 4.18**. Se abaixo da abscissa $\frac{k-2}{3}$ temos área de 0,10, pela simetria da curva, temos que ter área 0,10 acima da abscissa simétrica. Ou seja, acima de $-\frac{k-2}{3}$ temos área 0,10 e, portanto, a área entre 0 e $-\frac{k-2}{3}$ tem que ser 0,40.

$$\begin{aligned} \Pr\left(Z < \frac{k-2}{3}\right) &= 0,10 \iff \Pr\left(Z > -\frac{k-2}{3}\right) = 0,10 \iff \\ \Pr\left(0 \leq Z \leq -\frac{k-2}{3}\right) &= 0,40 \iff \Pr\left(0 \leq Z \leq -\frac{k-2}{3}\right) = 0,40 \iff \\ -\frac{k-2}{3} &= 1,28 \iff -k + 2 = 3,84 \iff k = -1,84 \end{aligned}$$

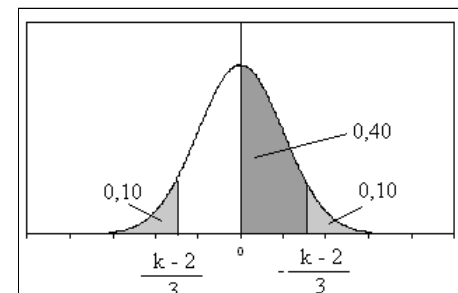


Figura 4.18: $X \sim N(2;9) : \Pr(X < k) = 0,10 \iff \Phi\left(\frac{k-2}{3}\right) = 0,10 \iff \Phi\left(-\frac{k-2}{3}\right) = 0,90$

4.4 Exemplo: qui-quadrado e normal

Seja $Z \sim N(0;1)$ e considere $Y = Z^2$. Para $y > 0$ temos

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr(Y \leq y) = \Pr(Z^2 \leq y) \\ &= \Pr(-\sqrt{y} \leq Z \leq \sqrt{y}) \\ &= F_Z(\sqrt{y}) - F_Z(-\sqrt{y}) \\ &= \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

e, portanto, usando a regra da cadeia, resulta que

$$\begin{aligned}
 f_Y(y) &= \frac{d}{dy} [\Phi(\sqrt{y})] - \frac{d}{dy} [\Phi(-\sqrt{y})] \\
 &= \Phi'(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} - \Phi'(-\sqrt{y}) \left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right) \\
 &= \varphi(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} + \varphi(-\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}\right) \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(-\sqrt{y})^2}{2}\right) \frac{1}{2\sqrt{y}} \\
 &= 2 \times \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y}{2}\right) \frac{1}{2\sqrt{y}} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{y}{2}\right) y^{-1/2} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}) 2^{1/2}} y^{1/2-1} e^{-y/2}
 \end{aligned}$$

Comparando com a densidade qui-quadrado dada em (2.21)

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2}) 2^{n/2}} x^{n/2-1} e^{-x/2} \quad \text{se } x > 0$$

vemos que $f_Y(y)$ é uma qui-quadrado com 1 grau de liberdade, ou seja, se $Z \sim N(0; 1)$, então $Z^2 \sim \chi_1^2$. Este resultado se generaliza da seguinte forma: se $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ são variáveis aleatórias independentes, todas com distribuição normal padrão, então $Y = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_n^2$ tem distribuição qui-quadrado com n graus de liberdade. Dessa definição fica mais claro o conceito de graus de liberdade: é o número de parcelas independentes em uma soma de variáveis aleatórias.

Já foi visto que, se $X \sim \chi_n^2$, então $E(X) = n$ e $Var(X) = 2n$. Na **Figura 4.19** são apresentados os gráficos para $n = 1, 2, 6$. Para $n > 2$, o gráfico tem sempre forma semelhante ao último gráfico desta figura.

4.4.1 Tabela da qui-quadrado

Ao contrário da distribuição normal, não existe relação entre as diferentes distribuições qui-quadrado. Assim, para o cálculo de probabilidades desta distribuição seria necessária uma tabela para cada valor de n ou o uso de programas computacionais. Nos livros didáticos é comum apresentar uma tabela da distribuição qui-quadrado que envolve os valores críticos, ou seja, valores que deixam determinada probabilidade acima deles. Mais precisamente, o valor crítico da χ_n^2 associado à probabilidade α é o valor $\chi_{n;\alpha}^2$ tal que

$$\Pr(\chi_n^2 > \chi_{n;\alpha}^2) = \alpha$$

Veja a **Figura 4.20**.

Ao final desta apostila apresentamos a Tabela 3, que fornece os valores críticos da distribuição qui-quadrado. Nas linhas da tabela temos os graus de liberdade e nas colunas, a área α na cauda superior. O corpo da tabela fornece o valor crítico $\chi_{n;\alpha}^2$.

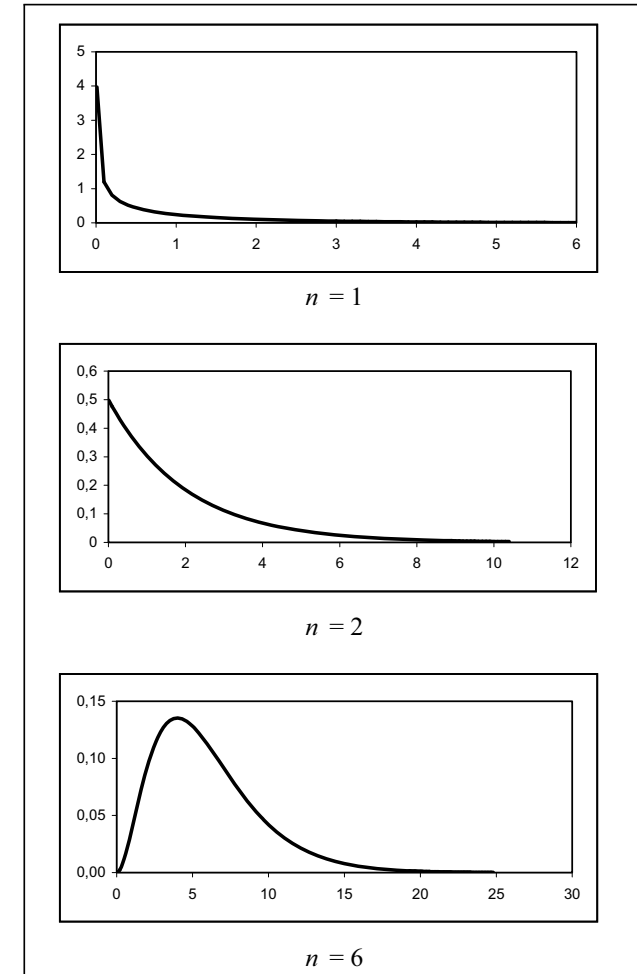


Figura 4.19: Distribuição qui-quadrado

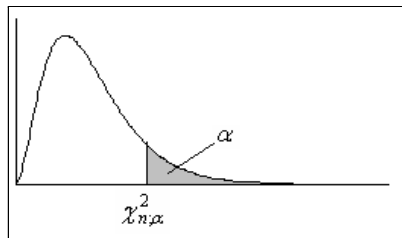


Figura 4.20: Valor crítico da qui-quadrado

4.4.2 Exemplos

1. Na distribuição χ^2_{15} , encontre a abscissa k tal que $\Pr(\chi^2_{15} > k) = 0,05$.

Solução

Temos que considerar a linha correspondente a 15 graus de liberdade e a coluna correspondente a $\alpha = 0,05$, o que nos dá $k = 24,996$

2. Na distribuição χ^2_{23} , encontre a abscissa k tal que $\Pr(\chi^2_{23} < k) = 0,10$.

Solução

1. O problema dá a cauda inferior. Temos que

$$\Pr(\chi^2(23) < k) = 0,10 \iff \Pr(\chi^2(23) \geq k) = 0,90$$

Temos que considerar a linha correspondente a 23 graus de liberdade e a coluna correspondente a $\alpha = 0,90$, o que nos dá $k = 14,848$.

4.5 A distribuição log-normal

4.5.1 Definição

Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Se definimos uma nova variável aleatória $Y = e^X$ então diz-se que Y tem distribuição log-normal com parâmetros μ e σ^2 . Reciprocamente, se Y tem distribuição log-normal, então $X = \ln Y$ tem distribuição $N(\mu, \sigma^2)$.

Vamos calcular a função de densidade de probabilidade de uma variável aleatória log-normal a partir de sua função de distribuição acumulada. Note que Y só pode assumir valores positivos. Temos que:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr(Y \leq y) = \Pr(e^X \leq y) = \Pr(X \leq \ln y) = \\ &= \Pr\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right) = \Pr\left(Z \leq \frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right) \quad y > 0 \end{aligned}$$

Sabemos que $f_Y(y) = F'_Y(y)$ e, também, no caso da normal padrão, $\Phi'(z) = \varphi(z)$. Logo, pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \Phi'\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right) \times \frac{1}{\sigma y} = \varphi\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right) \times \frac{1}{\sigma y} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right)^2\right] \times \frac{1}{\sigma y} \end{aligned}$$

ou ainda:

$$f_Y(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad y > 0$$

4.5.2 Esperança

A esperança de Y é:

$$E(Y) = \int_0^\infty y \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right)^2\right] dy$$

Fazendo a mudança de variável

- $t = \ln y$
temos que
- $y = 0 \Rightarrow t = -\infty$
- $y = \infty \Rightarrow t = \infty$
- $dt = \frac{1}{y} dy$
- $y = e^t$

e, portanto

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^t \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma} \right)^2 \right] dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma} \right)^2 + t \right] dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{t^2 - 2t\mu + \mu^2 - 2\sigma^2 t}{2\sigma^2} \right] dt = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{t^2 - 2t(\mu + \sigma^2) + \mu^2}{2\sigma^2} \right] dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{t^2 - 2t(\mu + \sigma^2)}{2\sigma^2} \right] \exp \left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right) dt = \\
 &= \exp \left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{t^2 - 2t(\mu + \sigma^2) + (\mu + \sigma^2)^2 - (\mu + \sigma^2)^2}{2\sigma^2} \right] dt \\
 &= \exp \left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{[t - (\mu + \sigma^2)]^2}{2\sigma^2} \right\} \exp \left(\frac{(\mu + \sigma^2)^2}{2\sigma^2} \right) dt \\
 &= \exp \left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \frac{(\mu + \sigma^2)^2}{2\sigma^2} \right) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{[t - (\mu + \sigma^2)]^2}{2\sigma^2} \right\} dt \right]
 \end{aligned}$$

Mas o termo entre os colchetes externos é a integral de uma densidade normal com média $\lambda = (\mu + \sigma^2)$ e variância σ^2 ; logo, essa integral é 1 e, portanto:

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \exp \left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \frac{(\mu + \sigma^2)^2}{2\sigma^2} \right) = \exp \left(\frac{-\mu^2 + \mu^2 + 2\mu\sigma^2 + \sigma^4}{2\sigma^2} \right) \Rightarrow \\
 E(Y) &= \exp \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

4.5.3 Variância

Vamos calcular de modo análogo $E(Y^2)$, usando a mesma transformação:

$$\begin{aligned}
 E(Y^2) &= \int_0^{\infty} y^2 \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2t} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma} \right)^2 \right] dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma} \right)^2 + 2t \right] dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{t^2 - 2t\mu + \mu^2 - 4\sigma^2 t}{2\sigma^2} \right] dt = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{t^2 - 2t(\mu + 2\sigma^2) + \mu^2}{2\sigma^2} \right] dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{t^2 - 2t(\mu + 2\sigma^2)}{2\sigma^2} \right] \exp \left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right) dt = \\
 &= \exp \left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{t^2 - 2t(\mu + 2\sigma^2) + (\mu + 2\sigma^2)^2 - (\mu + 2\sigma^2)^2}{2\sigma^2} \right] dt \\
 &= \exp \left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{[t - (\mu + 2\sigma^2)]^2}{2\sigma^2} \right\} \exp \left(\frac{(\mu + 2\sigma^2)^2}{2\sigma^2} \right) dt \\
 &= \exp \left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \frac{(\mu + 2\sigma^2)^2}{2\sigma^2} \right) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{[t - (\mu + 2\sigma^2)]^2}{2\sigma^2} \right\} dt \right]
 \end{aligned}$$

Como antes, o termo entre os colchetes externos é 1 porque é a integral de uma densidade normal com média $\mu + 2\sigma^2$ e variância σ^2 . Logo,

$$\begin{aligned}
 E(Y^2) &= \exp \left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \frac{(\mu + 2\sigma^2)^2}{2\sigma^2} \right) = \exp \left(\frac{-\mu^2 + \mu^2 + 4\mu\sigma^2 + 4\sigma^4}{2\sigma^2} \right) \Rightarrow \\
 E(Y^2) &= \exp (2\mu + 2\sigma^2)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(Y) &= \exp (2\mu + 2\sigma^2) - \left[\exp \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2 = \\
 &= \exp (2\mu + 2\sigma^2) - \exp \left[2 \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] = \\
 &= \exp (2\mu + 2\sigma^2) - \exp (2\mu + \sigma^2) \\
 &= \exp (2\mu + \sigma^2) \left[\frac{\exp (2\mu + 2\sigma^2)}{\exp (2\mu + \sigma^2)} - 1 \right] = \\
 &= \exp (2\mu + \sigma^2) [\exp (2\mu + 2\sigma^2 - 2\mu - \sigma^2) - 1] = \\
 &= \exp (2\mu + \sigma^2) [\exp \sigma^2 - 1]
 \end{aligned}$$

Definindo $m = E(X) = \exp 10) \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right)$, temos que $m^2 = \exp (2\mu + \sigma^2)$. Logo,

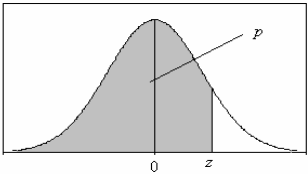
$$\text{Var}(Y) = m^2 [e^{\sigma^2} - 1] \quad (4.24)$$

4.6 Exercícios propostos

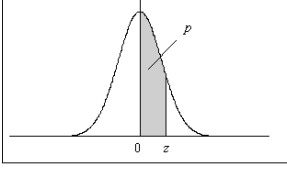
- Na distribuição normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, encontre:
 - $\Pr(X \leq \mu + 2\sigma)$ (Resp.: 0,97725)
 - $\Pr(|X - \mu| \leq \sigma)$ (Resp.: 0,68268)
 - $\Pr(|X - \mu| \leq 1,96\sigma)$ (Resp.: 0,95)
 - o número k tal que $\Pr(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) = 0,99$ (Resp.: 2,58)
 - o número k tal que $\Pr(X > k) = 0,90$. (Resp.: $\mu - 1,28\sigma$)
- Suponha que os tempos de vida de 2 marcas de aparelhos elétricos sejam variáveis aleatórias D_1 e D_2 , onde $D_1 \sim N(42, 36)$ e $D_2 \sim N(45, 9)$. Se o aparelho deve ser usado por um período de 45 horas, qual marca deve ser preferida? E se for por um período de 49 horas? (Resp.: 2;1)
- Numa distribuição normal, 31% dos elementos são menores que 45 e 8% são maiores que 64. Calcular os parâmetros que definem a distribuição. (Resp.: $\mu = 50; \sigma \approx$)
- As vendas de um determinado produto têm distribuição aproximadamente normal com média de 500 unidades e desvio padrão de 50 unidades. Se a empresa decide fabricar 600 unidades no mês em estudo, qual a probabilidade de que não possa atender a todos os pedidos desse mês, por estar com a produção esgotada? (Resp.: 0,0228)
- Um produto alimentício é ensacado automaticamente, sendo o peso médio de 50 kg por saco, com desvio padrão de 1,6 kg. Os clientes exigem que, para cada saco fornecido com menos de 48 kg, o fornecedor pague uma indenização de 5 u.m..
 - Para 200 sacos fornecidos, qual o custo médio com indenização? (Resp.: 105,6 u.m)
 - Para que o custo calculado no item anterior caia para 50 u.m., qual deveria ser a nova regulagem média da máquina? (Resp.: 50,624)
 - Como o fornecedor acha que, no custo global, é desvantajoso aumentar a regulagem da máquina, ele quer comprar uma nova máquina. Qual deveria ser o desvio padrão dessa máquina para que, trabalhando com peso médio de 50 kg, em apenas 3% dos sacos se pague indenização? (Resp.: 1,064)
- Um teste de aptidão para o exercício de uma certa profissão exige uma sequência de operações a serem executadas rapidamente uma após a outra. Para passar no teste, o candidato deve completá-lo em, no máximo, 80 minutos. Admita que o tempo, em minutos, para completar a prova seja uma variável aleatória normal com média 90 minutos e desvio padrão 20 minutos.
 - Que porcentagem dos candidatos tem chance de ser aprovada? (Resp.: 30,85)
 - Os 5% melhores receberão um certificado especial. Qual o tempo máximo para fazer jus a tal certificado? (Resp.: 57,2 min)

- O diâmetro X de rolamentos de esfera fabricados por certa fábrica tem distribuição normal com média 0,6140 e desvio padrão 0,0025. O lucro T de cada esfera depende do seu diâmetro e
 - $T = 0,10$ se a esfera é boa, isto é, $0,6100 < X < 0,6180$
 - $T = 0,05$ se a esfera é recuperável, isto é, $0,6080 < X < 0,6100$ ou $0,6180 < X < 0,6200$
 - $T = -0,10$ se a esfera é defeituosa, isto é, $X < 0,6080$ ou $X > 0,6200$

Calcule as probabilidades de as esferas serem boas, recuperáveis e defeituosas e o lucro médio. (Resp.: 0,8904; 0,0932; 0,0164; 0,09206)
- Uma empresa produz televisores e garante a restituição da quantia paga se qualquer televisor apresentar algum defeito grave no prazo de 6 meses. Ela produz televisores do tipo A comum e do tipo B de luxo, com um lucro respectivo de 1000 u.m. e 2000 u.m. caso não haja restituição, e com prejuízo de 3000 u.m. e 8000 u.m., se houver restituição. Suponha que o tempo para ocorrência de algum defeito grave seja, em ambos os casos, uma variável aleatória com distribuição normal com médias 9 meses e 12 meses e desvios padrões 2 meses e 3 meses. Se tivesse que planejar uma estratégia de marketing para a empresa, você incentivaria as vendas dos aparelhos tipo A ou tipo B? (Resp.: $E(L_A) = 732,8$; $E(L_B) = 1772$)
- A distribuição dos pesos de coelhos criados em uma granja pode ser representada por uma distribuição normal com média de 5 kg e desvio padrão de 0,8 kg. Um abatedouro comprará 5000 coelhos e pretende classificá-los de acordo com o peso da seguinte forma: 20% dos leves como pequenos, os 55% seguintes como médios, os 15% seguintes como grandes e os 10% mais pesados como extras. Quais os limites de peso para cada classificação? (Resp.: 4,328; 5,536; 6,024)
- Considere uma variável aleatória $X \sim N(3, 25)$:
 - Calcule $\Pr(-3 \leq X \leq 3)$ (Resp.: 0,38493)
 - Calcule $\Pr(-2 \leq X \leq 8)$ (Resp.: 0,68268)
 - Encontre o valor de k tal que $\Pr(X > k) = 0,05$. (Resp.: $k = 11,2$)
 - Encontre o valor de k tal que $\Pr(X > k) = 0,80$. (Resp.: $k = -1,2$)
- Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Encontre a mediana e o intervalo interquartil de X . (Resp.: $Q_2 = \mu$; $IQ = 1,34\sigma$)
- O 90^a percentil de uma variável aleatória $N(\mu, \sigma^2)$ é 50, enquanto o 15^a percentil é 25. Encontre os valores dos parâmetros da distribuição. (Resp.: $\mu = 36,35$; $\sigma = 10,92$)
- Uma enchedora automática enche garrafas de acordo com uma distribuição normal de média 1000 ml. Deseja-se que no máximo 1 garrafa em 100 saia com menos de 990ml. Qual deve ser o maior desvio padrão tolerável? (Resp.: 4,2918)

Tabela 1 Tabela da Distribuição Acumulada da Normal Padrão										
Valores de p $p = \Phi(z) = \Pr(Z \leq z)$										
										
Casa inteira e 1ª. Decimal	2ª decimal									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

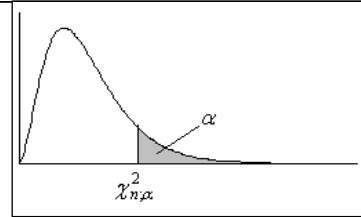
Para abscissas maiores que 4,09, use a probabilidade 1,00000

Tabela 2 Distribuição normal padrão										
Valores de p $p = \Pr(0 \leq Z \leq z)$										
										
Casa inteira e 1ª. Decimal	2ª decimal									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	0,00399	0,00798	0,01197	0,01595	0,01994	0,02392	0,02790	0,03188	0,03586
0,1	0,03983	0,04380	0,04776	0,05172	0,05567	0,05962	0,06356	0,06749	0,07142	0,07535
0,2	0,07926	0,08317	0,08706	0,09095	0,09483	0,09871	0,10257	0,10642	0,11026	0,11409
0,3	0,11791	0,12172	0,12552	0,12930	0,13307	0,13683	0,14058	0,14431	0,14803	0,15173
0,4	0,15542	0,15910	0,16276	0,16640	0,17003	0,17364	0,17724	0,18082	0,18439	0,18793
0,5	0,19146	0,19497	0,19847	0,20194	0,20540	0,20884	0,21226	0,21566	0,21904	0,22240
0,6	0,22575	0,22907	0,23237	0,23565	0,23891	0,24215	0,24537	0,24857	0,25175	0,25490
0,7	0,25804	0,26115	0,26424	0,26730	0,27035	0,27337	0,27637	0,27935	0,28230	0,28524
0,8	0,28814	0,29103	0,29389	0,29673	0,29955	0,30234	0,30511	0,30785	0,31057	0,31327
0,9	0,31594	0,31859	0,32121	0,32381	0,32639	0,32894	0,33147	0,33398	0,33646	0,33891
1,0	0,34134	0,34375	0,34614	0,34849	0,35083	0,35314	0,35543	0,35769	0,35993	0,36214
1,1	0,36433	0,36650	0,36864	0,37076	0,37286	0,37493	0,37698	0,37900	0,38100	0,38298
1,2	0,38493	0,38686	0,38877	0,39065	0,39251	0,39435	0,39617	0,39796	0,39973	0,40147
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	0,41309	0,41466	0,41621	0,41774
1,4	0,41924	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0,42785	0,42922	0,43056	0,43189
1,5	0,43319	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44295	0,44408
1,6	0,44520	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449
1,7	0,45543	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327
1,8	0,46407	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46926	0,46995	0,47062
1,9	0,47128	0,47193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670
2,0	0,47725	0,47778	0,47831	0,47882	0,47932	0,47982	0,48030	0,48077	0,48124	0,48169
2,1	0,48214	0,48257	0,48300	0,48341	0,48382	0,48422	0,48461	0,48500	0,48537	0,48574
2,2	0,48610	0,48645	0,48679	0,48713	0,48745	0,48778	0,48809	0,48840	0,48870	0,48899
2,3	0,48928	0,48956	0,48983	0,49010	0,49036	0,49061	0,49086	0,49111	0,49134	0,49158
2,4	0,49180	0,49202	0,49224	0,49245	0,49266	0,49286	0,49305	0,49324	0,49343	0,49361
2,5	0,49379	0,49396	0,49413	0,49430	0,49446	0,49461	0,49477	0,49492	0,49506	0,49520
2,6	0,49534	0,49547	0,49560	0,49573	0,49585	0,49598	0,49609	0,49621	0,49632	0,49643
2,7	0,49653	0,49664	0,49674	0,49683	0,49693	0,49702	0,49711	0,49720	0,49728	0,49736
2,8	0,49744	0,49752	0,49760	0,49767	0,49774	0,49781	0,49788	0,49795	0,49801	0,49807
2,9	0,49813	0,49819	0,49825	0,49831	0,49836	0,49841	0,49846	0,49851	0,49856	0,49861
3,0	0,49865	0,49869	0,49874	0,49878	0,49882	0,49886	0,49889	0,49893	0,49896	0,49900
3,1	0,49903	0,49906	0,49910	0,49913	0,49916	0,49918	0,49921	0,49924	0,49926	0,49929
3,2	0,49931	0,49934	0,49936	0,49938	0,49940	0,49942	0,49944	0,49946	0,49948	0,49950
3,3	0,49952	0,49953	0,49955	0,49957	0,49958	0,49960	0,49961	0,49962	0,49964	0,49965
3,4	0,49966	0,49968	0,49969	0,49970	0,49971	0,49972	0,49973	0,49974	0,49975	0,49976
3,5	0,49977	0,49978	0,49978	0,49979	0,49980	0,49981	0,49981	0,49982	0,49983	0,49983
3,6	0,49984	0,49985	0,49985	0,49986	0,49986	0,49987	0,49987	0,49988	0,49988	0,49989
3,7	0,49989	0,49990	0,49990	0,49990	0,49991	0,49991	0,49992	0,49992	0,49992	0,49992
3,8	0,49993	0,49993	0,49993	0,49994	0,49994	0,49994	0,49994	0,49995	0,49995	0,49995
3,9	0,49995	0,49995	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49997	0,49997
4,0	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998

Para abscissas maiores que

Tabela 3
Tabela da Qui-Quadrado
 Valores críticos tais que

$$\Pr(\chi_n^2 \geq \chi_{n;\alpha}^2) = \alpha$$



g.l. n	$\alpha =$											
	0,990	0,980	0,975	0,950	0,900	0,800	0,200	0,100	0,050	0,025	0,020	0,010
1	0,000	0,001	0,001	0,004	0,016	0,064	1,642	2,706	3,841	5,024	5,412	6,635
2	0,020	0,040	0,051	0,103	0,211	0,446	3,219	4,605	5,991	7,378	7,824	9,210
3	0,115	0,185	0,216	0,352	0,584	1,005	4,642	6,251	7,815	9,348	9,837	11,345
4	0,297	0,429	0,484	0,711	1,064	1,649	5,989	7,779	9,488	11,143	11,668	13,277
5	0,554	0,752	0,831	1,145	1,610	2,343	7,289	9,236	11,070	12,833	13,388	15,086
6	0,872	1,134	1,237	1,635	2,204	3,070	8,558	10,645	12,592	14,449	15,033	16,812
7	1,239	1,564	1,690	2,167	2,833	3,822	9,803	12,017	14,067	16,013	16,622	18,475
8	1,646	2,032	2,180	2,733	3,490	4,594	11,030	13,362	15,507	17,535	18,168	20,090
9	2,088	2,532	2,700	3,325	4,168	5,380	12,242	14,684	16,919	19,023	19,679	21,666
10	2,558	3,059	3,247	3,940	4,865	6,179	13,442	15,987	18,307	20,483	21,161	23,209
11	3,053	3,609	3,816	4,575	5,578	6,989	14,631	17,275	19,675	21,920	22,618	24,725
12	3,571	4,178	4,404	5,226	6,304	7,807	15,812	18,549	21,026	23,337	24,054	26,217
13	4,107	4,765	5,009	5,892	7,042	8,634	16,985	19,812	22,362	24,736	25,472	27,688
14	4,660	5,368	5,629	6,571	7,790	9,467	18,151	21,064	23,685	26,119	26,873	29,141
15	5,229	5,985	6,262	7,261	8,547	10,307	19,311	22,307	24,996	27,488	28,259	30,578
16	5,812	6,614	6,908	7,962	9,312	11,152	20,465	23,542	26,296	28,845	29,633	32,000
17	6,408	7,255	7,564	8,672	10,085	12,002	21,615	24,769	27,587	30,191	30,995	33,409
18	7,015	7,906	8,231	9,390	10,865	12,857	22,760	25,989	28,869	31,526	32,346	34,805
19	7,633	8,567	8,907	10,117	11,651	13,716	23,900	27,204	30,144	32,852	33,687	36,191
20	8,260	9,237	9,591	10,851	12,443	14,578	25,038	28,412	31,410	34,170	35,020	37,566
21	8,897	9,915	10,283	11,591	13,240	15,445	26,171	29,615	32,671	35,479	36,343	38,932
22	9,542	10,600	10,982	12,338	14,041	16,314	27,301	30,813	33,924	36,781	37,659	40,289
23	10,196	11,293	11,689	13,091	14,848	17,187	28,429	32,007	35,172	38,076	38,968	41,638
24	10,856	11,992	12,401	13,848	15,659	18,062	29,553	33,196	36,415	39,364	40,270	42,980
25	11,524	12,697	13,120	14,611	16,473	18,940	30,675	34,382	37,652	40,646	41,566	44,314
26	12,198	13,409	13,844	15,379	17,292	19,820	31,795	35,563	38,885	41,923	42,856	45,642
27	12,879	14,125	14,573	16,151	18,114	20,703	32,912	36,741	40,113	43,195	44,140	46,963
28	13,565	14,847	15,308	16,928	18,939	21,588	34,027	37,916	41,337	44,461	45,419	48,278
29	14,256	15,574	16,047	17,708	19,768	22,475	35,139	39,087	42,557	45,722	46,693	49,588
30	14,953	16,306	16,791	18,493	20,599	23,364	36,250	40,256	43,773	46,979	47,962	50,892