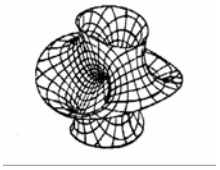
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
CENTRO DE ESTUDOS GERAIS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA



DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

Ana Maria Lima de Farias
Luiz da Costa Laurencel

Agosto de 2008

.

Conteúdo

1 Variáveis aleatórias discretas unidimensionais **1**

1.1 Introdução . . . 1
1.2 Variáveis aleatórias . . . 1
1.2.1 Exercícios resolvidos . . . 2
1.3 Função de distribuição de probabilidade . . . 4
1.3.1 Cálculo da função de distribuição de probabilidade . . . 5
1.3.2 Representação gráfica da função de distribuição de probabilidade . . . 6
1.3.3 Exercícios resolvidos . . . 9
1.4 Função de distribuição acumulada de uma variável aleatória discreta . . . 15
1.4.1 Exercícios resolvidos . . . 18
1.5 Funções de variáveis aleatórias . . . 19
1.5.1 Exercícios resolvidos . . . 20
1.6 Esperança e variância de variáveis aleatórias discretas . . . 21
1.6.1 Probabilidade e freqüência relativa . . . 21
1.6.2 Esperança ou média de uma variável aleatória discreta . . . 22
1.6.3 Esperança de funções de variáveis aleatórias . . . 23
1.6.4 Propriedades da esperança . . . 24
1.6.5 Variância de uma variável aleatória . . . 25
1.6.6 Propriedades da variância . . . 26
1.6.7 Desvio padrão . . . 27
1.6.8 Exercícios resolvidos . . . 28
1.7 Exercícios propostos do capítulo 1 . . . 29

2 Algumas distribuições discretas **33**

2.1 Introdução . . . 33
2.2 Distribuição de Bernoulli . . . 34
2.2.1 Definição . . . 34
2.2.2 Esperança . . . 35
2.2.3 Variância . . . 35
2.3 Distribuição Geométrica . . . 35
2.3.1 Definição . . . 35
2.3.2 Esperança . . . 36
2.3.3 Variância . . . 37
2.3.4 Exercícios resolvidos . . . 38
2.4 Distribuição binomial negativa . . . 38

2.4.1 Definição . . . 38
2.4.2 Esperança . . . 40
2.4.3 Variância . . . 41
2.4.4 Exercícios resolvidos . . . 43
2.5 Distribuição Binomial . . . 43
2.5.1 Definição . . . 43
2.5.2 **Esperança** . . . 45
2.5.3 Variância . . . 45
2.5.4 Exercícios resolvidos . . . 46
2.6 Distribuição hipergeométrica . . . 47
2.6.1 Definição . . . 47
2.6.2 Esperança . . . 51
2.6.3 Variância . . . 52
2.6.4 Distribuição binomial versus distribuição hipergeométrica . . . 53
2.6.5 Exercícios resolvidos . . . 54
2.7 A distribuição de Poisson . . . 54
2.7.1 Aproximação da binomial pela Poisson . . . 54
2.7.2 A distribuição de Poisson . . . 57
2.7.3 Exercícios resolvidos . . . 57
2.8 Alguns resultados de cálculo . . . 58
2.8.1 Séries geométricas . . . 58
2.8.2 O número e (base dos logaritmos naturais) . . . 60
2.9 Exercícios propostos do capítulo 2 . . . 61

3 Solução dos exercícios propostos **64**
3.1 Capítulo 1 . . . 64
3.2 Capítulo 2 . . . 73

Capítulo 1

Variáveis aleatórias discretas unidimensionais

1.1 Introdução

Muitos experimentos aleatórios fornecem resultados numéricos, como no caso do lançamento de um dado. Por outro lado, outros experimentos podem fornecer resultados não numéricos, embora possamos associar números aos resultados possíveis. No lançamento de uma moeda, por exemplo, podemos associar o número 1 à ocorrência de cara e o número 2 à ocorrência de coroa. Ao trabalhar com esses números, estaremos sempre interessados em associar probabilidades a eles. Isso será feito através das *variáveis aleatórias*, que serão o objeto de estudo neste capítulo.

1.2 Variáveis aleatórias

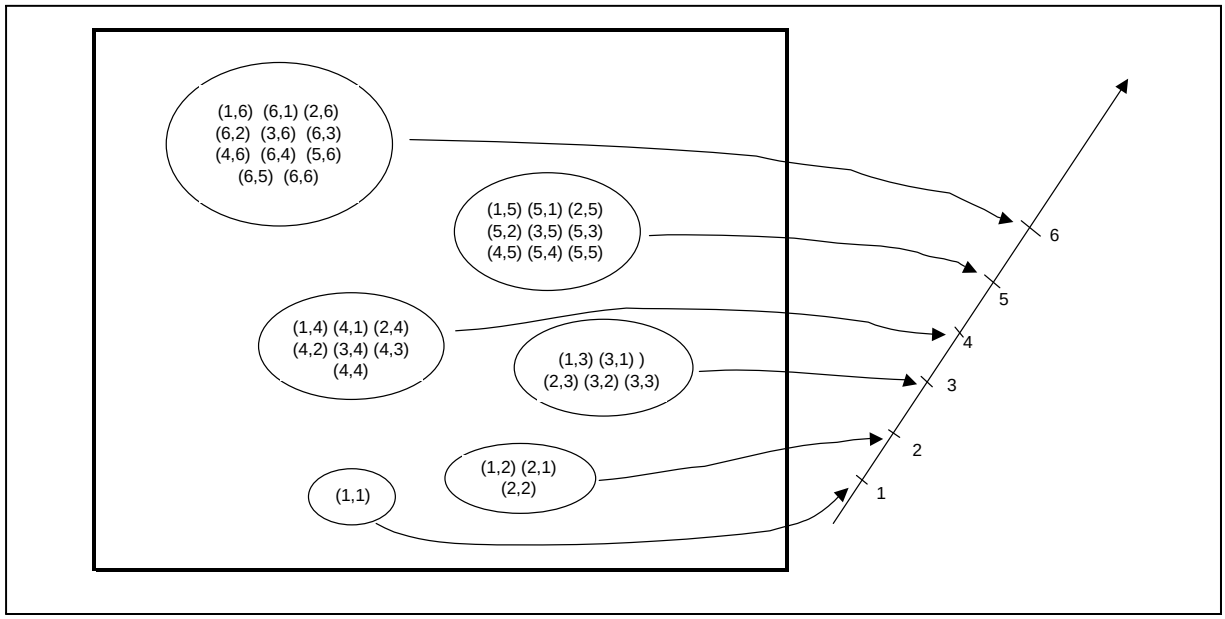
Consideremos o lançamento de dois dados equilibrados. Como já visto, o espaço amostral desse experimento é formado pelos pares ordenados (i, j) onde $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Esse é um experimento onde o espaço amostral não é formado por números. Suponhamos que nosso interesse esteja no máximo das faces dos dois dados. Nesse caso, podemos associar um número a cada ponto do espaço amostral, conforme ilustrado na figura 1.1.

Esse exemplo ilustra o conceito de variável aleatória.

Definição 1.1 *Uma variável aleatória é uma função real (isto é, que assume valores em* $\mathbb{R}$*) definida no espaço amostral* Ω *de um experimento aleatório.*

Por essa definição, podemos ver que, no lançamento de uma moeda, observar o resultado obtido, cara ou coroa, não é uma variável aleatória, pois os resultados não são números. Mas se associarmos o número 0 à ocorrência de cara e o número 1 à ocorrência de coroa, teremos uma variável aleatória. Analogamente, em uma pesquisa domiciliar, o espaço amostral é formado pelos domicílios de uma determinada localidade e simplesmente anotarmos os domicílios sorteados para uma amostra não constitui uma variável aleatória. Mas, na prática, quando da realização de uma pesquisa domiciliar, estamos interessados em alguma característica desse domicílio e aí poderemos ter várias variáveis aleatórias associadas a esse experimento, como, por exemplo, a renda domiciliar mensal em reais,

Figura 1.1: Variável aleatória: máximo de 2 dados



o número de moradores, o grau de instrução do chefe de família medido pelo número de anos de estudo, etc.

No exemplo anterior, podemos distinguir dois grupos de variáveis aleatórias. O número de moradores e o grau de instrução são variáveis que podem assumir valores inteiros; já a variável renda pode tomar qualquer valor em um determinado intervalo (digamos, por exemplo, de 0 a 500.000). Isso nos leva à seguinte definição.

Definição 1.2 *Uma variável aleatória é discreta se sua imagem (ou conjunto de valores que ela pode tomar) é um conjunto finito ou enumerável. Se a imagem é um conjunto não enumerável dizemos que a variável aleatória é contínua.*

Neste capítulo estaremos concentrados no estudo das variáveis aleatórias discretas e estudaremos vários conceitos relacionados a elas. Para facilitar a elaboração do texto, muitas vezes usaremos a abreviação v.a. para denotar variável aleatória.

1.2.1 Exercícios resolvidos

1. Dentre os 5 alunos de um curso com coeficiente de rendimento (CR) superior 8,5, dois serão sorteados para receber uma bolsa de estudos. Os CRs desses alunos são: 8,8; 9,2; 8,9; 9,5; 9,0.

   (a) Designando por A, B, C, D e E os alunos, defina um espaço amostral para esse experimento.

   (b) Seja X = CR médio dos alunos sorteados. Liste os possíveis valores de X.

(c) Liste o evento $X \geq 9,0$.

Solução:

(a) Note que aqui a ordem não importa; logo, $\#\Omega = \binom{5}{2} = 10$. Mais especificamente, $\Omega = \{(A,B),(A,C),(A,D),(A,E),(B,C),(B,D),(B,E),(C,D),(C,E),(D,E)\}$

(b) Usando uma tabela de duas entradas podemos representar os valores de X da seguinte forma:

	A (8,8)	B (9,2)	C (8,9)	D (9,5)	E (9,0)
A (8,8)		9,0	8,85	9,15	8,90
B (9,2)			9,05	9,35	9,10
C (8,9)				9,20	8,95
D (9,5)					9,25
E (9,0)					

(c) $\{X \geq 9\} = \{(A,B),(A,D),(B,C),(B,D),(B,E),(C,D),(D,E)\}$.

2. Um homem possui 4 chaves em seu bolso. Como está escuro, ele não consegue ver qual a chave correta para abrir a porta de sua casa. Ele testa cada uma das chaves até encontrar a correta.

(a) Defina um espaço amostral para esse experimento.

(b) Defina a v.a. X = número de chaves experimentadas até conseguir abrir a porta (inclusive a chave correta). Quais são os valores de X?

Solução:

(a) Vamos designar por C a chave da porta e por E_1, E_2 e E_3 as outras chaves. Se ele para de testar as chaves depois que acha a chave correta, então o espaço amostral é:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} C, E_1C, E_2C, E_3C, E_1E_2C, E_2E_1C, E_1E_3C, E_3E_1C, E_2E_3C, E_3E_2C, \\ E_1E_2E_3C, E_1E_3E_2C, E_2E_1E_3C, E_2E_3E_1C, E_3E_1E_2C, E_3E_2E_1C \end{array} \right\}$$

(b) $X = 1,2,3,4$

3. Cinco cartas são extraídas de um baralho comum (52 cartas, 13 de cada naipe) sem reposição. Defina a v.a. X = número de cartas vermelhas sorteadas. Quais são os possíveis valores de X?

Solução:

No baralho há 26 cartas vermelhas, 13 de ouros e 13 de copas. Logo, os possíveis valores de X são 0,1,2,3,4,5.

4. Numa urna há 7 bolas brancas e 4 bolas verdes. Cinco bolas são extraídas dessa urna. Defina a v.a. X = número de bolas verdes. Quais são os possíveis valores de X se as extrações são feitas

(a) sem reposição;

(b) com reposição.

Solução:

(a) Como há apenas 4 verdes, os valores de X são $0, 1, 2, 3, 4$. Note que temos bolas brancas em quantidade suficiente para que $X = 0$ (isto é, podemos tirar todas brancas).

(b) Se as extrações são feitas com reposição, em cada extração podemos tirar bola branca. Logo, os possíveis valores de X são $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

5. Repita o problema anterior, supondo que a urna tem 4 bolas de cada cor.

Solução:

(a) Nesse caso, temos que ter pelo menos uma bola de cada cor. Logo, os possíveis valores de X são $1, 2, 3, 4$.

(b) Como antes, os valores de X são $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

1.3 Função de distribuição de probabilidade

Os valores de uma v.a. discreta são definidos a partir do espaço amostral de um experimento aleatório. Sendo assim, é natural perguntarmos "qual é a probabilidade do valor x"? No exemplo do máximo das 2 faces de um dado da figura 1.1, por exemplo, o valor 6 da v.a. é imagem de 11 pontos do espaço amostral, enquanto o valor 2 é imagem de apenas 3 pontos. Sendo assim, é de se esperar que o valor 6 seja mais provável que o valor 2. Na verdade, temos a seguinte equivalência de eventos: se chamamos de X a v.a. "máximo dos 2 dados", então

$$\{X = 6\} \equiv \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6), (1,6), ((2,6), ((3,6), ((4,6), ((5,6)\}$$

e, assim

$$\Pr(\{X = 6\}) = \Pr\{(6,1) \cup (6,2) \cup (6,3) \cup (6,4) \cup (6,5) \cup (6,6) \cup (1,6) \cup ((2,6) \cup ((3,6) \cup (4,6) \cup (5,6)\}$$

Como os eventos no lado direito da expressão acima são mutuamente exclusivos e igualmente prováveis, resulta que

$$\Pr(\{X = 6\}) = 11 \times \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

De maneira análoga obtemos que

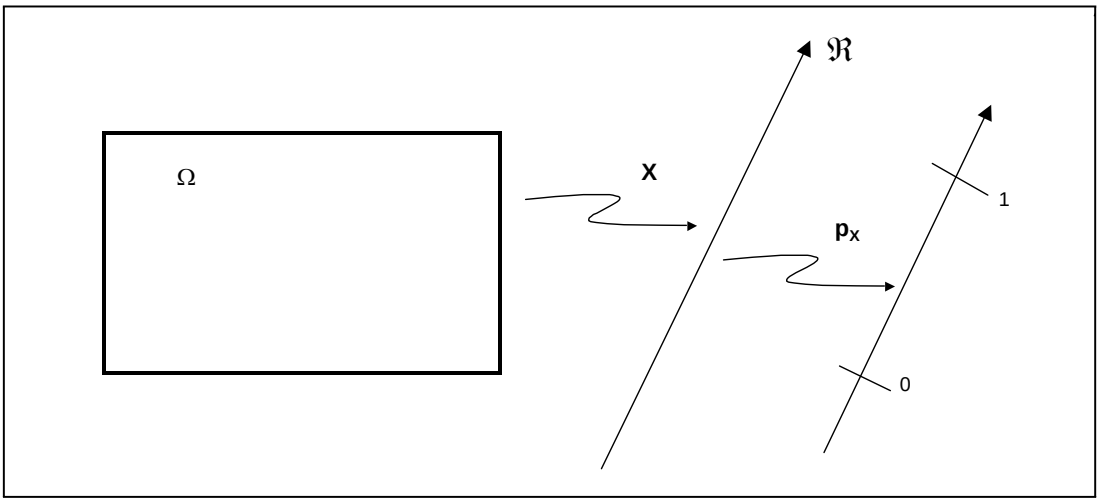
$$\begin{aligned} \Pr(\{X = 1\}) &= \frac{1}{36} \qquad \Pr(\{X = 2\}) = \frac{3}{36} \qquad \Pr(\{X = 3\}) = \frac{5}{36} \\ \Pr(\{X = 4\}) &= \frac{7}{36} \qquad \Pr(\{X = 5\}) = \frac{9}{36} \qquad \Pr(\{X = 6\}) = \frac{11}{36} \end{aligned}$$

Esse exemplo ilustra o seguinte conceito:

Definição 1.3 *Seja X uma v.a. discreta. A função de distribuição de probabilidades de X é a função $p_X(x)$ que associa, a cada valor possível x de X, sua respectiva probabilidade, calculada da seguinte forma: $p_X(x)$ é a probabilidade do evento $\{X = x\}$ consistindo de todos os resultados do espaço amostral que deram origem ao valor x.*

$$p_X(x) = \Pr(\{X = x\}) = \sum_{\omega \in \Omega : X(\omega) = x} \Pr(\omega) \tag{1.1}$$

Figura 1.2: Função de distribuição de probabilidade de uma v.a. discreta



Para não sobrecarregar o texto, omitiremos os colchetes oriundos da notação de evento/conjunto e escreveremos $\Pr(X = x)$ no lugar de $\Pr(\{X = x\})$, que seria a forma correta. Uma outra convenção que seguiremos também será a de indicar por letras maiúsculas as variáveis aleatórias e por letras minúsculas os números reais, tais como os valores específicos de uma v.a. . Além disso, abreviaremos por fdp o termo função de distribuição de probabilidade.

Das propriedades (axiomas) da probabilidade resultam os seguintes fatos sobre a função de distribuição de probabilidades de uma v.a. X:

$$0 \leq p_X(x) \leq 1 \tag{1.2}$$

$$\sum_x p_X(x) = 1 \tag{1.3}$$

onde $\sum_x$ indica somatório ao longo de todos os possíveis valores de X. Note que essa propriedade é decorrente do axioma $\Pr(\Omega) = 1$, pois os eventos $\{X = x\}$ são mutuamente exclusivos e formam uma partição do espaço amostral.

1.3.1 Cálculo da função de distribuição de probabilidade

O cálculo da fdp de uma v.a. X qualquer se dá em três etapas:

- primeiro, temos que identificar todos os possíveis valores x da v.a. X;
- segundo, temos que identificar os resultados que dão origem a cada valor x e suas respectivas probabilidades;
- finalmente, temos que somar todas essas probabilidades para obter $p_X(x)$.

Exemplo 1.1

Considerando novamente a v.a. definida na figura 1.1, podemos resumir a fdp da variável em questão na seguinte tabela:

x	1	2	3	4	5	6
$p_X(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Exemplo 1.2

Consideremos novamente o lançamento de dois dados mas agora vamos definir a seguinte v.a. $X =$ "soma das 2 faces". Para facilitar a solução desse problema, vamos construir uma tabela de duas entradas, onde cada dimensão representa o resultado de um dado e em cada cela temos a soma das duas faces.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Como cada ponto do espaço amostral é equiprovável, a fdp de X é:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_X(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

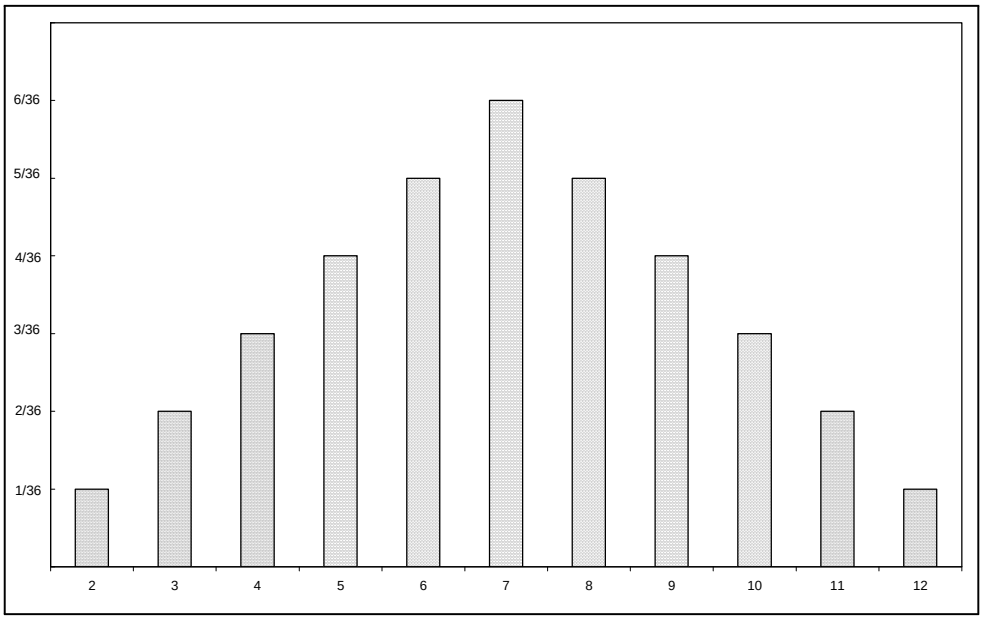
1.3.2 Representação gráfica da função de distribuição de probabilidade

A função de distribuição de probabilidade de uma v.a. discreta X que assume um número finito de valores pode ser representada por um gráfico de colunas, onde a cada valor de X corresponde uma coluna cuja altura representa a probabilidade do respectivo valor. Na figura 1.3 ilustra-se a fdp da v.a. X do exemplo 1.2.

Exemplo 1.3

Suponha que uma moeda é lançada 10 vezes e vamos definir a v.a. $X =$ "número de caras". Suponhamos que a probabilidade de cara seja p e, por conseguinte, a probabilidade de coroa é $1-p$. Os possíveis valores de X são $0, 1, 2, \ldots, 10$. Vamos agora calcular a probabilidade de cada

Figura 1.3: FDP da v.a. X = "soma das faces de dois dados"



um desses valores, estabelecendo a equivalência dos eventos envolvidos. Para isso vamos usar a notação K_i = cara no i-ésimo lançamento e C_i = coroa no i-ésimo lançamento.

$$\{X = 0\} = \{\text{coroa nos 10 lançamentos}\} = \{C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_{10}\}$$

Podemos considerar os lançamentos da moeda como eventos independentes. Logo,

$$\Pr(X = 0) = \Pr(C_1) \times \Pr(C_2) \times \cdots \times \Pr(C_{10}) = (1-p)^{10}$$

O evento $\{X = 1\}$ corresponde à ocorrência de 1 cara e 9 coroas. Uma seqüência possível de resultados é $KCCCCCCCCCC$ e a probabilidade é

$$\Pr(KCCCCCCCCCC) = p(1-p)^9$$

Mas a seqüência $CKCCCCCCCCC$ também resulta em $X = 1$. Na verdade, existem $\binom{10}{1}$ tais seqüências, todas com a mesma probabilididade; logo,

$$\Pr(X = 1) = \binom{10}{1} p(1-p)^9$$

Analogamente, o evento $\{X = 2\}$ corresponde à ocorrência de 2 caras e 8 coroas; uma seqüência possível é $KKCCCCCCCCC$, que tem probabilidade

$$\Pr(KKCCCCCCCCC) = p^2(1-p)^8$$

Mas existem $\binom{10}{2}$ maneiras de colocar 2 caras numa seqüência de 10 lançamentos e todas essas maneiras têm a mesma probabilidade. Logo,

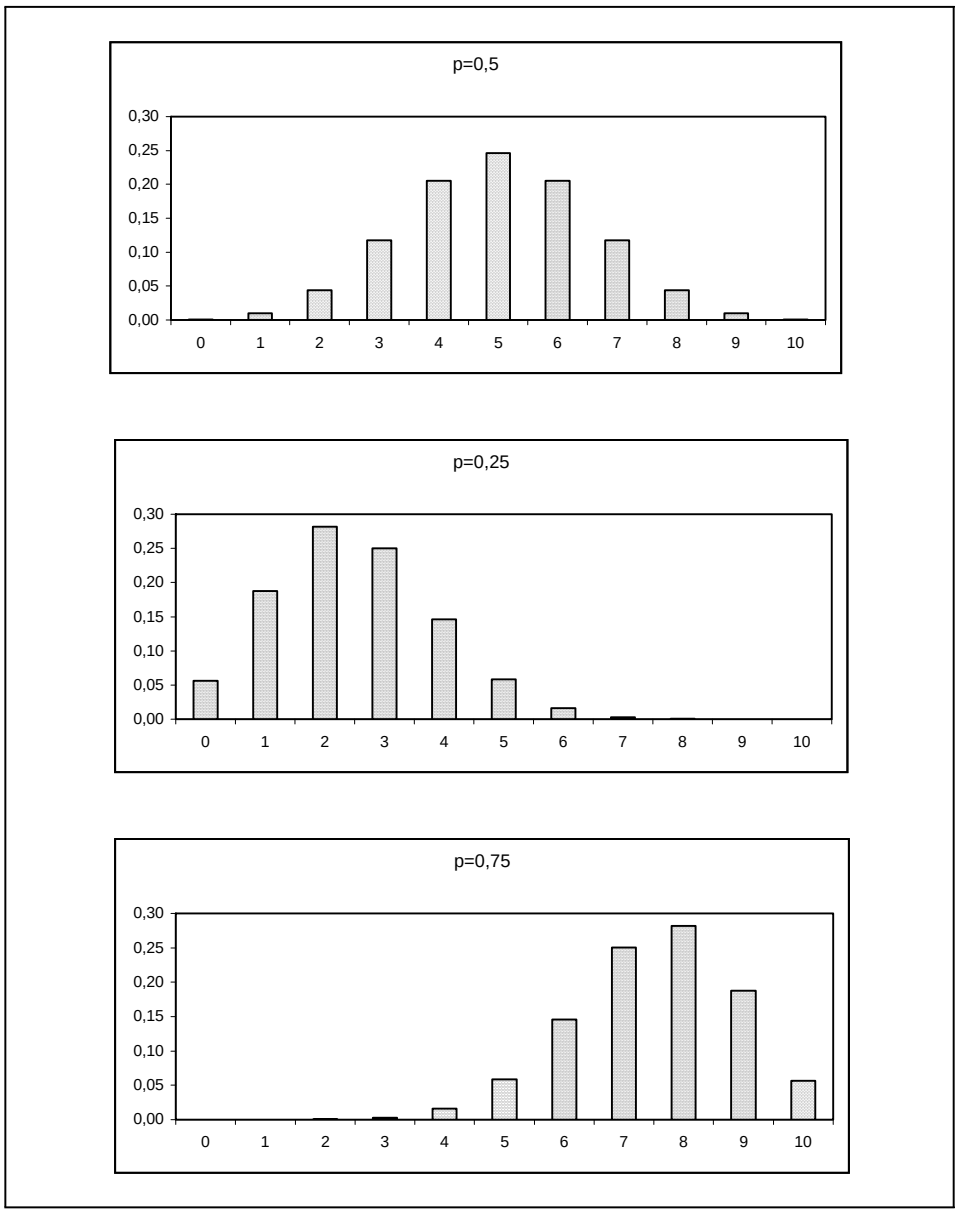
$$\Pr(X = 2) = \binom{10}{2} p^2(1-p)^8$$

Em geral, para qualquer valor de x temos

$$\Pr(X = x) = \binom{10}{x} p^x (1-p)^{10-x} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, 10$$

Na figura 1.4 ilustramos a fdp para diferentes valores de p. Note que $p = \frac{1}{2}$ resulta em uma distribuição simétrica, enquanto valores de $p < \frac{1}{2}$ resultam em assimetria à direita e $p > \frac{1}{2}$ em assimetria à esquerda.

Figura 1.4: Número de caras em 10 lançamentos de uma moeda



Exemplo 1.4

Considere uma urna com 10 bolas, das quais 6 são vermelhas e 4 brancas. Dessa urna retiram-se 3 bolas sem reposição e conta-se o número de bolas brancas retiradas. Qual é a distribuição dessa variável aleatória? Os possíveis valores de X são 0,1,2,3. Para calcular a probabilidade de cada um desses valores, devemos notar inicialmente que o espaço amostral tem $\binom{10}{3}$ eventos elementares. O evento $\{X = 0\}$ corresponde à união dos eventos (seqüências) onde não aparece nenhuma bola branca ou, equivalentemente, onde todas as bolas são vermelhas; o número de tais seqüências é $\binom{6}{3}\binom{4}{0} = \binom{6}{3}$. (Note que aqui estamos usando o princípio fundamental da multiplicação.) Logo,

$$\Pr(X = 0) = \frac{\binom{6}{3}\binom{4}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{20}{120}$$

Analogamente, o evento $\{X = 1\}$ corresponde à união dos eventos onde aparece 1 bola branca e 2 vermelhas. O número de tais seqüências é $\binom{6}{2}\binom{4}{1}$ e, portanto

$$\Pr(X = 1) = \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{60}{120}$$

Analogamente, obtemos que

$$\Pr(X = 2) = \frac{\binom{6}{1}\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{36}{120}$$

$$\Pr(X = 3) = \frac{\binom{6}{0}\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120}$$

e a fdp de X é

x	0	1	2	3
$p_X(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

cujo gráfico está ilustrado na figura 1.5.

1.3.3 Exercícios resolvidos

1. Encontre a fdp da v.a. X do exercício resolvido 1 da seção 1.2 e a probabilidade do evento $\{X \geq 9\}$.

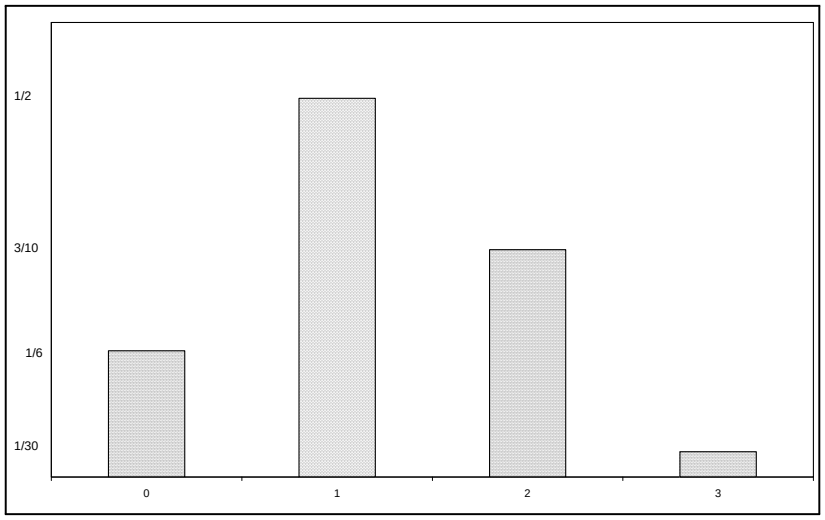
   Solução:

   Como todos os pontos do espaço amostral são equiprováveis, a fdp de X é:

x	8,85	8,90	8,95	9,00	9,05	9,10	9,15	9,20	9,25	9,35
$p_X(x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

   e $\Pr(X \geq 9) = \frac{7}{10}$.

Figura 1.5: Número de bolas brancas em 3 extrações de uma urna com 6 vermelhas e 4 brancas



2. Encontre a fdp da v.a. X do exercício resolvido 2 da seção 1.2.

   Solução:

   Cada ponto do espaço amostral tem a mesma probabilidade $\frac{1}{24}$. Cada uma das 4 linhas do espaço amostral listado na solução daquele exercício corresponde a cada um dos eventos $X = 1$, $X = 2$, $X = 3$ e $X = 4$, respectivamente. Logo, a fdp de X é:

x	1	2	3	4
$p_X(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

3. Encontre a fdp da v.a. X do exercício resolvido 3 da seção 1.2.

   Solução:

   O número de pontos do espaço amostral é $\binom{52}{5}$.

$$\Pr(X=0) = \Pr(5 \text{ pretas}) = \frac{\binom{26}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{26\times25\times24\times23\times22}{52\times51\times50\times49\times48} = \frac{23\times22}{2\times51\times2\times49\times2} = 0,02531$$

$$\begin{aligned}\Pr(X=1) &= \Pr(4 \text{ pretas,1 vermelha}) = \frac{\binom{26}{4}\binom{26}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{\frac{26\times25\times24\times23}{4\times3\times2}\times26}{\frac{52\times51\times50\times49\times48}{5\times4\times3\times2}} = \frac{26\times25\times23\times26}{52\times51\times10\times49\times2} \\ &= \frac{5\times23\times13}{2\times51\times2\times49} = \frac{65\times23}{4\times51\times49} = 0,14956\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(X=2) &= \Pr(3 \text{ pretas,2 vermelhas }) = \frac{\binom{26}{3}\binom{26}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{\frac{26\times25\times24}{3\times2}\times\frac{26\times25}{2}}{\frac{52\times51\times50\times49\times48}{5\times4\times3\times2}} = \frac{26\times25\times4\times13\times25}{52\times51\times5\times49\times4} \\ &= \frac{5\times13\times25}{2\times51\times49} = \frac{65\times25}{2\times51\times49} = 0,32513\end{aligned}$$

Como o número de cartas pretas e vermelhas é o mesmo, resulta que

$$\Pr(X=3)=\Pr(X=2)=\Pr(\text{2 pretas,3 vermelhas })=\frac{\binom{26}{2}\binom{26}{3}}{\binom{52}{5}}=0,32513$$

$$\Pr(X=4)=\Pr(\text{1 preta,4 vermelhas})=\frac{\binom{26}{1}\binom{26}{4}}{\binom{52}{5}}=0,14956$$

$$\Pr(X=5)=\Pr(\text{5 vermelhas})=\frac{\binom{26}{5}}{\binom{52}{5}}=0,02531$$

Logo, a fdp de X é

x	0	1	2	3	4	5
$p_X(x)$	0,02531	0,14956	0,32513	0,32513	0,14956	0,02531

4. Encontre a fdp da v.a. X do exercício resolvido 4 da seção 1.2.

   Solução:

   (a) A cardinalidade do espaço amostral é

$$\binom{11}{5}=\frac{11\times10\times9\times8\times7}{5\times4\times3\times2}=11\times6\times7$$

$$\Pr(X=0)=\Pr(\text{5 brancas})=\frac{\binom{7}{5}}{\binom{11}{5}}=\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{1}{22}=\frac{3}{66}$$

$$\Pr(X=1)=\Pr(\text{1 verde, 4 brancas})=\frac{\binom{4}{1}\binom{7}{4}}{11\times6\times7}=\frac{4\times\frac{7\times6\times5}{3\times2}}{11\times6\times7}=\frac{10}{33}=\frac{20}{66}$$

$$\Pr(X=2)=\Pr(\text{2 verdes, 3 brancas})=\frac{\binom{4}{2}\binom{7}{3}}{11\times6\times7}=\frac{\frac{4\times3}{2}\times\frac{7\times6\times5}{3\times2}}{11\times6\times7}=\frac{5}{11}=\frac{30}{66}$$

$$\Pr(X=3)=\Pr(\text{3 verdes, 2 brancas})=\frac{\binom{4}{3}\binom{7}{2}}{11\times6\times7}=\frac{4\times\frac{7\times6}{2}}{11\times6\times7}=\frac{2}{11}=\frac{12}{66}$$

$$\Pr(X=4)=\Pr(\text{4 verdes, 1 branca})=\frac{\binom{4}{4}\binom{7}{1}}{11\times6\times7}=\frac{1\times7}{11\times6\times7}=\frac{1}{66}$$

   Logo, a fdp de X é

x	0	1	2	3	4
$p_X(x)$	$\frac{3}{66}$	$\frac{20}{66}$	$\frac{30}{66}$	$\frac{12}{66}$	$\frac{1}{66}$

   (b) Com reposição, sempre temos na urna 7 brancas e 4 verdes e em cada extração, temos que $\Pr(\text{branca})=\frac{7}{11}$ e $\Pr(\text{verde})=\frac{4}{11}$. Como as extrações são independentes, resulta que

$$\Pr(X=0)=\Pr(\text{5 brancas})=\left(\frac{7}{11}\right)^5=0,104358$$

$$\Pr(X=1) = \Pr(\text{1 verde, 4 brancas}) = \binom{5}{1}\left(\frac{7}{11}\right)^4\left(\frac{4}{11}\right)^1 = 0,298166$$

$$\Pr(X=2) = \Pr(\text{2 verdes, 3 brancas}) = \binom{5}{2}\left(\frac{7}{11}\right)^3\left(\frac{4}{11}\right)^2 = 0,340762$$

$$\Pr(X=3) = \Pr(\text{3 verdes, 2 brancas}) = \binom{5}{3}\left(\frac{7}{11}\right)^2\left(\frac{4}{11}\right)^3 = 0,194721$$

$$\Pr(X=4) = \Pr(\text{4 verdes, 1 branca}) = \binom{5}{4}\left(\frac{7}{11}\right)^1\left(\frac{4}{11}\right)^4 = 0,055635$$

$$\Pr(X=5) = \Pr(\text{5 verdes}) = \left(\frac{4}{11}\right)^5 = 0,006358$$

Logo, a fdp de X é:

x	0	1	2	3	4	5
$p_X(x)$	0,104358	0,298166	0,340762	0,194721	0,055635	0,006358

5. Encontre a fdp da v.a. X do exercício resolvido 5 da seção 1.2.

   Solução:

   (a) A cardinalidade do espaço amostral é

$$\binom{8}{5} = \frac{8\times 7\times 6}{3\times 2} = 56$$

$$\Pr(X=1) = \Pr(\text{1 verde, 4 brancas}) = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{4}}{56} = \frac{4}{56}$$

$$\Pr(X=2) = \Pr(\text{2 verdes, 3 brancas}) = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{3}}{56} = \frac{24}{56}$$

$$\Pr(X=3) = \Pr(\text{3 verdes, 2 brancas}) = \frac{\binom{4}{3}\binom{4}{2}}{56} = \frac{24}{56}$$

$$\Pr(X=4) = \Pr(\text{4 verdes, 1 branca}) = \frac{\binom{4}{4}\binom{4}{1}}{56} = \frac{4}{56}$$

   Logo, a fdp de X é

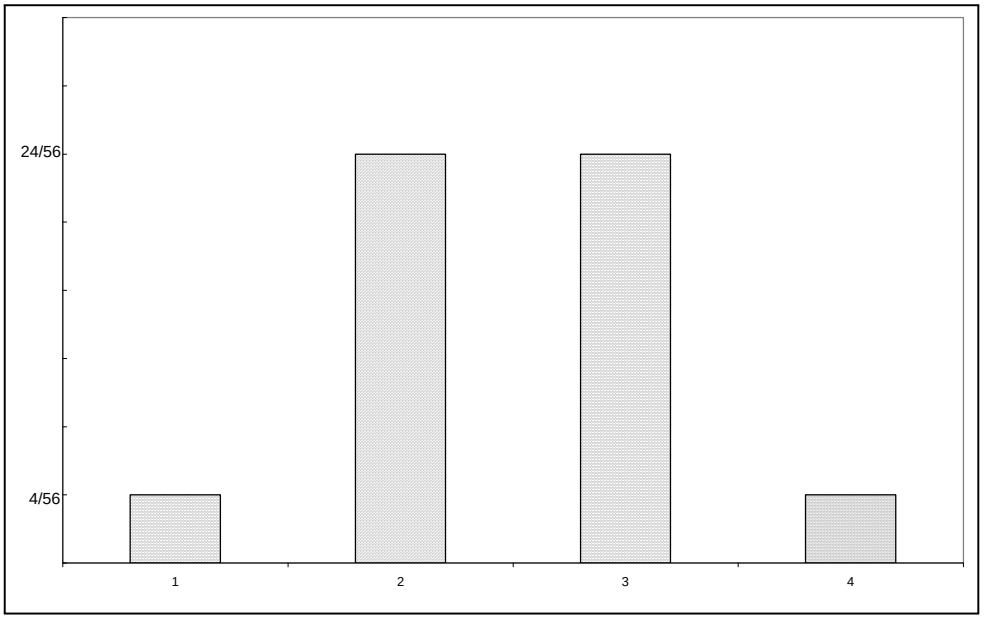
x	1	2	3	4
$p_X(x)$	$\frac{4}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{4}{56}$

   cujo gráfico é dado na figura 1.6

   (b) Com reposição, sempre temos na urna 4 brancas e 4 verdes e, assim, em cada extração, $\Pr(\text{branca}) = \Pr(\text{verde}) = \frac{1}{2}$. Como as extrações são independentes, resulta que

$$\Pr(X=0) = \Pr(\text{5 brancas}) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

Figura 1.6: FDP da v.a. X do exercício 5 (a)



$$\Pr(X=1) = \Pr(\text{1 verde, 4 brancas}) = \binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32}$$

$$\Pr(X=2) = \Pr(\text{2 verdes, 3 brancas}) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32}$$

$$\Pr(X=3) = \Pr(\text{3 verdes, 2 brancas}) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32}$$

$$\Pr(X=4) = \Pr(\text{4 verdes, 1 branca}) = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32}$$

$$\Pr(X=5) = \Pr(\text{5 verdes}) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

x	0	1	2	3	4	5
$p_X(x)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

6. Seja uma v.a. X com fdp dada na tabela a seguir:

x	0	1	2	3	4	5
$p_X(x)$	0	p^2	p^2	p	p	p^2

(a) Encontre o valor de p.

(b) Calcule $\Pr(X \geq 4)$ e $\Pr(X < 3)$.

(c) Calcule $\Pr(|X-3| \geq 2)$.

Solução:

(a) Como $\sum_i p_X(i) = 1$, temos que ter:

$$3p^2 + 2p = 1 \Rightarrow 3p^2 + 2p - 1 = 0 \Rightarrow p = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6} \Rightarrow \begin{cases} p = -1 \\ \text{ou} \\ p = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Como p é uma probabilidade, temos que ter $p \geq 0$. Logo, o valor correto é $\boxed{p = \frac{1}{3}}$.

(b) $\Pr(X \geq 4) = \Pr(X = 4) + \Pr(X = 5) = p + p^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$.
$Pr(X < 3) = Pr(X = 0) + \Pr(X = 1) + \Pr(X = 2) = 2p^2 = \frac{2}{9}$.

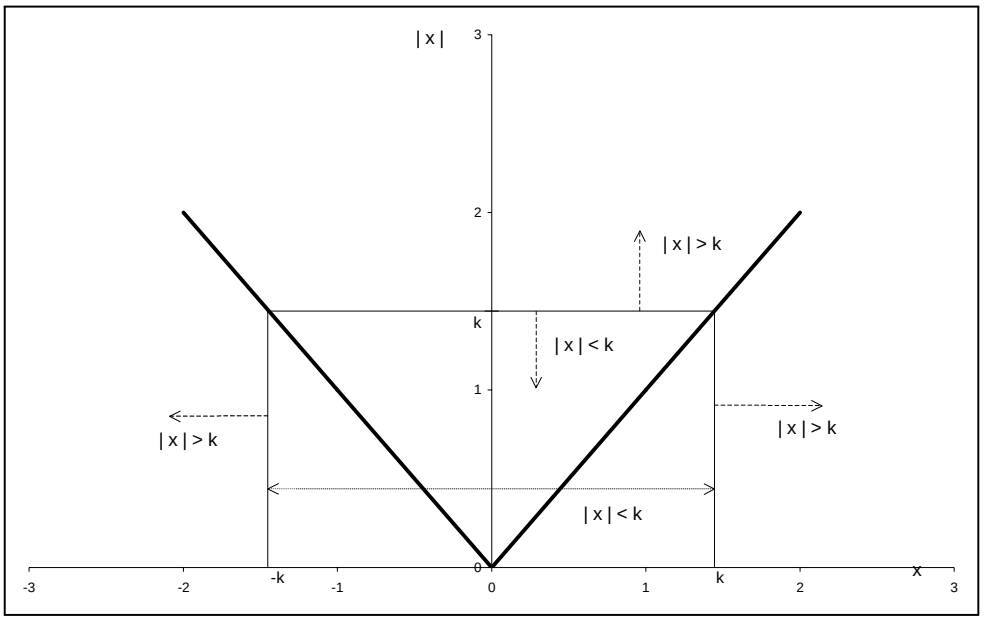
(c) Aqui temos que notar o seguinte fato da função módulo, ilustrado na figura 1.7:

$$|\,x\,| \geq k \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq k \\ \text{ou} \\ x \leq -k \end{cases}$$

e

$$|\,x\,| \geq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$$

Figura 1.7: Função módulo



Usando esses fatos, temos que

$$\begin{aligned} \Pr(|X-3| \geq 2) &= \Pr(X - 3 \leq -2 \text{ ou } X - 3 \geq 2) = \Pr(X - 3 \leq -2) + \Pr(X - 3 \geq 2) = \\ &= \Pr(X \leq 1) + \Pr(X \geq 5) = \Pr(X = 0) + \Pr(X = 1) + \Pr(X = 5) = \\ &= 2p^2 = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

1.4 Função de distribuição acumulada de uma variável aleatória discreta

A partir da função de distribuição de probabilidades de uma v.a. discreta X é possível calcular a probabilidade de qualquer evento associado a ela. Por exemplo, para a fdp da figura 1.5, temos que

$$\begin{aligned}\Pr(X \geq 2) &= \Pr(\{X=2\} \cup \{X=3\}) = \Pr(X=2) + \Pr(X=3) = \frac{1}{3} \\ \Pr(X \leq 1) &= \Pr(\{X=0\} \cup \{X=1\}) = \Pr(X=0) + \Pr(X=1) = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Então, podemos dizer que a fdp de uma variável aleatória discreta X nos dá toda a informação sobre X. Existe uma outra função com tal característica, que é a *função de distribuição acumulada* de X, cuja definição apresentamos a seguir.

Definição 1.4 *Dada uma variável aleatória (discreta) X, a função de distribuição acumulada de X é definida por*

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

É interessante notar que a função F_X está definida para todo número real x. Antes de passar às propriedades teóricas da função de distribuição acumulada (usaremos a abreviação fda), também conhecida como função de distribuição, vamos ver um exemplo.

Exemplo 1.5

Voltando ao exemplo 1.1, temos que a fdp da v.a. $X =$ "máximo das faces de 2 dados" é dada por

x	1	2	3	4	5	6
$p_X(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Para calcular a fda de X, notemos inicialmente que nenhum valor menor que 1 é possível. Logo,

$$F_X(x) = 0 \qquad \forall x < 1$$

Para $x = 1$ devemos notar que

$$F_X(1) = \Pr(X \leq 1) = \Pr(X < 1) + \Pr(X = 1) = 0 + \frac{1}{36} = \frac{1}{36} \tag{1.5}$$

Para qualquer valor de x tal que $1 < x < 2$, temos que $p_X(x) = 0$. Logo,

$$F_X(x) = \Pr(X \leq 1) + \Pr(1 < X < x) = F_X(1) + 0 = F_X(1) \qquad \forall x : 1 < x < 2 \tag{1.6}$$

Juntando os resultados (1.5) e (1.6), obtemos que

$$F_X(x) = F_X(1) = \frac{1}{36} \qquad \forall x : 1 \leq x < 2$$

Com raciocínio análogo, obtemos que

$$F_X(2) = \Pr(X \leq 2) = \Pr(X \leq 1) + \Pr(1 < X < 2) + \Pr(X = 2) = \frac{1}{36} + 0 + \frac{3}{36} = \frac{4}{36} \tag{1.7}$$

e também que

$$F_X(x) = \Pr(X \leq 2) + \Pr(2 < X < x) = F_X(2) + 0 = F_X(2) \qquad \forall x : 2 < x < 3 \tag{1.8}$$

ou seja,

$$F_X(x) = F_X(2) = \frac{4}{36} \qquad \forall x : 2 \leq x < 3$$

Continuando obtemos que

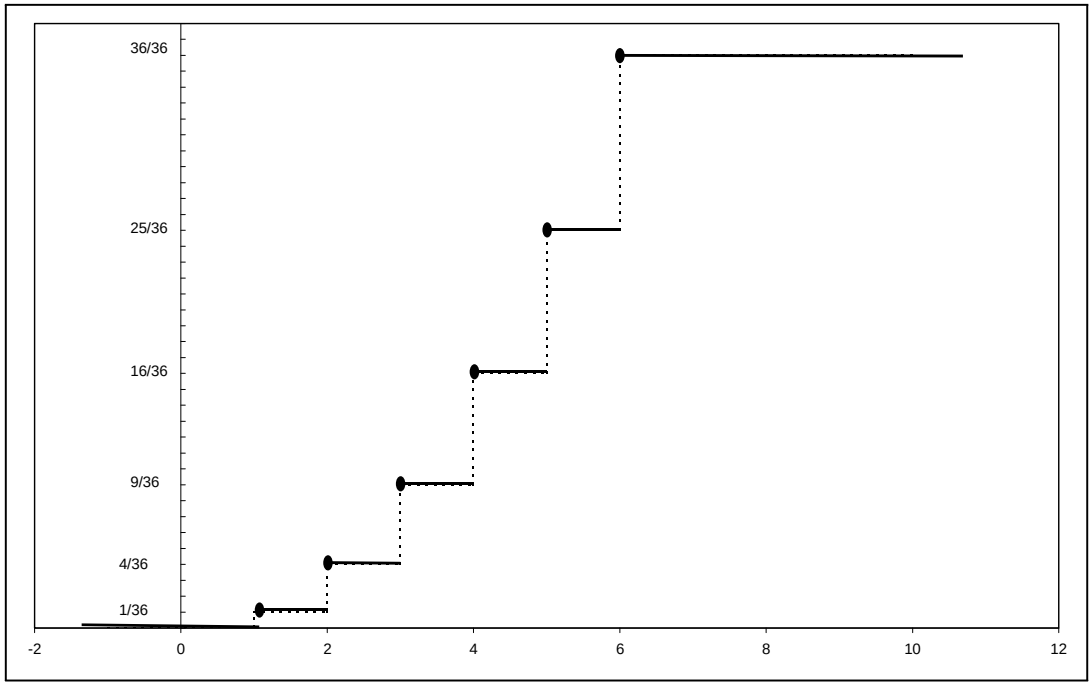
$$\begin{aligned} F_X(x) &= F_X(3) = \frac{9}{36} \qquad \forall x : 3 \leq x < 4 \\ F_X(x) &= F_X(4) = \frac{16}{36} \qquad \forall x : 4 \leq x < 5 \\ F_X(x) &= F_X(5) = \frac{25}{36} \qquad \forall x : 5 \leq x < 6 \end{aligned}$$

Para $x \geq 6$ devemos notar que o evento $\{X \leq x\}$ corresponde ao espaço amostral completo; logo

$$F_X(x) = 1 \qquad \forall\, x \geq 6$$

Na figura 1.8 temos o gráfico de tal função.

Figura 1.8: FDA da v.a. $X =$ "máximo das faces de 2 dados"



Os axiomas da probabilidade e as propriedades deles decorrentes nos permitem obter as seguintes propriedades da função de distribuição acumulada de uma v.a. X.

1. Do axioma **??** resulta que
$$0 \leq F_X(x) \leq 1$$

2. Do axioma **??** resulta que
$$\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$$
Note que o evento $\{X < \infty\}$ corresponde a todos os números reais e, portanto, ao espaço amostral.

3. Da propriedade **??** resulta que
$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$$
Note que o evento $\{X < -\infty\}$ corresponde ao evento impossível.

4. $F_X(x)$ é uma função não decrescente, isto é, se
$$a < b \Rightarrow F_X(a) \leq F_X(b)$$
Esse resultado segue do fato de que, se $a < b$, então o evento $\{X \leq a\} \subset \{X \leq b\}$ e, pela propriedade **??**, segue o resultado.

5. $F_X(x)$ é uma função contínua à direita, isto é
$$F_X(b) = \lim_{h\to 0} F_X(b+h) \triangleq F_X\left(b^+\right)$$
Essa propriedade pode ser visualizada na figura 1.8: considere a vizinhança do ponto $x = 2$. Para um número **pequeno** $\delta > 0$, temos que
$$F_X(2-\delta) = \Pr(X \leq 2-\delta) = \Pr(X = 1) = \frac{1}{36}$$
Isso significa que o limite à esquerda de F_X quando x aproxima de 2 é $\frac{1}{36}$. Da mesma forma, temos que
$$F_X(2+\delta) = \Pr(X \leq 2+\delta) = \Pr(X = 2) = \frac{4}{36} = F_X(2)$$
Isso significa que o limite à direita de F_X quando x aproxima de 2 é $F_X(2)$. Como essa mesma observação vale para todos os valores de X, concluimos que F_X é contínua à direita e descontínua à esquerda em cada ponto onde $p_X(x) \neq 0$.

Vamos ver, agora, como obter informações sobre eventos associados a X a partir de F_X.

6. Se $a < b$, então
$$\Pr(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$
De fato, temos que $\{X \leq b\} = \{X \leq a\} \cup \{a < X \leq b\}$. Como os eventos são mutuamente exclusivos, resulta que
$$\Pr(X \leq b) = \Pr(X \leq a) + \Pr(a < X \leq b) \Rightarrow \Pr(a < X \leq b) = \Pr(X \leq b) - \Pr(X \leq a)$$
de onde segue o resultado.

7. A fdp de X pode ser calculada da seguinte forma:

$$p_X(x) = F_X(x) - \lim_{\delta \to 0} F_X(x-\delta) \triangleq F_X(x) - F_X\left(x^-\right) \tag{1.9}$$

A propriedade anterior nos permite escrever o seguinte: para um número pequeno $\delta > 0$,

$$\Pr(x - \delta < X \leq x) = F_X(x) - F_X(x-\delta)$$

Tomando o limite quando δ tende para zero, segue o resultado, uma vez que $\lim_{\delta \to 0} \Pr(x - \delta < X \leq x) = \Pr(X = x)$. Note que isso significa que $p_X(x)$ é igual ao tamanho do "salto" da fda no ponto x.

As probabilidades de qualquer outro tipo de intervalo podem ser calculadas usando os resultados anteriores e as propriedades da probabilidade.

- $\Pr(X < b)$ - basta notar que $\{X \leq b\} = \{X < b\} \cup \{X = b\}$
- $\Pr(a \leq X \leq b)$ - basta notar que $\{a \leq X \leq b\} = \{X = a\} \cup \{a < X \leq b\}$
- $\Pr(a < X < b)$ - basta notar que $\{a < X < b\} = \{X \leq b\} - \{X \leq a\}$
- $\Pr(X > a)$ - basta notar que $\{X > a\} = \overline{\{X \leq a\}}$

A conclusão que podemos tirar é a seguinte: a função de distribuição de probabilidades (fdp) e a função de distribuição acumulada (fda), ambas nos dão todas as informações sobre a variável aleatória X e a partir de uma podemos obter a outra, de forma inequívoca.

1.4.1 Exercícios resolvidos

1. Encontre a fda da v.a. X do exercício 2 da seção 1.3.

   Solução:

   A fda de X é

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{4} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{4} & 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

   cujo gráfico é dado na figura 1.9.

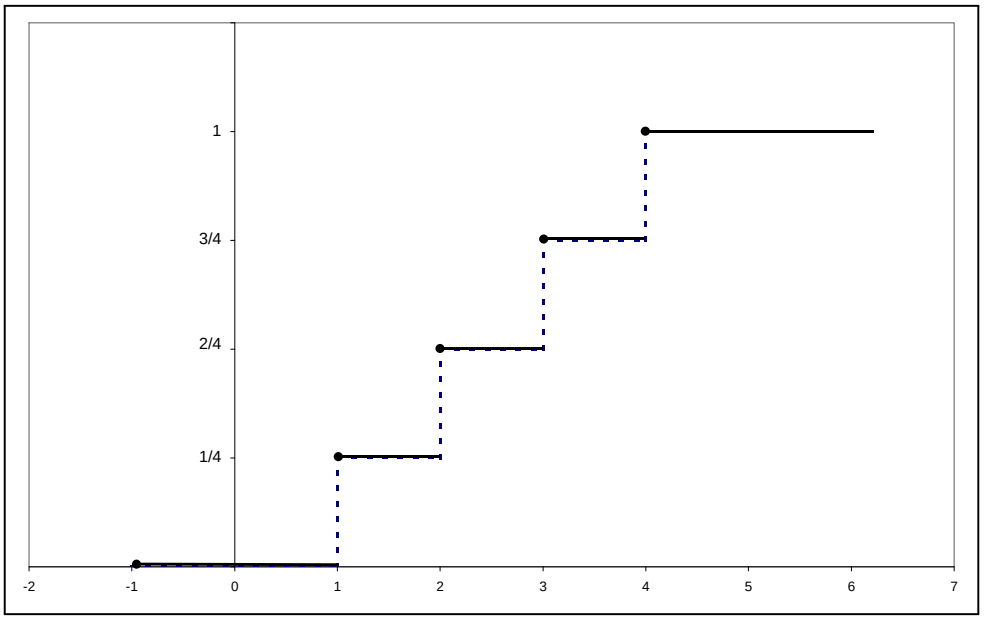
2. Encontre a fda da v.a. X do exercício 5 da seção 1.3.

   Solução:

   (a) A fda é:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{4}{56} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{28}{56} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{52}{56} & 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

Figura 1.9: FDA da v.a. X do exercício 1



(b) A fda é

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{32} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{6}{32} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{16}{32} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{26}{32} & 3 \leq x < 4 \\ \frac{31}{32} & 4 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

1.5 Funções de variáveis aleatórias

Dada uma v.a. X, podemos obter outras variáveis aleatórias através de funções de X e, da mesma forma que calculamos a fdp de X, podemos calcular a fdp dessas novas variáveis.

Exemplo 1.6

Considere a v.a. X cuja fdp é dada na tabela abaixo:

x	-2	-1	0	1	2	3
$p_X(x)$	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1

Consideremos a função $Y = g(X) = X^2$. Então, Y é uma nova variável aleatória, cujos possíveis valores são $0, 1, 4, 9$. Para calcular as probabilidades desses valores, temos que identificar os valores

de X que originaram cada um deles. Temos a seguinte equivalência de eventos:

$$\begin{aligned}\{Y=0\} &\equiv \{X=0\}\\ \{Y=1\} &\equiv \{X=-1\}\cup\{X=1\}\\ \{Y=4\} &\equiv \{X=-2\}\cup\{X=2\}\\ \{Y=9\} &\equiv \{X=3\}\end{aligned}$$

Como os eventos são mutuamente exclusivos, segue que

$$\begin{aligned}\Pr(Y=0) &= \Pr(X=0)=0,2\\ \Pr(Y=1) &= \Pr(X=-1)+\Pr(X=1)=0,5\\ \Pr(Y=4) &= \Pr(X=-2)+\Pr(X=2)=0,2\\ \Pr(Y=9) &= \Pr(X=3)=0,1\end{aligned}$$

e podemos resumir essa fdp como

y	0	1	4	9
$p_Y(y)$	0,2	0,5	0,2	0,1

Em geral, temos o seguinte resultado:

Resultado 1.1 *Seja X uma variável aleatória discreta com função de distribuição de probabilidade $p_X(x)$. Se definimos uma nova v.a. $Y=g(X)$, onde g é uma função real qualquer, então a fdp de Y é calculada como*

$$p_Y(y)=\sum_{\{x\,|\,g(x)=y\}} p_X(x)$$

1.5.1 Exercícios resolvidos

1. Considere o problema do pôquer de dados apresentado no exercício resolvido **??** da seção **??**. Suponha que um jogador paga R$100,00 para entrar no jogo. Se ele tirar uma seqüência, ele ganha R$200,00; se tirar 5 iguais, ganha R$5.100,00; se tirar 4 iguais, ganha R$100,00. Em todos os outros casos, ele perde. Seja L o lucro do jogador. Encontre a fdp de L.

   Solução:

   De acordo com o exercício citado, temos a seguinte equivalência de eventos:

   $$\begin{aligned}L &= 200-100=100 \Leftrightarrow A_8\\ L &= 5100-100=5000 \Leftrightarrow A_7\\ L &= 100-100=0 \Leftrightarrow A_6\\ L &= 0-100=-100 \Leftrightarrow \text{ outros resultados}\end{aligned}$$

   Para calcular as probabilidades, temos que lembrar que $A_8 \subset A_1$. Logo, se denotarmos por A_1^* o eventos "todas diferentes mas não em seqüência", temos que $\Pr(A_1^*)=\Pr(A_1)-\Pr(A_8)=\frac{5}{54}-\frac{5}{162}=\frac{10}{162}=\frac{80}{1296}$. Logo, a fdp de L é:

Resultado	$5=(A_7)$	$4=(A_6)$	Seqüência (A_8)	Resto
Lucro l	5000	0	100	-100
$p_L(l)$	$\frac{1}{1296}$	$\frac{25}{1296}$	$\frac{40}{1296}$	$\frac{1230}{1296}$

2. Considere a v.a. X cuja fdp é

x	-3	1	3	5
$p_X(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	p

Encontre o valor de p e a fda da v.a. $Y = X^2$.

Solução:

Como $\Pr(\Omega) = 1$, temos que ter $p = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{5}{24}$. Os valores possíveis de Y são $1, 9, 25$ e

$$\begin{aligned}
\Pr(Y = 1) &= \Pr(X = 1) = \frac{1}{6} \\
\Pr(Y = 9) &= \Pr(\{X = -3\} \cup \{X = 3\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \\
\Pr(Y = 25) &= \Pr(X = 5) = \frac{5}{24}
\end{aligned}$$

Logo, a fda de Y é

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 1 \\ \frac{1}{6} & 1 \leq y < 9 \\ \frac{19}{24} & 9 \leq y < 25 \\ 1 & y \geq 25 \end{cases}$$

1.6 Esperança e variância de variáveis aleatórias discretas

No estudo da Estatística Descritiva, vimos como sumarizar conjuntos de dados através de distribuições de freqüências e também por estatísticas-resumo, como a média e a variância, no caso de variáveis quantitativas. Em particular, vimos que a média de dados agrupados em classes era calculada como uma média ponderada dos valores centrais (valores representativos das classes), com a ponderação definida pelas freqüências relativas das classes.

No estudo de variáveis aleatórias e suas distribuições de probabilidades, estamos associando números aos pontos do espaço amostral, ou seja, o resultado é sempre uma variável quantitativa (note que os resultados cara e coroa não definem uma variável aleatória; para tal, temos que associar números, 0 e 1 por exemplo, a esses resultados). Sendo assim, podemos fazer perguntas do tipo "qual o valor médio da variável aleatória X?", "qual a dispersão dos valores de X?", da mesma forma que fizemos na análise descritiva de dados. O ponto chave para a compreensão das definições que serão apresentadas é o estabelecimento da analogia com o estudo das distribuições de freqüências feito na parte inicial do curso. Tal analogia se faz através da interpretação freqüencial do conceito de probabilidade.

1.6.1 Probabilidade e freqüência relativa

Consideremos novamente o experimento aleatório "lançamento de um dado", mas agora um dado que sabemos não ser equilibrado. Como poderíamos proceder para calcular a probabilidade de cada face? Uma resposta, talvez intuitiva, seria lançar esse dado um *grande* número de vezes e observar o número de ocorrências de cada face. As freqüências relativas nos dariam, então, o que poderíamos pensar como sendo a probabilidade de cada evento simples (face). É de se esperar

que, quanto maior o número de repetições do experimento (lançamento do dado), mais próximas das "verdadeiras" probabilidades estariam essas freqüências relativas. Esta é, assim, a definição de probabilidade de um evento através da freqüência relativa:

$$\Pr(A) = \frac{\text{número de ocorrências de } A}{\text{número de repetições do experimento}}$$

onde o número de repetições do experimento deve ser grande.

Ao trabalharmos com variáveis aleatórias, podemos pensar também nas probabilidades dos diferentes valores da variável como sendo freqüências relativas em um número sempre crescente de repetições do experimento, ou seja, podemos pensar as probabilidades como sendo limites das freqüências relativas. Dessa forma, definiremos medidas de posição e dispersão para distribuições de probabilidades de variáveis aleatórias de maneira análoga à utilizada em distribuições de freqüências.

1.6.2 Esperança ou média de uma variável aleatória discreta

Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores $x_1, x_2, \ldots$ com probabilidades $p_1, p_2, \ldots$ respectivamente. A média ou esperança de X é definida como

$$E(X) = \sum_i p_i x_i = \sum_i x_i \Pr(X = x_i) \tag{1.10}$$

onde o somatório se estende por todos os valores possíveis de X. Podemos ver, então, que a esperança de X é uma média dos seus valores, ponderada pelas respectivas probabilidades. Lembre-se que no caso das distribuições de freqüências tínhamos $\overline{x} = \sum_i f_i x_i$. Como antes, a média de uma v.a. X está medida na mesma unidade da variável.

Exemplo 1.7

Em determinado setor de uma loja de departamentos, o número de produtos vendidos em um dia pelos funcionários é uma variável aleatória P com a seguinte distribuição de probabilidades (esses números foram obtidos dos resultados de vários anos de estudo):

Número de produtos	0	1	2	3	4	5	6
Probabilidade de venda	0,1	0,4	0,2	0,1	0,1	0,05	0,05

Cada vendedor recebe comissões de venda, distribuídas da seguinte forma: se ele vende até 2 produtos em um dia, ele ganha uma comissão de R$10,00 por produto vendido. A partir da terceira venda, a comissão passa para R$50,00. Qual é o número médio de produtos vendidos por cada vendedor e qual a comissão média de cada um deles?

Solução:

O número médio de vendas por funcionário é

$$E(P) = 0 \times 0,1 + 1 \times 0,4 + 2 \times 0,2 + 3 \times 0,1 + 4 \times 0,1 + 5 \times 0,05 + 6 \times 0,05 = 2,05$$

Com relação à comissão, vamos construir sua fdp:

Número de produtos P	0	1	2	3	4	5	6
Comissão C	0	10	20	70	120	170	220
Probabilidade de venda	0,1	0,4	0,2	0,1	0,1	0,05	0,05

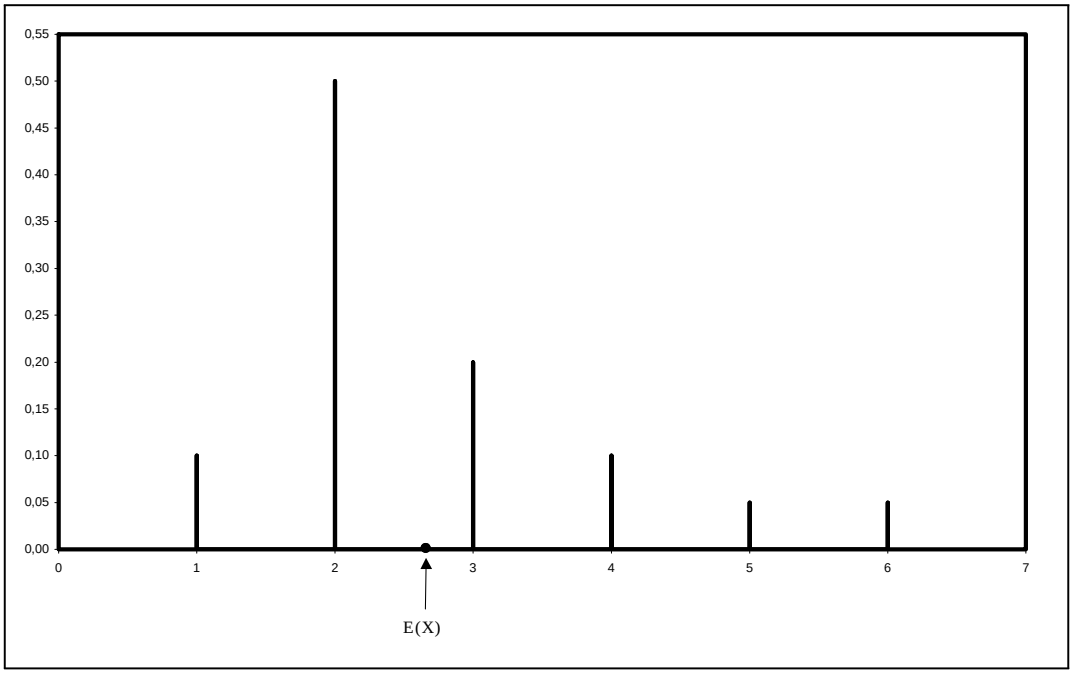
e

$$E(C) = 0 \times 0,1 + 10 \times 0,4 + 20 \times 0,2 + 70 \times 0,1 + 120 \times 0,1 + 170 \times 0,05 + 220 \times 0,05 = 46,5$$

ou seja, a comissão média por dia de cada vendedor é R$46,50.

Em geral, a média é vista como um "valor representativo" de X, estando localizada em algum ponto no "centro do domínio de valores de X". Uma interpretação mais precisa deste pensamento é a seguinte: a esperança de X é o centro de gravidade da distribuição de probabildiades, no seguinte sentido (ver figura 1.10). Pensando as colunas do gráfico, que representam as probabilidades, como pesos distribuídos ao longo de uma vara delgada, a média representa o ponto onde a vara se equilibraria.

Figura 1.10: Interpretação da média como centro de gravidade da distribuição



1.6.3 Esperança de funções de variáveis aleatórias

Vimos que é possível obter novas variáveis aleatórias a partir de funções $g(X)$ de uma variável X e através da fdp de X podemos obter a fdp de Y. Sendo assim, podemos calcular a esperança de Y. Foi exatamente isso o que fizemos no caso das comissões no exemplo 1.7, onde tínhamos $C = 2P + 50 \times (3 - P)$. Analisando atentamente aquele exemplo e notando que, por definição de

função, a cada valor de X corresponde um único $Y = g(X)$, obtemos o resultado geral sobre a esperança de funções de variáveis aleatórias.

Resultado 1.2 *Seja X uma variável aleatória discreta com função de distribuição de probabilidade $p_X(x)$. Se definimos uma nova v.a. $Y = g(X)$, então*

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_x g(x)\, p_X(x) \tag{1.11}$$

Exemplo 1.8

Consideremos novamente o exemplo 1.6. Para calcular $E(X^2)$ não precisamos calcular a fdp de $Y = X^2$; pelo resultado anterior, basta fazer:

$$E\left(X^2\right) = (-2)^2 \times 0,1 + (-1)^2 \times 0,2 + 0^2 \times 0,2 + 1^2 \times 0,3 + 2^2 \times 0,1 + 3^2 \times 0,1 = 2,2$$

que é o mesmo resultado obtido a partir da fdp de Y :

$$E(Y) = E\left(X^2\right) = 0 \times 0,2 + 1 \times 0,5 + 4 \times 0,2 + 9 \times 0,1 = 2,2$$

1.6.4 Propriedades da esperança

A interpretação da esperança como centro de gravidade nos permite entender melhor as diversas propriedades que demonstraremos a seguir. No que segue, X é uma variável aleatória discreta com distribuição de probabilidades $p_X(x)$ e $a, b \neq 0$ são constantes reais quaisquer.

1. $E(a) = a$

   De fato: se X é uma v.a. constante, isso significa que $X = a$ com probabilidade 1. Logo, $E(X) = a \times 1 = a$.

2. $E(X + a) = E(X) + a$ ("somando uma constante, a média fica somada da constante")

   De fato: fazendo $g(X) = X + a$, pelo resultado 1.11, temos que

   $$\begin{aligned} E(X+a) &= \sum_x (x+a)\, p_X(x) = \sum_x x p_X(x) + \sum_x a p_X(x) = E(X) + a \sum_x p_X(x) = \\ &= E(X) + a \times 1 = E(X) + a \end{aligned}$$

3. $E(bX) = bE(X)$ ("multiplicando por uma constante, a esperança fica multiplicada pela constante")

   De fato: fazendo $g(X) = bX$, pelo resultado 1.11, temos que

   $$E(bX) = \sum_x bx p_X(x) = b \sum_x x p_X(x) = bE(X)$$

4. $E(a + bX) = a + bE(X)$

   Esse resultado é conseqüência direta dos resultados anteriores.

5. $x_{\min} \leq E(X) \leq x_{\max}$ onde $x_{\min}$ e $x_{\max}$ são os valores mínimo e máximo da variável X.

   De fato: temos que $x_i \geq x_{\min}$ e $x_i \leq x_{\max}$ $\forall i$. Então

$$E(X) = \sum_i x_i p_X(x_i) \leq \sum_i x_{\max} p_X(x_i) = x_{\max} \sum_i p_X(x_i) = x_{\max}$$

$$E(X) = \sum_i x_i p_X(x_i) \geq \sum_i x_{\min} p_X(x_i) = x_{\min} \sum_i p_X(x_i) = x_{\min}$$

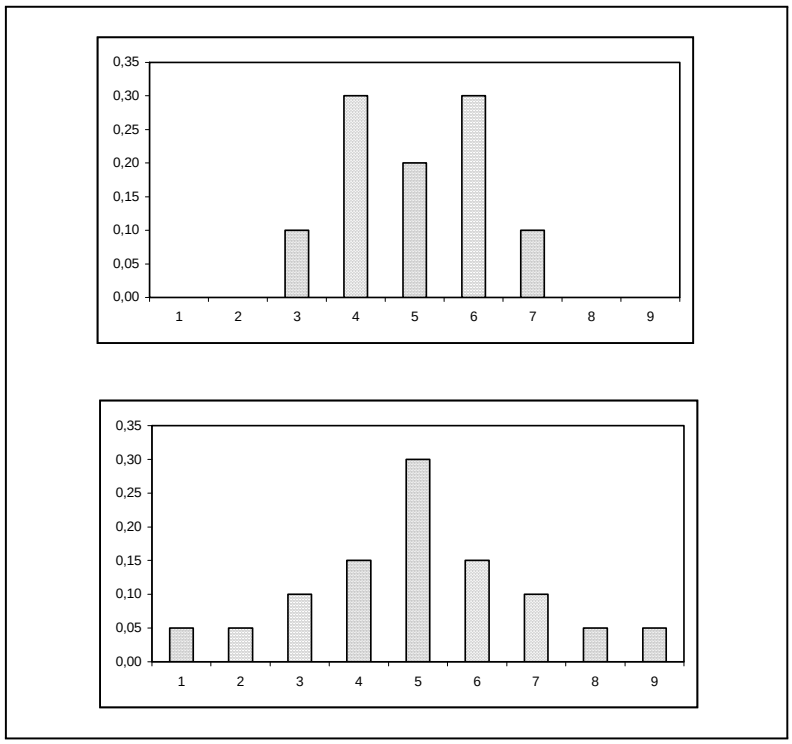
   Logo

$$x_{\min} \leq E(X) \leq x_{\max}$$

1.6.5 Variância de uma variável aleatória

A esperança de uma variável aleatória X é uma medida de posição. No entanto, é possível que duas variáveis bem diferentes tenham a mesma esperança, como é o caso das duas distribuições apresentadas na figura 1.11.

Figura 1.11: Distribuições com mesma esperança e diferentes dispersões



Como já visto no caso da Estatística Descritiva, é necessário mensurar outros aspectos da distribuição, entre eles a dispersão dos dados. Esta será medida através da distância quadrática de cada valor à média da distribuição; mais precisamente, definimos a *variância* de uma variável aleatória X como

$$Var(X) = E[X - E(X)]^2 \tag{1.12}$$

Definindo $g(X) = [X - E(X)]^2$, temos, pelo resultado 1.11, que

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X) &= \sum_x [x - E(X)]^2 p_X(x) = \sum_x \left\{x^2 - 2xE(X) + [E(X)]^2\right\} p_X(x) = \\
&= \sum_x x^2 p_X(x) - 2E(X) \sum_x x p_X(x) + [E(X)]^2 \sum_x p_X(x) = \\
&= \sum_x x^2 p_X(x) - 2[E(X)]^2 + [E(X)]^2 \times 1 = \\
&= \sum_x x^2 p_X(x) - [E(X)]^2
\end{aligned}$$

Mas, se definimos $h(X) = X^2$, então $E[h(X)] = \sum_x x^2 p_X(x)$. Logo, podemos escrever

$$\text{Var}(X) = EX^2 - [E(X)]^2 \tag{1.13}$$

que pode ser lida de maneira mais fácil como "a variância é a esperança do quadrado menos o quadrado da esperança". Lembre-se que tínhamos visto resultado análogo para a variância de um conjunto de dados. Vimos também que a unidade de medida da variância é igual ao quadrado da unidade da variável.

1.6.6 Propriedades da variância

Sendo uma medida de dispersão, é fácil ver as seguintes propriedades: seja X uma v.a. discreta com fdp $p_X(x)$ e sejam $a, b \neq 0$ constantes reais quaisquer.

1. $\text{Var}(a) = 0$ ("uma constante não tem dispersão")

   De fato:

   $$\text{Var}(a) = E[a - E(a)]^2 = E(a - a)^2 = E(0) = 0$$

   Note que aqui usamos a propriedade 1 da esperança.

2. $\text{Var}(X + a) = \text{Var}(X)$ ("somando uma constante, a dispersão - variância - não se altera")

   De fato:

   $$\text{Var}(X + a) = E[X + a - E(X + a)]^2 = E[X + a - E(X) - a]^2 = E[X - E(X)]^2 = \text{Var}(X)$$

   Note que aqui usamos a propriedade 2 da esperança.

3. $\text{Var}(bX) = b^2 \text{Var}(X)$ ("multiplicando por uma constante não nula, a variância fica multiplicada pelo quadrado da constante")

   De fato:

   $$\begin{aligned}
   \text{Var}(bX) &= E[bX - E(bX)]^2 = E[bX - bE(X)]^2 = E\left\{b^2 [X - E(X)]^2\right\} = \\
   &= b^2 E[X - E(X)]^2 = b^2 \text{Var}(X)
   \end{aligned}$$

   Note que aqui usamos a propriedade 3 da esperança.

4. $\text{Var}(a + bX) = b^2 \text{Var}(X)$

   Essa propriedade é conseqüência direta das propriedades anteriores.

1.6.7 Desvio padrão

Como já dito, a unidade de medida da variância é o quadrado da unidade de medida da variável em estudo, sendo assim, uma unidade sem significado físico. Para se ter uma medida de dispersão na mesma unidade dos dados, define-se o *desvio padrão* como a raiz quadrada da variância.

$$DP\left(X\right) = \sqrt{\text{Var}\left(X\right)} \tag{1.14}$$

Como conseqüência direta dessa definição e das propriedades da variância, seguem as seguintes propriedades do desvio padrão, que deverão ser demonstradas pelo leitor. Como antes, seja X uma v.a. discreta com fdp $p_X(x)$ e sejam $a, b \neq 0$ constantes reais quaisquer.

1. $DP(a) = 0$ (uma constante não tem dispersão)
2. $DP\left(X + a\right) = DP(X)$
3. $DP(bX) = |b|\, DP(X)$
   Aqui vale notar que $\sqrt{b^2} = |b|$.
4. $DP(a + bX) = |b|\, DP(X)$.

Exemplo 1.9

Um lojista mantém extensos registros das vendas diárias de um certo aparelho. O quadro a seguir dá a distribuição de probabilidades do número de aparelhos vendidos em uma semana. Se é de R$500,00 o lucro por unidade vendida, qual o lucro esperado em uma semana? Qual é o desvio padrão do lucro?

$x =$ número de aparelhos	0	1	2	3	4	5
$p_X(x)$	0,1	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1

Solução:

Seja X o número de aparelhos vendidos em uma semana e seja L o lucro semanal. Então, $L = 500X$.

$$E\left(X\right) = 0 \times 0,1 + 1 \times 0,1 + 2 \times 0,2 + 3 \times 0,3 + 4 \times 0,2 + 5 \times 0,1 = 2,7 \text{ aparelhos}$$

$$E\left(X^2\right) = 0^2 \times 0,1 + 1^2 \times 0,1 + 2^2 \times 0,2 + 3^2 \times 0,3 + 4^2 \times 0,2 + 5^2 \times 0,1 = 10,2 \text{ aparelhos}^2$$

$$\text{Var}\left(X\right) = 10,2 - \left(2,7\right)^2 = 2,91 \text{ aparelhos}^2$$

$$DP\left(X\right) = 1,706 \text{ aparelhos}$$

Com relação ao lucro semanal, temos que

$$E\left(L\right) = 500E\left(X\right) = R\$1350,00$$

$$DP\left(L\right) = R\$852,94$$

1.6.8 Exercícios resolvidos

1. Encontre o lucro médio e a variância do lucro do jogador do pôquer de dados do exercício resolvido 1 da seção 1.5.

   Solução:

$$E(L) = 5000 \times \frac{1}{1296} + 100 \times \frac{40}{1296} + 0 \times \frac{25}{1296} - 100 \times \frac{1230}{1296} = \frac{9000 - 12300}{1296} = -2,55$$

$$\begin{aligned} Var(L) &= 5000^2 \times \frac{1}{1296} + 100^2 \times \frac{40}{1296} + (-100)^2 \times \frac{1230}{1296} - \left(-\frac{3300}{1296}\right)^2 = \\ &= \frac{37700000}{1296} - \left(-\frac{3300}{1296}\right)^2 = \\ &= \frac{37700000 \times 1296 - 3300^2}{1296^2} = \frac{48859200000 - 10890000}{1679616} = 29083,0,22548 \\ DP(L) &= \sqrt{29083,0,22548} = 170,537 \end{aligned}$$

2. Encontre a esperança, a variância e o desvio padrão da variável do exercício resolvido 4 da seção 1.3.

   Solução:

   (a)

$$E(X) = \frac{0 \times 3 + 1 \times 20 + 2 \times 30 + 3 \times 12 + 4 \times 1}{66} = \frac{120}{66} = \frac{20}{11} = 1,818182$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \frac{0^2 \times 3 + 1^2 \times 20 + 2^2 \times 30 + 3^2 \times 12 + 4^2 \times 1}{66} - \left(\frac{20}{11}\right)^2 = \frac{264}{66} - \frac{400}{121} = \\ &= \frac{264 \times 11 - 2400}{121 \times 6} = \frac{504}{121 \times 6} = \frac{84}{121} = 0,694215 \Rightarrow DP(L) = \frac{\sqrt{84}}{11} = 0,8331956 \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times 0,104358 + 1 \times 0,298166 + 2 \times 0,340762 + 3 \times 0,194721 + 4 \times 0,055635 \\ &\quad +5 \times 0,006358 \\ &= 1,818182 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= 0^2 \times 0,104358 + 1^2 \times 0,298166 + 2^2 \times 0,340762 + 3^2 \times 0,194721 + \\ &\quad +4^2 \times 0,055635 + 5 \times 0,006358 - (1,818182)^2 \\ &= 1,157024 \Rightarrow DP(X) = 1,07565 \end{aligned}$$

   Note que as esperanças são iguais mas a variância, no caso de extrações sem reposição, é menor.

1.7 Exercícios propostos do capítulo 1

Seções 1.2 e 1.3

1. Considere uma urna contendo 3 bolas vermelhas e 5 pretas. Retire 3 bolas, sem reposição, e defina a v.a. X igual ao número de bolas pretas. Obtenha a fdp de X.

2. Repita o problema anterior, mas considerando extrações com reposição.

3. Suponha que uma moeda perfeita é lançada até que apareça cara pela primeira vez. Seja X o número de lançamentos até que isso aconteça. Obtenha a função de distribuição (fdp) de X. Repita o exercício supondo que a probabilidade de cara é p, $p \neq \frac{1}{2}$.

4. Uma moeda perfeita é lançada 4 vezes. Seja Y o número de caras obtidas. Obtenha a fdp de Y.

5. Repita o problema anterior, considerando agora que a moeda é viciada, sendo a probabilidade de cara dada por $p, 0 < p < 1, p \neq 1/2$.

6. Generalize o problema 5, para n lançamentos da moeda.

7. Seja X uma v.a. cuja fdp é dada a seguir:

x	-2	-1	1	2	4	6	7
$p_X(x)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{5}{42}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{5}{14}$

   (a) Calcule $\Pr\left(X^2 > 9\right)$.

   (b) Calcule $\Pr\left(|\, X \,| \leq 2\right)$.

Seção 1.4

8. Suponha que a v.a. V tenha a seguinte distribuição. Obtenha a fda de V e faça seu gráfico.

v	0	1
$p_V(v)$	p	$1-p$

9. Sabe-se que a v.a. X assume os valores $1, 2$ e 3 e que sua fda $F_X(x)$ é tal que

$$\begin{array}{l} F_X(1) - F_X(1-) = 1/3 \\ F_X(2) - F_X(2-) = 1/6 \\ F_X(3) - F_X(3-) = 1/2 \end{array}.$$

   Obtenha a fdp de X, a fda e os respectivos gráficos.

Seção 1.5

10. No problema 1, obtenha a distribuição das v.a. $3X$ e X^2.

11. O tempo T, em minutos, necessário para um operário processar certa peça é uma v.a. com fdp dada na tabela abaixo.

t	2	3	4	5	6	7
$p_T(t)$	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1

Para cada peça processada, o operário ganha um fixo de 2 u.m. (unidade monetária) mas, se ele processa a peça em menos de 6 minutos, ganha 0,50 u.m. por cada minuto poupado. Encontre a função de distribuição da v.a. G = quantia (em u.m.) ganha por peça.

Seção 1.6

12. Encontre a média e o desvio padrão da v.a. V do exercício 8.

13. Encontre a média e o desvio padrão da v.a. G do exercício 11.

14. Seja X com distribuição dada na tabela abaixo. Calcule $E(X)$. Considere a v.a. $(X-a)^2$, e calcule $E(X-a)^2$ para $a = 0, 1/4, 1/2, 3/4$ e 1. Obtenha o gráfico de $g(a) = E(X-a)^2$. Para qual valor de a, $g(a)$ é mínimo?

x	0	1	2
$p_X(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

15. Considere o lançamento de três moedas e denote por K a ocorrência de cara e por C a ocorrência de coroa. Se ocorre o evento CCC, dizemos que temos uma seqüência, ao passo que se ocorre o evento CKC temos três seqüências. Defina a v.a. X = "número de caras obtidas" e Y = "número de seqüências obtidas". Obtenha as distribuições de X e Y. Calcule $E(X), E(Y), Var(X)$ e $Var(Y)$.

16. Um vendedor de equipamentos pesados pode visitar, num dia, um ou dois clientes, com probabilidade de 1/3 e 2/3 respectivamente. De cada contato, pode resultar a venda de um equipamento por 50.000 u.m. com probabilidade 1/10 ou nenhuma venda, com probabilidade 9/10. Indicando por Y o valor total de vendas diárias deste vendedor, escreva a função de probabilidade de Y e calcule o valor total esperado de vendas diárias.

17. Calcule a média e a variância da v.a. Y definida nos problemas 4 e 5

Exercícios complementares

18. As probabilidades de que haja 1,2,3,4 ou 5 pessoas em cada carro que se dirige ao Barra Shopping em um sábado são, respectivamente, 0,05; 0,20; 0,40; 0,25 e 0,10. Qual o número médio de pessoas por carro? Se chegam ao shopping 50 carros por hora, qual o número esperado de pessoas no período de 13 às 18 horas?

19. Generalize o exercício 14: se X é uma variável aleatória, encontre o valor de a que minimiza $E(X-a)^2$. Qual o valor da função nesse ponto de mínimo?

20. Na produção de uma peça são empregadas 2 máquinas. A primeira é utilizada para efetivamente produzir as peças e o custo de produção é de R$50,00 por peça. Das peças produzidas nessa máquina, 90% são perfeitas. As peças defeituosas são colocadas na segunda máquina para a tentativa de recuperação. Nessa segunda máquina o custo de produção é de R$25,00 mas apenas 60% das peças são de fato recuperadas. Cada peça perfeita é vendida por R$90,00 e cada peça defeituosa é vendida por R$20,00. Seja L o lucro por peça. Obtenha:

    (a) a função de distribuição de probabilidades de L;

    (b) a função de distribuição acumulada de L;

    (c) o lucro esperado por peça;

    (d) a variância do lucro.

21. Um jogador A paga R$5,00 a B e lança um dado. Se sair face 3, ganha R$20,00. Se sair faces 4,5, ou 6, perde. Se sair faces 1 ou 2, tem o direito de jogar novamente. Desta vez lança 2 dados. Se saírem duas faces 6, ganha R$50,00. Se sair uma face 6, recebe o dinheiro de volta. Nos demais casos, perde. Seja X o lucro líquido do jogador A nesse jogo.

    (a) Calcule a função de distribuição de probabilidade de X.

    (b) Calcule o lucro esperado do jogador A.

22. A Transportadora Yuki possui uma frota de quatro caminhões de aluguel. Sabe-se que o aluguel é feito por dia e que a distribuição diária do número X de caminhões alugados é a seguinte:

x	0	1	2	3	4
$\Pr(X = x)$	0,10	0,20	0,30	0,30	0,10

    Pede-se calcular:

    (a) o número médio diário de caminhões alugados, bem como o desvio padrão;

    (b) a média e o desvio padrão do lucro diário, sabendo-se que:

    - o valor do aluguel por dia é de R$300,00;
    - a despesa total diária com manutenção de cada veículo é de R$140,00 quando este é alugado e de R$15,00 quando o veículo não é alugado.

23. A loteria Ligeirinha distribui prêmios entre seus clientes da seguinte forma:

    - 400 prêmios de R$100,00;
    - 50 prêmios de R$200,00;
    - 10 prêmios de R$400,00.

    Admitindo-se que em um concurso sejam emitidos e vendidos 10.000 bilhetes, qual o preço justo a se pagar por um bilhete?

24. Dois jogadores fazem uma aposta. O jogador A paga R$100,00 para o jogador B e lança duas moedas viciadas não simultaneamente. A probabilidade de sair cara na primeira moeda é 0,3 e na segunda moeda é 0,2. Se sair cara na primeira moeda, o jogador A tem o direito de lançar a segunda moeda: se sair cara, ganha R$200,00 e se sair coroa, ganha R$100,00. Se sair coroa na primeira moeda, A perde. Seja X o lucro do jogador A. Encontre a função de distribuição de probabilidade de X e o lucro esperado de A neste jogo.

Capítulo 2

Algumas distribuições discretas

2.1 Introdução

Considere as seguintes situações:

1. (a) Lança-se uma moeda e observa-se o resultado obtido e (b) pergunta-se a um eleitor se ele vai votar no candidato A ou B;

2. (a) Lança-se uma moeda n vezes e observa-se o número de caras obtidas e (b) de uma grande população, extrai-se uma amostra de n eleitores e pergunta-se a cada um deles em qual dos candidatos A ou B eles votarão e conta-se o número de votos do candidato A;

3. (a) De uma urna com P bolas vermelhas e Q bolas brancas, extraem-se n bolas sem reposição e conta-se o número de bolas brancas e (b) de uma população com P pessoas a favor do candidato A e Q pessoas a favor do candidato B, extrai-se uma amostra de tamanho n sem reposição e conta-se o número de pessoas a favor do candidato A.

Em cada uma das situações, os experimentos citados têm algo em comum: em um certo sentido, temos a "mesma situação" mas em contextos diferentes. Por exemplo, na situação 1, cada um dos experimentos tem dois resultados possíveis e observamos o resultado obtido. Na situação 3, temos uma população dividida em duas categorias e dela extraímos uma amostra sem reposição; o interesse está no número de elementos de uma determinada categoria.

Na prática, existem muitas outras situações que podem se "encaixar" nos modelos acima e mesmo em outros modelos. O que veremos nesse capítulo são alguns *modelos* de variáveis aleatórias discretas que podem descrever situações como as listadas acima. Nesse contexto, um modelo será definido por uma variável aleatória e sua função de distribuição de probabilidade, explicitando-se claramente as hipóteses de validade. De posse desses elementos, poderemos analisar diferentes situações práticas para tentar "encaixá-las" em algum dos modelos dados.

Nesse capítulo serão descritas as distribuições de probabilidade discretas mais usuais. A introdução de cada uma delas será feita através de um exemplo clássico (moeda, urna, baralho, etc.) e em seguida serão explicitadas as características do experimento. Tais características são a ferramenta necessária para sabermos qual modelo se aplica a uma determinada situação prática. Definida a distribuição, calculam-se a média e a variância. Na última seção do capítulo são apresentados alguns resultados de cálculo utilizados na obtenção de tais fórmulas.

2.2 Distribuição de Bernoulli

2.2.1 Definição

Considere o lançamento de uma moeda. A característica desse experimento aleatório é que ele possui apenas dois resultados possíveis. Uma situação análoga surge quando da extração da carta de um baralho, onde o interesse está apenas na cor (preta ou vermelha) da carta sorteada.

Um *experimento de Bernoulli* é um experimento aleatório com apenas dois resultados possíveis; por convenção, um deles é chamado "sucesso" e o outro "fracasso".

A *distribuição de Bernoulli* é a distribuição de uma v.a. X associada a um experimento de Bernoulli, onde se define $X = 1$ se ocorre sucesso e $X = 0$ se ocorre fracasso. Chamando de p a probabilidade de sucesso ($0 < p < 1$), a distribuição de Bernoulli é:

x	0	1
$\Pr(X = x)$	$1-p$	p

(2.1)

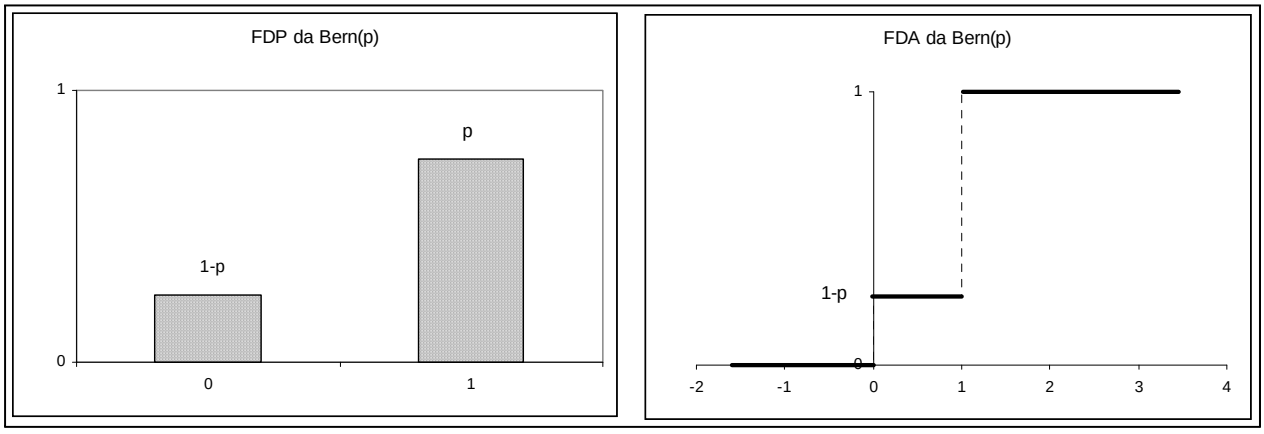
Obviamente, as condições definidoras de uma fdp são satisfeitas, uma vez que $p > 0$, $1 - p > 0$ e $p+(1-p) = 1$. O valor de p é o único valor que precisamos conhecer para determinar completamente a distribuição; ele é, então, chamado *parâmetro* da distribuição de Bernoulli. Vamos denotar a distribuição de Bernoulli com parâmetro p por $Bern(p)$.

A função de distribuição acumulada é dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1-p & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Na figura 2.1 temos os gráficos da fdp e da fda de uma distribuição de Bernoulli.

Figura 2.1: Distribuição de Bernoulli com parâmetro p



2.2.2 Esperança

Seja $X \sim Bern(p)$ (lê-se: a variável aleatória X tem distribuição de Bernoulli com parâmetro p). Então, $E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p$. Logo,

$$X \sim Bern(p) \quad \Rightarrow \quad E(X) = p \tag{2.2}$$

2.2.3 Variância

Seja $X \sim Bern(p)$. Então,

$$E(X^2) = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p \Rightarrow E(X^2) = p \Rightarrow Var(X) = p - p^2$$

Logo,

$$X \sim Bern(p) \quad \Rightarrow \quad Var(X) = p(1-p) \tag{2.3}$$

2.3 Distribuição Geométrica

2.3.1 Definição

Considere a situação descrita no exercício 3 do capítulo 1: uma moeda com probabilidade p de cara é lançada até que apareça cara pela primeira vez. Como visto, tal experimento gera uma v.a. discreta $X =$ "número de repetições necessárias até a ocorrência da primeira cara" com infinitos valores. Essa é uma situação onde é impossível encontrar algum paralelo na prática; no entanto, o "infinito" na prática, em geral, é substituído por um "valor muito grande". Considere uma população muito grande onde $p\%$ das pessoas sofrem de uma doença desconhecida. Precisa-se encontrar uma pessoa portadora da doença para que os médicos possam estudá-la. Quantas pessoas teremos que examinar até encontrar uma portadora? Em ambas as situações, cada repetição do experimento (lançamento da moeda ou exame de uma pessoa) tem dois resultados possíveis (cara ou coroa e Portadora ou não protadora da doença), ou seja, temos experimentos de Bernoulli.

Consideremos *repetições independentes de um experimento de Bernoulli com parâmetro p*. Vamos definir a seguinte v.a. associada a esse experimento aleatório:

$$X = \text{número de repetições necessárias para a obtenção do primeiro sucesso} \tag{2.4}$$

Os valores possíveis de X são 1 (primeiro sucesso na primeira repetição), 2 (primeiro sucesso na segunda repetição e, portanto fracasso na primeira), 3 (primeiro sucesso na terceira repetição e, portanto, fracasso nas duas primeiras), etc. Esse é um exemplo de v.a. discreta onde o espaço amostral, enumerável, é infinito.

Para calcular a probabilidade de $X = k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, devemos notar que tal evento corresponde à ocorrência de fracassos nas $k-1$ primeiras repetições e sucesso na k-ésima repetição. Denotando por F_i e S_i a ocorrência de fracasso e sucesso na i-ésima repetição respectivamente, temos a seguinte equivalência de eventos:

$$\{X = k\} = \{F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap S_k\}$$

Como as repetições são independentes, segue que

$$\begin{aligned}\Pr(X=k) &= \Pr(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap S_k) = \Pr(F_1) \times \Pr(F_2) \times \cdots \times \Pr(F_{k-1}) \times \Pr(S_k) = \\ &= (1-p) \times (1-p) \times \cdots \times (1-p) \times p\end{aligned}$$

ou seja,

$$\Pr(X=k) = (1-p)^{k-1}p \qquad k = 1, 2, 3, \cdots \tag{2.5}$$

Dizemos que X tem *distribuição geométrica com parâmetro* p (o único valor necessário para especificar completamente a fdp) e vamos representar tal fato por $X \sim Geom(p)$.

As características definidoras desse modelo são: (i) repetições de um mesmo experimento de Bernoulli, o que significa que em todas elas a probabilidade de sucesso (e, portanto, de fracasso) é a mesma e (ii) as repetições são independentes. No caso do lançamento de uma moeda essas hipóteses são bastante plausíveis mas no caso da doença a hipótese de independência pode não ser satisfeita; por exemplo, pode haver um componente de hereditariedade.

Para mostrar que (2.5) realmente define uma fdp, temos que mostrar que a soma das probabilidades, isto é, a probabilidade do espaço amostral é 1 (obviamente, $\Pr(X=k) \geq 0$). Para isso vamos usar o seguinte resultado sobre séries geométricas[1]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} \quad \text{se } 0 < |a| < 1 \tag{2.6}$$

Temos que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Pr(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1}.$$

Fazendo $j = k-1$, temos que $k = 1 \Rightarrow j = 0$ e $k = \infty \Rightarrow j = \infty$. Portanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Pr(X=k) = p\sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^{j}$$

Usando (2.6), obtém-se que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Pr(X=k) = p \times \frac{1}{1-(1-p)} = 1.$$

2.3.2 Esperança

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \Pr(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}$$

Fazendo a mudança de variável $k-1 = j$, resulta que $k = j+1$, $k = 1 \Rightarrow j = 0$ e $k = \infty \Rightarrow j = \infty$. Logo,

$$E(X) = p\sum_{j=0}^{\infty} (j+1)(1-p)^{j}$$

[1]Na última seção são apresentados esse e outros resultados de cálculo, que serão usados para demonstrar propriedades de algumas distribuições discretas de probabilidade.

Usando o resultado (2.37) da seção 2.8 com $r = 1 - p$, obtemos que:

$$E(X) = p \times \frac{1}{[1-(1-p)]^2} = \frac{p}{p^2}$$

Logo,

$$X \sim Geom(p) \Rightarrow E(X) = \frac{1}{p} \tag{2.7}$$

2.3.3 Variância

Para calcular a variância, temos que calcular $E(X^2)$. Por definição,

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^2 - k + k\right)(1-p)^{k-1} = \\ &= p\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^2 - k\right)(1-p)^{k-1} + p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} \\ &= p\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-1} + p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} \end{aligned}$$

No primeiro somatório, a parcela correspondente a $k = 1$ é nula, logo, podemos escrever (note o índice do somatório!):

$$\begin{aligned} E(X^2) &= p\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2}(1-p) + \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = \\ &= p(1-p)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} \end{aligned}$$

O segundo somatório é a esperança da distribuição geométrica com parâmetro p; logo, ele é igual a $\frac{1}{p}$. Fazendo a mudança de variável $k - 2 = j$ no primeiro somatório, resulta que

$$E(X^2) = p(1-p)\sum_{j=0}^{\infty}(j+2)(j+1)(1-p)^j + \frac{1}{p}$$

Usando os resultados (2.39) da seção 2.8 com $r = 1 - p$, obtemos que:

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= p(1-p) \times \frac{2}{[1-(1-p)]^3} + \frac{1}{p} = \\ &= \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2-2p+p}{p^2} = \frac{2-p}{p^2} \end{aligned}$$

Segue que:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2}$$

Logo,

$$X \sim Geom(p) \Rightarrow Var(X) = \frac{1-p}{p^2} \tag{2.8}$$

2.3.4 Exercícios resolvidos

1. Um atirador acerta na mosca do alvo, 20% dos tiros. Qual a probabilidade de ele acertar na mosca pela primeira vez no 10º tiro?

   Solução:

   Podemos pensar os tiros como experimentos independentes de Bernoulli (acerta ou não acerta). A probabilidade de sucesso (acertar no alvo) é $p = 0,20$. Estamos querendo o número de tiros até o primeiro acerto e calcular a probabilidade desse número ser 10. Seja $X =$ número de tiros até primeiro acerto. Então, $X \sim Geom(0,20)$ e $\Pr(X = 10) = 0,8^9 \times 0,2 = 0,02684$.

2. Joga-se um dado equilibrado. Qual é a probabilidade de serem necessários 10 lançamentos até a primeira ocorrência de um seis?

   Solução:

   Nesse caso, sucesso é a ocorrência de face seis. Logo, Pr(sucesso) $= p = \frac{1}{6}$ e Pr(fracasso) $= 1 - p = \frac{5}{6}$. Seja $X =$ número de lançamentos até primeiro seis. Então, $X \sim geom\left(\frac{1}{6}\right)$ e o problema pede $\Pr(X = 10) = \left(\frac{5}{6}\right)^9 \left(\frac{1}{6}\right) = 0,03230$.

2.4 Distribuição binomial negativa

2.4.1 Definição

Consideremos novamente repetições independentes de um experimento de Bernoulli com probabilidade p de sucesso. Vamos considerar agora uma generalização da v.a. geométrica, no seguinte sentido:

$$X = \text{número de repetições necessárias até a obtenção do } r\text{-ésimo sucesso, } r \geq 1 \tag{2.9}$$

Note que $r = 1$ é a geométrica.

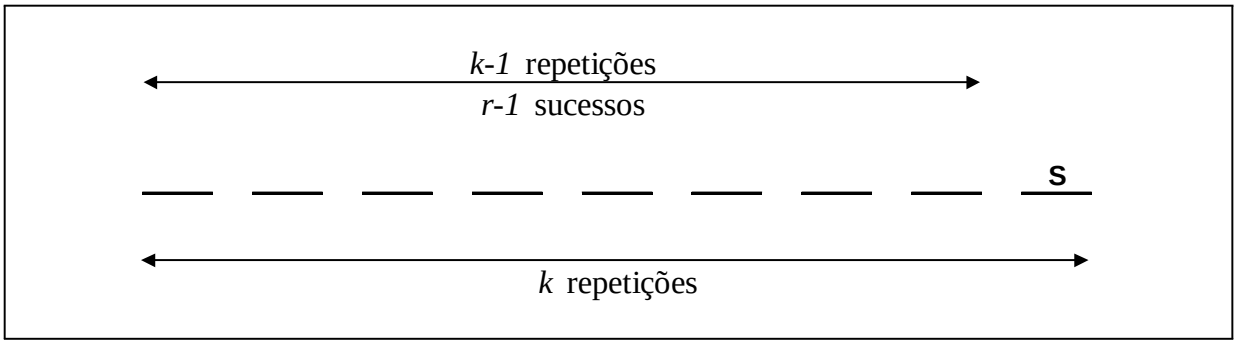
Para definir os possíveis valores de X, devemos notar que para ter r sucessos, são necessários no mínimo r repetições. Logo, os possíveis valores de X são $r, r+1, r+2, \ldots$. O evento $X = k$ indica que foram necessárias k repetições para obter r sucessos e, portanto, $k - r$ fracassos. Pela definição da variável, a última repetição resultou em sucesso e os outros $r-1$ sucessos podem estar em quaisquer das $k-1$ posições restantes (ver figura 2.2).

Uma seqüência possível de resultados é ter os $r-1$ sucessos nas primeiras posições, os $k-r$ fracassos nas posições seguintes e o último sucesso na última posição: $S_1 \ldots S_{r-1} F_r \ldots F_{k-1} S_k$. A probabilidade de tal seqüência é dada pelo produto das probabilidades, já que as repetições são independentes, isto é:

$$\begin{aligned} & \Pr(S_1 \cap \ldots \cap S_{r-1} \cap F_r \cap \ldots F_{k-1} \cap S_k) = \\ = \; & \Pr(S_1) \times \cdots \times \Pr(S_{r-1}) \times \Pr(F_r) \times \cdots \times \Pr(F_{k-1}) \times \Pr(S_k) \\ = \; & p \times \cdots \times p \times (1-p) \times \cdots \times (1-p) \times p = p^r (1-p)^{k-r} \end{aligned}$$

Mas existem $\binom{k-1}{r-1}$ maneiras de arrumar $r-1$ sucessos em $k-1$ posições e as seqüências resultantes têm todas a probabilidade acima. Como elas constituem eventos mutuamente exclusivos, a

Figura 2.2: Ilustração do evento $\{X = k\}$ para a v.a. binomial negativa



probabilidade da união delas, que é $\Pr(X = k)$, é a soma das probabilidades, ou seja:

$$\Pr(X = k) = p^r (1-p)^{k-r} + p^r (1-p)^{k-r} + \cdots + p^r (1-p)^{k-r}$$

onde o número de parcelas é $\binom{k-1}{r-1}$. Logo

$$\Pr(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \qquad k \geq r \tag{2.10}$$

Essa distribuição, caracterizada pelos parâmetros r e p, é chamada *distribuição binomial negativa*, também conhecida como *distribuição de Pascal*. Se X tem tal distribuição, vamos representar tal fato por $X \sim BinNeg(r, p)$.

Como $\Pr(X = k) \geq 0$, para mostrar que (2.10) realmente define uma fdp, fica faltando mostrar que

$$\sum_{k=r}^{\infty} \Pr(X = k) = \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} = 1.$$

Fazendo $k - r = j$, temos que $k = r \Rightarrow j = 0$ e $k = r + j$. Logo

$$\sum_{k=r}^{\infty} \Pr(X = k) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{r+j-1}{r-1} p^r (1-p)^j = p^r \sum_{j=0}^{\infty} \binom{r-1+j}{r-1} (1-p)^j$$

Usando o resultado dado na equação (2.42) da seção 2.8 com $k = r - 1$ e $r = 1 - p$, obtemos que:

$$\sum_{k=r}^{\infty} \Pr(X = k) = p^r \times \frac{1}{[1-(1-p)]^{r-1+1}} = 1$$

2.4.2 Esperança

Por definição, e usando a mesma mudança de variável usada anteriormente, temos que

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=r}^{\infty} k\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r} = p^r\sum_{j=0}^{\infty}(j+r)\binom{r+j-1}{r-1}(1-p)^j = \\
&= p^r\sum_{j=0}^{\infty} j\binom{r-1+j}{r-1}(1-p)^j + rp^r\sum_{j=0}^{\infty}\binom{r-1+j}{r-1}(1-p)^j = \qquad \text{(por 2.42)} \\
&= p^r\sum_{j=0}^{\infty} j\binom{r-1+j}{r-1}(1-p)^j + \frac{rp^r}{[1-(1-p)]^{r-1+1}} = \\
&= p^r\sum_{j=0}^{\infty} j\binom{r-1+j}{r-1}(1-p)^j + r \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Vamos calcular esse somatório. A primeira observação é que, quando $j = 0$, a parcela correspondente no somatório é nula; logo, podemos começar o somatório de $j = 1$, ou seja:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} j\binom{r-1+j}{r-1}(1-p)^j &= \sum_{j=1}^{\infty} j\binom{r-1+j}{r-1}(1-p)^j = \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} j \times \frac{(r-1+j)!}{(r-1)!\,(r-1+j-r+1)!}(1-p)^j \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} j \times \frac{(r-1+j)!}{(r-1)!j!}(1-p)^j = \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} j \times \frac{(r-1+j)!}{(r-1)!j\,(j-1)!}(1-p)^j
\end{aligned}$$

Como $j \neq 0$, podemos dividir por j, o que resulta na simplificação:

$$\sum_{j=0}^{\infty} j\binom{r-1+j}{r-1}(1-p)^j = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(r+j-1)!}{(r-1)!(j-1)!}(1-p)^j = (1-p)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(r+j-1)!}{(r-1)!(j-1)!}(1-p)^{j-1}$$

Fazendo $j - 1 = n$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} j\binom{r-1+j}{r-1}(1-p)^j &= (1-p)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(r+n)!}{(r-1)!n!}(1-p)^n = \\
&= (1-p)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r(r+n)!}{r(r-1)!n!}(1-p)^n = \\
&= r(1-p)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(r+n)!}{r!n!}(1-p)^n \\
&= r(1-p)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{r+n}{n}(1-p)^n
\end{aligned}$$

Usando novamente o resultado (2.42) da seção 2.8 com $r = 1 - p$ e $k = r$, otém-se que:

$$\sum_{j=0}^{\infty} j\binom{r-1+j}{r-1}(1-p)^j = r(1-p) \times \frac{1}{[1-(1-p)]^{r+1}} = \frac{r(1-p)}{p^{r+1}} \tag{2.12}$$

Substituindo em (2.11), obtemos que:

$$E(X) = p^r \times \frac{r(1-p)}{p^{r+1}} + r = \frac{r(1-p)}{p} + r$$

Logo,

$$X \sim BinNeg(r,p) \Rightarrow E(X) = \frac{r}{p} \tag{2.13}$$

2.4.3 Variância

Vamos calcular $E(X^2)$. Como antes, vamos usar a mudança de variável $k - r = j$.

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=r}^{\infty} k^2\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r} = \\
&= p^r\sum_{j=0}^{\infty}(j+r)^2\binom{r+j-1}{r-1}(1-p)^j = \\
&= p^r\sum_{j=0}^{\infty}(r^2+2rj+j^2)\binom{r-1+j}{r-1}(1-p)^j = \\
&= r^2p^r\sum_{j=0}^{\infty}\binom{r-1+j}{r-1}(1-p)^j + 2rp^r\sum_{j=0}^{\infty}j\binom{r-1+j}{r-1}(1-p)^j + p^r\sum_{j=0}^{\infty}j^2\binom{r-1+j}{r-1}(1-p)^j
\end{aligned}$$

Usando os resultados (2.42) da seção 2.8 com $k = r - 1$ e $r = 1 - p$ e (2.12) anterior, temos que:

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= r^2p^r \times \frac{1}{[1-(1-p)]^{r-1+1}} + 2rp^r \times \frac{r(1-p)}{p^{r+1}} + p^r\sum_{j=0}^{\infty}j^2\binom{r-1+j}{r-1}(1-p)^j \quad (2.14)\\
&= r^2 + \frac{2r^2(1-p)}{p} + p^r\sum_{j=0}^{\infty}j^2\binom{r-1+j}{r-1}(1-p)^j = \\
&= \frac{2r^2-r^2p}{p} + p^r\sum_{j=0}^{\infty}j^2\binom{r-1+j}{r-1}(1-p)^j \quad (2.15)
\end{aligned}$$

De modo análogo, esse somatório é calculado, notando inicialmente que, quando $j = 0$, a parcela do somatório é nula; logo,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} j^2 \binom{r-1+j}{r-1}(1-p)^j &= \sum_{j=1}^{\infty} j^2 \times \frac{(r-1+j)!}{(r-1)!(r-1+j-r+1)!}(1-p)^j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} j^2 \times \frac{(r-1+j)!}{(r-1)!j\,(j-1)!}(1-p)^j = \\ &= (1-p)\sum_{j=1}^{\infty} j \frac{(r+j-1)!}{(r-1)!(j-1)!}(1-p)^{j-1} =\end{aligned}$$

Fazendo $j-1=n$, obtemos que:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} j^2 \binom{r-1+j}{r-1}(1-p)^j &= (1-p)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{(r+n)!}{(r-1)!n!}(1-p)^n = \\ &= (1-p)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{r(r+n)!}{r\,(r-1)!n!}(1-p)^n = \\ &= r(1-p)\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{(r+n)!}{r!n!}(1-p)^n + r(1-p)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(r+n)!}{r!n!}(1-p)^n = \\ &= r(1-p)\sum_{n=0}^{\infty} n\binom{r+n}{r}(1-p)^n + r(1-p)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{r+n}{n}(1-p)^n\end{aligned}$$

Usando o resultado (2.12) com r no lugar de $r-1$ e o resultado (2.42) da seção 2.8, obtemos:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} j^2 \binom{r-1+j}{r-1}(1-p)^j &= (1-p)r \times \frac{(1-p)(r+1)}{p^{r+2}} + (1-p)r \times \frac{1}{[1-(1-p)]^{r+1}} = \\ &= \frac{(1-p)^2 r(r+1)}{p^{r+2}} + \frac{(1-p)r}{p^{r+1}} \\ &= \frac{(1-2p+p^2)(r^2+r)+pr(1-p)}{p^{r+2}} = \\ &= \frac{r^2-2pr^2+p^2r^2+r-2pr+p^2r+pr-p^2r}{p^{r+2}} = \\ &= \frac{r^2-2pr^2+p^2r^2+r-pr}{p^{r+2}}\end{aligned}$$

Substituindo em (2.15), obtemos que:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{2r^2 - r^2p}{p} + p^r \times \frac{r^2 - 2pr^2 + p^2r^2 + r - pr}{p^{r+2}} = \\ &= \frac{2r^2 - r^2p}{p} + \frac{r^2 - 2pr^2 + p^2r^2 + r - pr}{p^2} \\ &= \frac{2r^2p - r^2p^2 + r^2 - 2pr^2 + p^2r^2 + r - pr}{p^2} = \\ &= \frac{r^2 + r - pr}{p^2} \end{aligned}$$

Logo,

$$Var(X) = \frac{r^2 + r - pr}{p^2} - \left(\frac{r}{p}\right)^2 = \frac{r^2 + r - pr - r^2}{p^2}$$

ou

$$X \sim BinNeg(r, p) \Rightarrow Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2} \tag{2.16}$$

2.4.4 Exercícios resolvidos

1. Joga-se um dado equilibrado. Qual é a probabilidade de serem necessários 10 lançamentos até a terceira ocorrência de um seis?

   Solução:

   Nesse caso, sucesso é a ocorrência de face seis. Logo, Pr(sucesso) $= p = \frac{1}{6}$ e Pr(fracasso) $= 1 - p = \frac{5}{6}$. Seja $X =$ número de lançamentos até terceiro seis. Então, $X \sim BinNeg\left(3; \frac{1}{6}\right)$ e o problema pede $\Pr\left(X = 10\right) = \binom{9}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^7\left(\frac{1}{6}\right)^3 = 0,046514$.

2. Deseja-se produzir 5 peças boas, em uma máquina que dá 20% de peças defeituosas. Qual é a probabilidade de ser necessário fabricar 8 peças para se conseguir as 5 peças boas?

   Solução:

   Seja $X =$ número de peças fabricadas até a obtenção de 5 boas (sucesso). Temos que Pr(peça boa) $= 0,80$ e Pr(peça defeituosa) $= 0,20$. Logo, $X \sim BinNeg\left(5; 0,80\right)$. O problema pede $\Pr(X = 8) = \binom{7}{4}\left(0,80\right)^5\left(0,20\right)^3 = 0,0917504$.

2.5 Distribuição Binomial

2.5.1 Definição

Consideremos n repetições independentes de um experimento de Bernoulli com parâmetro p (pense em n lançamentos de uma moeda com probabilidade p de cara). Vamos definir a seguinte v.a. associada a este experimento:

$$X = \text{número de sucessos obtidos nas } n \text{ repetições} \tag{2.17}$$

Lembre-se que você encontrou esta situação no exercício 5 do capítulo 1. Os valores possíveis de X são 0 (só ocorrem fracassos), 1 (ocorre apenas 1 sucesso), 2 (ocorrem 2 sucessos), ... , n (ocorrem apenas sucessos). Vamos calcular a probabilidade de $X = k$, onde $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. O evento $X = k$ equivale à ocorrência de k sucessos e $n - k$ fracassos. Consideremos uma situação específica: as k primeiras repetições são "sucesso". Como as repetições são independentes, temos a probabilidade da interseção de eventos independentes; logo,

$$\begin{aligned} & \Pr(S_1 \cap \ldots \cap S_k \cap F_{k+1} \cap \ldots \cap F_n) = \Pr(S_1) \times \cdots \times \Pr(S_k) \times \Pr(F_{k+1}) \times \cdots \times \Pr(F_n) = \\ = \;& p \times p \times \cdots \times p \times (1-p) \times (1-p) \times \cdots \times (1-p) = p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Mas essa é uma ordenação específica, onde os sucessos são os primeiros resultados. Na verdade, os k sucessos podem estar em qualquer posição e ainda teremos $X = k$. O número de maneiras possíveis de obter k sucessos em n repetições nada mais é que o número de combinações de n elementos tomados k a k, ou seja, $\binom{n}{k}$. Como cada uma dessas maneiras tem a mesma probabilidade acima e elas são eventos mutuamente exclusivos, resulta que

$$\Pr(X = k) = p^k (1-p)^{n-k} + p^k (1-p)^{n-k} + \cdots + p^k (1-p)^{n-k}$$

onde o número de parcelas é $\binom{n}{k}$. Logo

$$\Pr(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{2.18}$$

Essa é a *distribuição binomial*; note que para determiná-la precisamos conhecer os valores de n e p, que são os parâmetros da distribuição. Vamos usar a seguinte notação: $X \sim bin(n; p)$.

Note que na distribuição binomial, o número de lançamentos é fixo e o número de sucessos é a variável de interesse; note o contraste com a distribuição binomial negativa onde o número de lançamentos é variável e o número de sucessos é um número fixo (pré-determinado).

Para mostrar que (2.18) realmente define uma fdp falta mostrar que

$$\sum_{k=0}^{n} \Pr(X = k) = 1.$$

já que, obviamente, $\Pr(X = k) \geq 0$. De fato: o teorema do binômio de Newton nos diz que, se x e y são números reais e n é um inteiro positivo, então

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{2.19}$$

Fazendo $x = p$ e $y = 1 - p$ em (2.19), obtém-se:

$$[p + (1-p)]^n = 1^n = 1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \Pr(X = k)$$

o que prova o resultado.

2.5.2 Esperança

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k \Pr(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Quando $k = 0$, a parcela correspondente no somatório é nula. Logo, podemos escrever (note o índice do somatório!):

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k\,(k-1)!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

e como $k \neq 0$, podemos fazer a divisão, o que resulta na simplificação

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n\,(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(p \times p^{k-1}\right) (1-p)^{n-k} = \\ &= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Fazendo $j = k - 1$, temos que $k = j + 1$, $k = 1 \Rightarrow j = 0$ e $k = n \Rightarrow j = n - 1$. Logo,

$$E(X) = np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j}$$

Mas nesse somatório temos as probabilidades de uma distribuição binomial com parâmetros $(n-1)$ e p; como estamos somando as probabilidades de todos os pontos do espaço amostral, segue que esse somatório é igual a 1 (note que essa é a expressão do binômio de Newton para $(x+y)^{n-1}$ com $x = p$ e $y = 1 - p$) e, portanto,

$$X \sim bin(n,p) \quad \Rightarrow \quad E(X) = np \tag{2.20}$$

2.5.3 Variância

Vamos calcular $E(X^2)$. Usando raciocínio análogo ao usado no cálculo da esperança, temos que:

$$
\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{n!}{k\,(k-1)!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n\,(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(p \times p^{k-1}\right) (1-p)^{n-k} = \\
&= np \sum_{k=1}^{n} k \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = \\
&= np \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \frac{(n-1)!}{j!\,(n-j-1)!} p^j (1-p)^{n-j-1} = \\
&= np \sum_{j=0}^{n-1} j \frac{(n-1)!}{j!\,(n-j-1)!} p^j (1-p)^{n-j-1} + np \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!\,(n-j-1)!} p^j (1-p)^{n-j-1} = \\
&= np \sum_{j=0}^{n-1} j \frac{(n-1)!}{j!\,(n-1-j)!} p^j (1-p)^{n-1-j} + np \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!\,(n-1-j)!} p^j (1-p)^{n-1-j} = \\
&= np \sum_{j=0}^{n-1} j \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j} + np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j}
\end{aligned}
$$

Mas o primeiro somatório é a esperança de uma binomial com parâmetros $(n-1)$ e p; portanto, pelo resultado (2.20), é igual a $(n-1)\,p$. Já o segundo somatório é a soma das probabilidades dos valores de uma binomial com esses mesmos parâmetros (ou binômio de Newton); logo, é igual a 1. Segue, então, que

$$E\left(X^2\right) = np\left[(n-1)\,p + 1\right] = n^2p^2 - np^2 + np$$

e, portanto,

$$Var\,(X) = n^2p^2 - np^2 + np - (np)^2 = np - np^2$$

ou seja,

$$X \sim bin(n,p) \quad \Rightarrow \quad Var\,(X) = np\,(1-p) \tag{2.21}$$

2.5.4 Exercícios resolvidos

1. Um atirador acerta na mosca do alvo, 20% dos tiros. Se ele dá 10 tiros, qual a probabilidade de ele acertar na mosca no máximo 1 vez?

   Solução:

Podemos pensar os tiros como experimentos de Bernoulli independentes, onde a probabilidade de sucesso é 0,20. Então, o problema pede $\Pr(X \leq 1)$, onde $X =$ número de acertos em 10 tiros. Logo, $X \sim bin(10; 0,20)$ e

$$\Pr(X \leq 1) = \Pr(X = 0) + \Pr(X = 1) = \binom{10}{0} (0,20)^0 (0,80)^{10} + \binom{10}{1} (0,20)^1 (0,80)^9 = 0,37581$$

2. Dois adversários A e B disputam uma série de 8 partidas de um determinado jogo. A probabilidade de A ganhar uma partida é 0,6 e não há empate. Qual é a probabilidade de A ganhar a série?

   Solução:

   Note que só podem ocorrer vitórias ou derrotas, o que significa que temos repetições de um experimento de Bernoulli com probabilidade 0,6 de sucesso (vitória). Assumindo a independência das provas, se definimos $X =$ número de vitórias de A, então $X \sim bin(8; 0,6)$ e o problema pede $\Pr(X \geq 5)$, isto é A ganha mais partidas que B.

$$\begin{aligned} \Pr(X \geq 5) &= \Pr(X = 5) + \Pr(X = 6) + \Pr(X = 7) + \Pr(X = 8) = \\ &= \binom{8}{5} (0,6)^5 (0,4)^3 + \binom{8}{6} (0,6)^6 (0,4)\, 2 + \binom{8}{7} (0,6)^7 (0,4)^1 + \binom{8}{8} (0,6)^8 (0,4)^0 = \\ &= 0,5940864 \end{aligned}$$

3. Joga-se uma moeda não viciada. Qual é a probabilidade de serem obtidas 5 caras antes de 3 coroas?

   Solução:

   Vamos definir sucesso = cara e fracasso = coroa. Então, Pr(sucesso) = Pr(fracasso) = 0,5 e temos repetições de um experimento de Bernoulli. A ocorrência de 5 sucessos antes de 3 fracassos só é possível se nas 7 primeiras repetições tivermos pelo menos 5 sucessos. Seja, então, $X =$ número de sucessos em 7 repetições. Logo, $X \sim bin(7; 0,5)$ e o problema pede $\Pr(X \geq 5)$.

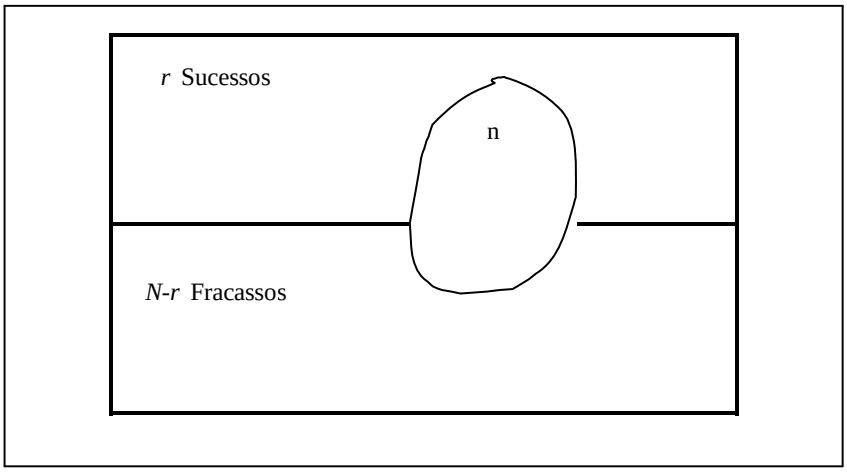
$$\begin{aligned} \Pr(X \geq 5) &= \Pr(X = 5) + \Pr(X = 6) + \Pr(X = 7) = \\ &= \binom{7}{5} (0,5)^7 + \binom{7}{6} (0,5)^7 + \binom{7}{7} (0,5)^7 = \\ &= 0,2265625 \end{aligned}$$

2.6 Distribuição hipergeométrica

2.6.1 Definição

Considere os exercícios resolvidos 4 e 5 da seção 1.2: de uma urna com bolas de duas cores, extraíam-se 5 bolas sem reposição. Tais exercícios podem ser encaixados na seguinte situação: considere uma população de tamanho N (a urna com as bolas) dividida em 2 classes (duas cores), uma composta de r "sucessos" e a outra composta de $N - r$ "fracassos". Dessa população, vamos extrair uma

Figura 2.3: Ilustração do experimento definidor da v.a. hipergeométrica



amostra de tamanho n sem reposição, o que, no caso de uma urna, equivale também a retirar as n bolas simultaneamente (ver figura 2.3).

Vamos considerar a seguinte v.a. para esse experimento:

$$X = \text{número de sucessos em uma amostra retirada sem reposição.}$$

Valores possíveis de X

Para determinar os valores possíveis de X, vamos considerar o problema em termos da urna com bolas verdes (Sucessos) e brancas (Fracassos), só para facilitar. Então, temos que considerar as seguintes situações:

- Se eu tiver bolas suficientes de ambas as cores (sucessos e fracassos), isto é, se $r \geq n$ e $N - r \geq n$ (exercício 4), então os possíveis valores de X variam de 0 (todas as bolas na amostra podem ser brancas, fracassos) a n (todas as bolas na amostra podem ser verdes, sucessos).

- Se eu não tiver bolas brancas suficientes (fracassos), isto é, se $N - r < n$ (exercício 5), então eu terei que ter pelo menos $n - (N - r)$ bolas verdes (sucessos) na amostra. Juntando esse resultado com a observação anterior, conclui-se que o valor mínimo de X é

  $$\max\{0, n - (N - r)\} \quad .$$

  Ilustrando: $N = 6$, $r = 4$ e $n = 3 : N - r = 2 < 3$; como só há duas bolas brancas, eu tenho que ter pelo menos 1 bola verde na amostra, isto é, o valor mínimo de X é $1 = \max\{0, 3 - 2\}$.

- Se eu não tiver bolas verdes suficientes (sucessos), isto é, se $r < n$ (exercício 5), então o máximo de bolas brancas na amostra será r. Juntando esse resultado com o resultado da primeira observação, conclui-se que o valor máximo de X é

  $$\min\{n, r\}$$

Ilustrando: $N = 6$, $r = 2$ e $n = 3$; como só há duas bolas verdes, o número máximo possível de bolas brancas na amostra é $2 = \min\{3, 2\}$.

Cálculo das probabilidades

O número total de amostras de tamanho n que podem ser extraídas de uma população de tamanho N, sem reposição, é $\binom{N}{n}$ (note que isso equivale ao número de subconjuntos de tamanho n do conjunto universo de tamanho N).

Consideremos inicialmente a situação em que existem bolas suficientes de ambas as cores, isto é, $r \geq n$ e $N - r \geq n$. A presença de k bolas verdes (sucessos) na amostra implica na presença de $n - k$ bolas brancas (fracassos) e o número de tais amostras é $\binom{r}{k} \times \binom{N-r}{n-k}$, pelo princípio fundamental da multiplicação. Logo,

$$\Pr(X = k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}} \tag{2.22}$$

e nesse caso, os valores de k vão de 0 a n.

Consideremos agora a situação em que não há bolas verdes suficientes, isto é, $r < n$. Então, os valores de k entre $r + 1$ e n não podem ocorrer. Mas, o termo no numerador em (2.22) pode ser reescrito como

$$\binom{r}{k} = \frac{r \times (r-1) \times \cdots \times (r-k+1)\,(r-k)!}{k!\,(r-k)!} = \frac{r \times (r-1) \times \cdots \times (r-k+1)}{k!}$$

e para esses valores impossíveis de k, isto é, $k \geq r + 1$, o último termo no produtório é negativo, o que significa que algum termo anterior é zero e, portanto, o produto no numerador se anula.

De forma análoga, se não há bolas brancas suficientes (fracassos), isto é, $N - r < n$, os valores de k entre 0 e $[n - (N - r) + 1]$ não podem ocorrer. Mas

$$\begin{aligned}\binom{N-r}{n-k} &= \frac{(N-r) \times (N-r-1) \times \cdots \times [N-r-(n-k)+1)]\,[N-r-(n-k)]!}{(n-k)!\,[N-r-(n-k)]!} = \\ &= \frac{(N-r) \times (N-r-1) \times \cdots \times [N-r-(n-k)+1)]}{(n-k)!}\end{aligned}$$

e para qualquer desses valores impossíveis o último termo no produtório do numerador é negativo, o que significa que algum termo anterior é nulo e, portanto, o numerador é zero.

Então, se estabelecemos a convenção de que

$$\binom{m}{j} = 0 \quad \text{se } j > m$$

podemos trabalhar com o espaço amostral $S = \{0, \ldots, n\}$ e probabilidades definidas por (2.22), uma vez que isso equivale a associar probabilidades nulas aos eventos impossíveis.

Resumindo, a função de distribuição da variável aleatória X é dada por

$$\Pr(X=k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad k=0,\ldots,n \tag{2.23}$$

Essa é a distribuição hipergeométrica com parâmetros N, r e n. Notação: $X \sim hiper(N,r,n)$.

Verificação das condições definidoras de uma fdp

Para provar que (2.23) realmente define uma função de distribuição de probabilidade, note inicialmente que $\Pr(X=k) \geq 0$. Temos que provar que a probabilidade do espaço amostral é 1, isto é, que $\sum_k \Pr(X=k) = 1$. No caso da distribuição hipergeométrica, provar esse resultado equivale a provar que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k} = \binom{N}{n} \tag{2.24}$$

Para isso, recordemos o teorema do binômio de Newton que estabelece que

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j} \tag{2.25}$$

e notemos a igualdade

$$(1+x)^r (1+x)^{N-r} = (1+x)^N \tag{2.26}$$

Para provar o resultado (2.24), vamos calcular os coeficientes de x^n em ambos os termos da igualdade (2.26). Esses coeficientes têm que ser iguais!

Por (2.25), a expressão do lado direito de (2.26) é

$$(1+x)^N = \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} x^{N-j}$$

e, portanto, o coeficiente de x^n é obtido fazendo $N-j=n \Rightarrow j=N-n$, ou seja, o coeficiente de x^n é (ver relação das combinações complementares na seção **??**):

$$\binom{N}{N-n} = \binom{N}{n} \tag{2.27}$$

No lado esquerdo de (2.26), a potência x^n decorre da multiplicação de x^k, vindo do primeiro termo $(1+x)^r$, por x^{n-k}, vindo do segundo termo $(1+x)^{N-r}$.

$$(1+x)^r = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{k} x^{r-j}$$

Logo, o coeficiente de x^k é obtido fazendo $r-j=k \Rightarrow j=r-k$, ou seja, o coeficiente é

$$\binom{r}{r-k} = \binom{r}{k}$$

Analogamente, o coeficiente de x^{n-k} em $(1+x)^{N-r}$ é obtido fazendo $n-k = N-r-j \Rightarrow j = (N-r)-(n-k)$, ou seja, o coeficiente é

$$\binom{N-r}{N-r-(n-k)} = \binom{N-r}{n-k}$$

Sendo assim, os coeficientes de $x^k x^{n-k}$ são $\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}$, $\quad k = 0, \ldots, n$, o que implica que o coeficiente de x^n no lado esquerdo de (2.26) é

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k} \tag{2.28}$$

Por (2.26), os coeficientes dados em (2.27) e (2.28) têm que ser iguais. Igualando-os, obtemos o resultado desejado dado em (2.24).

2.6.2 Esperança

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k \frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{n} k \binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k} = && \text{(note o índice)} \\
&= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{n} k \frac{r(r-1)!}{k(k-1)!\,(r-k)!}\binom{N-r}{n-k} = && \text{(porque } k \neq 0\text{)} \\
&= \frac{r}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{(r-1)!}{(k-1)!\,(r-k)!}\binom{N-r}{n-k} = && (j = k-1) \\
&= \frac{r}{\binom{N}{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(r-1)!}{j!\,(r-1-j)!}\binom{N-r}{n-1-j} = \\
&= \frac{r}{\binom{N}{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{r-1}{j}\binom{N-1-(r-1)}{n-1-j} = && \text{(por (2.24))} \\
&= \frac{r}{\binom{N}{n}}\binom{N-1}{n-1} = \frac{rn!\,(N-n)!}{N!}\frac{(N-1)!}{(n-1)!\,(N-n)!}
\end{aligned}$$

Logo,

$$X \sim hiper(N, r, n) \quad \Rightarrow \quad E(X) = n\frac{r}{N} \tag{2.29}$$

2.6.3 Variância

Vamos calcular $E(X^2)$.

$$\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k} = && \text{(note o índice)} \\
&= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{r(r-1)!}{k(k-1)!\,(r-k)!}\binom{N-r}{n-k} = \\
&= \frac{r}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{n} k \frac{(r-1)!}{(k-1)!\,(r-k)!}\binom{N-r}{n-k} = && \text{(porque } k \neq 0\text{)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{r}{\binom{N}{n}} \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \frac{(r-1)!}{j!\,(r-1-j)!}\binom{N-r}{n-1-j} = && (j = k-1) \\
&= \frac{r}{\binom{N}{n}} \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \binom{r-1}{j}\binom{N-r}{n-1-j} = \\
&= \frac{r}{\binom{N}{n}} \left[\sum_{j=0}^{n-1} j\binom{r-1}{j}\binom{N-r}{n-1-j} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{r-1}{j}\binom{N-r}{n-1-j}\right] = \\
&= \frac{r\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} \left[\sum_{j=0}^{n-1} j \frac{\binom{r-1}{j}\binom{N-1-(r-1)}{n-1-j}}{\binom{N-1}{n-1}} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\binom{r-1}{j}\binom{N-1-(r-1)}{n-1-j}}{\binom{N-1}{n-1}}\right]
\end{aligned}$$

Mas o primeiro somatório é a esperança de uma hipergeométrica com parâmetros $N-1, n-1$ e $r-1$ e o segundo somatório é a soma das probabilidades no espaço amostral de uma hipergeométrica com os mesmos parâmetros. Segue, então, que

$$\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= \frac{r\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} \left[(n-1)\frac{r-1}{N-1} + 1\right] = \\
&= \frac{rn}{N} \times \frac{(n-1)(r-1) + N - 1}{N-1}
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \frac{rn}{N} \times \frac{(n-1)(r-1)+N-1}{N-1} - \frac{n^2r^2}{N^2} = \\ &= \frac{rn}{N} \times \left[\frac{Nnr - nN - Nr + N + N^2 - N - Nnr + nr}{N(N-1)}\right] = \\ &= n\frac{r}{N}\frac{N(N-n) - r(N-n)}{N(N-1)}\end{aligned}$$

ou seja,

$$X \sim hiper(N,r,n) \quad \Rightarrow \quad Var(X) = n\frac{r}{N}\frac{N-r}{N}\frac{N-n}{N-1} \tag{2.30}$$

2.6.4 Distribuição binomial versus distribuição hipergeométrica

Vamos fazer agora algumas comparações entre as distribuições binomial e hipergeométrica. Colocando ambas em termos de extrações de bolas verdes de uma urna com bolas verdes e brancas, a binomial equivale a extrações independentes *com* reposição. Note que, repondo as bolas, a probabilidade de sucesso (isto é, bola verde) permanece constante ao longo das extrações. Já a hipergeométrica corresponde a extrações *sem* reposição.

A esperança da binomial é igual ao produto do tamanho da amostra pela probabilidade de sucesso; em termos da urna, a probabilidade de sucesso é $\frac{r}{N}$ e, portanto, a esperança é $n\frac{r}{N}$. Na hipergeométrica, a esperança também é o produto do tamanho da amostra pela probabilidade de sucesso, probabilidade essa tomada apenas na primeira extração.

A variância da binomial é igual ao produto do tamanho da amostra pelas probabilidades de sucesso e fracasso. Em termos de urna, essas probabilidades são $\frac{r}{N}$ e $\frac{N-r}{N}$. Na hipergeométrica, considerando apenas a primeira extração, a variância é igual a esse produto, mas corrigido pelo fator $\frac{N-n}{N-1}$.

Em pesquisas estatísticas por amostragem, normalmente lidamos com amostragem sem reposição (já imaginou visitar e entrevistar um mesmo morador duas vezes?). No entanto, os resultados teóricos sobre amostragem com reposição são bem mais simples (como você verá num segundo curso de Métodos Estatísticos, isso equivale a lidar com variáveis independentes); assim, costuma-se usar uma aproximação, sempre que possível. Ou seja, quando a população (tamanho N) é suficientemente grande (de modo que podemos encará-la como uma população infinita) e o tamanho da amostra é relativamente pequeno, podemos "ignorar" o fato de as extrações serem feitas sem reposição. Lembre-se que a probabilidade em extrações sucessivas são $\frac{1}{N}$, $\frac{1}{N-1}$, $\ldots$, $\frac{1}{N-n}$. Então, se N é "grande" e n é pequeno, temos que $N \approx N-1 \approx \cdots \approx N-n$. Nessas condições, extrações com e sem reposição podem ser consideradas como equivalentes. O termo que aparece na variância da hipergeométrica, $\frac{N-n}{N-1}$, é chamado correção para populações finitas, exatamente porque, se a população é pequena, não podemos ignorar o fato de as extrações estarem sendo feitas sem reposição.

2.6.5 Exercícios resolvidos

1. Um caçador, após um dia de caça, verificou que matou 5 andorinhas e 2 aves de uma espécie rara, proibida de ser caçada. Como todos os espécimes tinham o mesmo tamanho, ele os colocou na mesma bolsa, pensando em dificultar o trabalho dos fiscais. No posto de fiscalização há dois fiscais, Manoel e Pedro, que adotam diferentes métodos de inspeção. Manoel retira três espécimes de cada bolsa dos caçadores. Pedro retira um espécime, classifica-o e o repõe na bolsa, retirando em seguida um segundo espécime. Em qualquer caso, o caçador é multado se é encontrado pelo menos um espécime proibido. Qual dos dois fiscais é mais favorável para o caçador em questão?

   Solução:

   Seja $X =$ número de aves proibidas (sucessos) encontradas por um fiscal. No caso de Manoel, temos que $X \sim hiper(7;2;3)$ e no caso do fiscal Pedro, $X \sim bin\left(2;\frac{2}{7}\right)$. Queremos calcular $\Pr(\text{multa}) = \Pr(X \geq 1) = 1 - \Pr(X = 0)$.

   Manoel: $\Pr(\text{multa}) = 1 - \Pr(X = 0) = 1 - \dfrac{\binom{2}{0}\binom{5}{3}}{\binom{7}{3}} = 1 - \dfrac{2}{7} = \dfrac{5}{7} = \dfrac{35}{49}$

   Pedro: $\Pr(\text{multa}) = 1 - \Pr(X = 0) = 1 - \binom{2}{0}\left(\dfrac{5}{7}\right)^2 = 1 - \dfrac{25}{49} = \dfrac{24}{49}$

   Logo, a probabilidade de multa é maior no caso do fiscal Manoel, e, portanto, Pedro é o fiscal mais favorável para o caçador.

2. Entre os 16 programadores de uma empresa, 12 são do sexo masculino. A empresa decide sortear 5 programadores para fazer um curso avançado de programação. Qual é a probabilidade dos 5 sorteados serem do sexo masculino?

   Solução:

   Sucesso = sexo masculino. Se $X =$ número de homens sorteados, então $X \sim hiper(16;12;5)$ e o problema pede

$$\Pr(X = 5) = \frac{\binom{12}{5}}{\binom{16}{5}} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12} = \frac{33}{14 \times 13} = 0,181319$$

2.7 A distribuição de Poisson

2.7.1 Aproximação da binomial pela Poisson

Suponhamos que estamos observando um determinado fenômeno de interesse por um certo período de tempo de comprimento t com o interesse de contar o número de vezes X que determinado evento ocorre.

Vamos fazer as seguintes hipóteses sobre a forma como esse evento ocorre:

H1) Em um intervalo de tempo suficientemente curto, apenas 0 ou 1 evento ocorre, ou seja, 2 ou mais ocorrências não podem acontecer simultaneamente. Então, em cada um desses intervalos temos um experimento de **Bernoulli**.

H2) A probabilidade de exatamente 1 ocorrência nesse pequeno intervalo de tempo, de comprimento Δt, é proporcional a esse comprimento, ou seja, é $\boldsymbol{\lambda\Delta t}$. Logo, a ocorrência de nenhum evento é $\mathbf{1-\lambda\Delta t}$.

H3) As ocorrências em intervalos pequenos e disjuntos são experimentos de Bernoulli **independentes**.

Estamos interessados na v.a. $X =$ número de ocorrências do evento no intervalo $(0,t]$. Particionando esse intervalo em n pequenos subintervalos de comprimento Δt, temos que o número total de ocorrências será a soma do número de ocorrências em cada subintervalo. Mas em cada subintervalo podemos aplicar as hipóteses acima. Logo, X é uma variável binomial com parâmetros $n = \dfrac{t}{\Delta t}$ (note que $\Delta t = \dfrac{t}{n}$) e probabilidade de sucesso igual a $\lambda\Delta t$ pela hipótese 2 acima. Então, para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ temos que:

$$\begin{aligned}
\Pr(X &= k) = \binom{n}{k}(\lambda\Delta t)^k(1-\lambda\Delta t)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} = \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\times\frac{1}{n^k}\times(\lambda t)^k\times\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^n\times\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{-k} = \\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!}\times\frac{1}{n^k}\times\frac{(\lambda t)^k}{k!}\times\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^n\times\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{-k} = \\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\times\frac{(\lambda t)^k}{k!}\times\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^n\times\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{-k} = \\
&= \frac{n}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\cdots\times\frac{n-k+1}{n}\times\frac{(\lambda t)^k}{k!}\times\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^n\times\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{-k}
\end{aligned}$$

Consideremos, agora, a situação em que $\Delta t \to 0$, ou equivalentemente, $n \to \infty$. Nesse caso, a v.a. X pode assumir qualquer valor inteiro não negativo e

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\Pr(X &= k) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\cdots\times\frac{n-k+1}{n}\times\frac{(\lambda t)^k}{k!}\times\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^n\times\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{-k}\right] \\
&= 1\times1\times\cdots\times1\times\frac{(\lambda t)^k}{k!}\times\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^n\times1 = \frac{(\lambda t)^k}{k!}\exp(-\lambda t)
\end{aligned}$$

Aqui fêz-se uso do resultado (2.45) da seção 2.8. Provamos, assim, o seguinte resultado:

Teorema 2.1 *Sejam eventos gerados de acordo com as hipóteses H1 a H3 acima. Se X é o número de eventos em um intervalo de tempo de comprimento t, então a função de distribuição de probabilidade de X é*

$$\Pr(X = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}\exp(-\lambda t) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.31}$$

Diz-que que X tem distribuição de Poisson com parâmetro λt : $X \sim Poi(\lambda t)$.

Para mostrar que (2.31) realmente define uma fdp, temos que provar que $\sum_k \Pr(X=k) = 1$. De fato, usando o resultado (2.46) da seção 2.8, temos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Pr(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t) = \exp(-\lambda t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = \exp(-\lambda t)\exp(\lambda t) = 1$$

Esperança e variância

Vamos agora calcular a esperança e a variância de tal distribuição.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t) = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{(\lambda t)^k}{k(k-1)!} \exp(-\lambda t) = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{(k-1)!} \exp(-\lambda t) = \exp(-\lambda t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)\,(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \\
&= (\lambda t)\exp(-\lambda t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = (\lambda t)\exp(-\lambda t) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} = \\
&= (\lambda t)\exp(-\lambda t)\exp(\lambda t)
\end{aligned}$$

Logo,

$$X \sim Poi(\lambda t) \Rightarrow E(X) = \lambda t \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\frac{(\lambda t)^k}{k(k-1)!} \exp(-\lambda t) = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{(\lambda t)^k}{(k-1)!} \exp(-\lambda t) = \exp(-\lambda t) \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{(\lambda t)\,(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \\
&= (\lambda t)\exp(-\lambda t) \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = (\lambda t)\exp(-\lambda t) \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\frac{(\lambda t)^j}{j!} = \\
&= (\lambda t)\left[\sum_{j=0}^{\infty} j\frac{(\lambda t)^j}{j!} \exp(-\lambda t) + \exp(-\lambda t) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!}\right] = \\
&= (\lambda t)\left[E(X) + \exp(-\lambda t)\exp(\lambda t)\right] = (\lambda t)^2 + (\lambda t)
\end{aligned}$$

Aqui fêz-se uso dos resultados (2.32) e (2.46) da seção 2.8. Logo,

$$\mathrm{Var}(X) = (\lambda t)^2 + (\lambda t) - (\lambda t)^2$$

ou

$$X \sim Poi(\lambda t) \Rightarrow \mathrm{Var}(X) = \lambda t \tag{2.33}$$

A interpretação desses resultados nos dá que o número médio de ocorrências do evento em um intervalo de comprimento t é λt, proporcional ao comprimento. Fazendo $t = 1$, obtém-se o número médio de ocorrências em um intervalo unitário. Note que a esperança e a variância são iguais!

2.7.2 A distribuição de Poisson

Vamos apresentar, agora, a definição geral da distribuição de Poisson, usando uma outra parametrização. Diz-se que a v.a. X tem distribuição de Poisson com parâmetro μ se sua fdp é dada por

$$\Pr(X = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Nesse caso, a esperança e a variância de X são dadas por:

$$E(X) = \mathrm{Var}(X) = \mu \tag{2.34}$$

Pelos resultados anteriores, μ é o número médio de ocorrências do evento de interesse em um intervalo unitário e o número de ocorrências num intervalo qualquer é proporcional ao comprimento do intervalo.

2.7.3 Exercícios resolvidos

1. Uma central telefônica recebe uma média de 5 chamadas por minuto. Supondo que as chamadas que chegam constituam uma distribuição de Poisson, qual é a probabilidade de a central não receber nenhuma chamada em um minuto? e de receber no máximo 2 chamadas em 2 mintuos?

   Solução:

   Seja X = número de chamadas por minuto. Então, $X \sim Poi(5)$. Logo,

   $$\Pr(X = 0) = \frac{5^0}{0!} \exp(-5) = 0,00673795$$

   Seja y = número de chamadas em 2 minutos. Então, $X \sim Poi(5 \times 2)$. Logo,

   $$\begin{aligned} \Pr(Y &\leq 2) = \Pr(Y = 0) + \Pr(Y = 1) + \Pr(Y = 2) = \\ &= \exp(-10) \left(\frac{10^0}{0!} + \frac{10^1}{1!} + \frac{10^2}{2!} \right) = \\ &= 0,00276940 \end{aligned}$$

2. Em um certo tipo de fabricação de fita magnética, ocorrem cortes a uma taxa de um corte por 2000 pés. Qual é a probabilidade de que um rolo com comprimento de 4000 pés apresente no máximo dois cortes? Pelo menos dois cortes?

   Solução:

   Seja Y = número de cortes num rolo de 400o pés. Então, $Y \sim Poi(2)$.

   $$\begin{aligned} \Pr(\text{no máximo 2 cortes}) &= \Pr(Y \leq 2) = \Pr(Y = 0) + \Pr(Y = 1) + \Pr(Y = 2) = \\ &= \exp(-2) \left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} \right) = 5 \exp(-2) = 0,676676 \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} \Pr(\text{pelo menos 2 cortes}) &= \Pr(Y \geq 2) = 1 - \Pr(Y < 2) = 1 - [\Pr(Y = 0) + \Pr(Y = 1)] = \\ &= 1 - \exp(-2) \left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} \right) = 1 - 3 \exp(-2) = 0,593994 \end{aligned}$$

2.8 Alguns resultados de cálculo

2.8.1 Séries geométricas

Recordemos inicialmente a progressão geométrica (pg) de razão r, dada por $(1, r, r^2, r^3, \ldots, r^n)$. Para calcular a soma dos n primeiros termos de uma pg, note que, se $r \neq 1$, podemos escrever:

$$(1 + r + r^2 + \ldots + r^n)(1 - r) = (1 + r + r^2 + \ldots + r^n) - (r + r^2 + \ldots + r^{n+1}) = 1 - r^{n+1}$$

Logo,

$$(1 + r + r^2 + \ldots + r^n) = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \qquad r \neq 1$$

Além disso, se $|r| < 1$, $\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$. Logo, a soma dos termos da pg converge, quando $n \to \infty$, isto é:

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1 - r} \qquad \text{se } |\, r \,| < 1. \tag{2.35}$$

A série $\sum_{i=0}^{\infty} r^i$ é chamada *série geométrica de razão* r.

Note que podemos escrever (atenção aos índices dos somatórios!):

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} r^i \Rightarrow \frac{1}{1 - r} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} r^i \quad \text{se } |\, r \,| < 1$$

ou

$$\sum_{i=1}^{\infty} r^i = 1 - \frac{1}{1 - r} = \frac{r}{1 - r} \qquad \text{se } |\, r \,| < 1 \tag{2.36}$$

Consideremos, agora, as derivadas da série geométrica. Vamos começar com a derivada de primeira ordem.

$$\frac{d}{dr}\left(\sum_{i=0}^{\infty} r^i\right) = \frac{d}{dr}(1 + r + r^2 + \ldots + r^n + \cdots) = 1 + 2r + 3r^2 + \cdots + nr^{n-1} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty}(1 + i)r^i$$

Como a série geométrica é convergente para $|\, r \,| < 1$, podemos igualar as derivadas, isto é:

$$\sum_{i=0}^{\infty}(1 + i)r^i = \frac{d}{dr}\left(\sum_{i=0}^{\infty} r^i\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{1 - r}\right) \qquad \text{se } |\, r \,| < 1$$

ou seja,

$$\sum_{i=0}^{\infty}(1 + i)r^i = \frac{1}{(1 - r)^2} \qquad \text{se } |\, r \,| < 1 \tag{2.37}$$

Mas podemos escrever

$$(1 + i) = \frac{(1 + i) \times i!}{i!} = \frac{(1 + i)!}{i!\, 1!} = \binom{1 + i}{i}$$

resultando que

$$\sum_{i=0}^{\infty}\binom{1+i}{i}r^i = \frac{1}{(1-r)^2} \qquad \text{se } |\,r\,| < 1 \tag{2.38}$$

Consideremos a segunda derivada.

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dr^2}\left(\sum_{i=0}^{\infty} r^i\right) = \frac{d^2}{dr^2}(1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots + r^{n-1} + r^n + r^{n+1}\cdots) = \\
= \;& \frac{d}{dr}\left(1 + 2r + 3r^2 + 4r^3\cdots + (n-1)r^{n-2} + nr^{n-1} + (n+1)r^n + \cdots\right) = \\
= \;& 2\times 1 + 3\times 2\times r + 4\times 3\times r^2 + \cdots + (n-1)(n-2)r^{n-3} + n(n-1)r^{n-2} + (n+1)nr^{n-1} + \cdots \\
= \;& \sum_{i=0}^{\infty}(i+2)(i+1)r^i
\end{aligned}$$

Igualando as derivadas, obtemos:

$$\sum_{i=0}^{\infty}(i+2)(i+1)r^i = \frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{1}{1-r}\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{(1-r)^2}\right) = \frac{-2\times(1-r)(-1)}{(1-r)^4}$$

ou

$$\sum_{i=0}^{\infty}(i+2)(i+1)r^i = \frac{2}{(1-r)^3} \tag{2.39}$$

Esse resultado pode ser escrito de outra forma:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty}(i+2)(i+1)r^i &= \frac{2}{(1-r)^3} \Leftrightarrow \\
\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i+2)(i+1)}{2}r^i &= \frac{1}{(1-r)^3} \Leftrightarrow \\
\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i+2)(i+1)i!}{2\times i!}r^i &= \frac{1}{(1-r)^3} \Leftrightarrow \\
\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i+2)!}{i!\times 2!}r^i &= \frac{1}{(1-r)^3} \Leftrightarrow \\
\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+2}{2}r^i &= \frac{1}{(1-r)^3}
\end{aligned}$$

Pela relação das relações complementares, sabemos que $\binom{i+2}{2} = \binom{i+2}{i}$ e, portanto, resulta que

$$\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+2}{2}r^i = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+2}{i}r^i = \frac{1}{(1-r)^3} \tag{2.40}$$

Tomando a terceira derivada:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^3}{dr^3}\left(\sum_{i=0}^{\infty} r^i\right) = \frac{d^3}{dr^3}(1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + \cdots + r^{n-1} + r^n + r^{n+1}\cdots) = \\
= \; & \frac{d^2}{dr^2}\left(1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + 5r^4 + \cdots + (n-1)r^{n-2} + nr^{n-1} + (n+1)r^n + \cdots\right) = \\
= \; & \frac{d}{dr}\left[\begin{array}{c} 2 \times 1 + 3 \times 2 \times r + 4 \times 3 \times r^2 + 5 \times 4 \times r^3 + \cdots + (n-1)(n-2)r^{n-3} \\ +n(n-1)r^{n-2} + (n+1)nr^{n-1} + \cdots \end{array}\right] \\
= \; & 3 \times 2 \times 1 + 4 \times 3 \times 2 \times r + 5 \times 4 \times 3 \times r^2 + \cdots + (n-1)(n-2)(n-3)r^{n-4} + \cdots \\
& +n(n-1)(n-2)r^{n-3} + (n+1)n(n-1)r^{n-2} + \cdots \\
= \; & \sum_{i=0}^{\infty}(i+3)(i+2)(i+1)r^i
\end{aligned}$$

Igualando as derivadas:

$$\sum_{i=0}^{\infty}(i+3)(i+2)(i+1)r^i = \frac{d^3}{dr^3}\left(\frac{1}{1-r}\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{2}{(1-r)^3}\right) = \frac{-2 \times 3 \times (1-r)^2 \times (-1)}{(1-r)^6} = \frac{3!}{(1-r)^4}$$

Logo,

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i+3)(i+2)(i+1)}{3!}r^i = \frac{1}{(1-r)^4} \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i+3)(i+2)(i+1)i!}{3! \times i!}r^i = \frac{1}{(1-r)^4} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\binom{3+i}{i}r^i = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{3+i}{3}r^i = \frac{1}{(1-r)^4} \tag{2.41}$$

Continuando a derivar (note que podemos tomar derivadas de qualquer ordem!), obtém-se o seguinte resultado geral:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\binom{k+i}{i}r^i = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{k+i}{k}r^i = \frac{1}{(1-r)^{k+1}} \tag{2.42}$$

2.8.2 O número e (base dos logaritmos naturais)

1.
$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \tag{2.43}$$

2.
$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e \tag{2.44}$$

3. A partir desses resultados obtém-se que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \tag{2.45}$$

De fato: fazendo $t = \dfrac{x}{n}$, resulta que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{x}{t}} = \left[\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^x = e^x$$

4.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda} \quad \forall\lambda\in\mathbb{R} \tag{2.46}$$

2.9 Exercícios propostos do capítulo 2

1. Seja $X \sim bin(n;p)$. Se $E(X) = 12$ e $\mathrm{Var}(X) = 4$, determine os valores de n e p.

2. A probabilidade de uma máquina produzir uma peça defeituosa em um dia é 0,1.

   (a) Qual a probabilidade de que, em 20 peças produzidas em um dia, exatamente 5 sejam defeituosas?

   (b) Qual a probabilidade de que a 10ª peça produzida em um dia seja a primeira defeituosa?

3. Um atirador acerta na mosca do alvo, 20% dos tiros.

   (a) Qual a probabilidade de ele ter de dar 10 tiros para acertar 6 vezes na mosca?

   (b) Se ele dá 10 tiros, qual a probabilidade de ele acertar na mosca 6 vezes?

4. Suponha que 100 peixes especiais são pescados, marcados e colocados no lago de um sitiante, que passa a ter, então, um total de 2000 peixes. Num certo dia, o sitiante autoriza a realização de uma pescaria. Assuma que a quantidade de peixes no lago até esse dia não se alterou. Se 60 peixes são pescados, calcule a probabilidade de 5 serem especiais

   (a) supondo que os peixes pescados são colocados de volta no lago;

   (b) supondo que os peixes pescados não são colocados de volta no lago.

5. Um supermercado faz a seguinte promoção: o cliente, ao passar pelo caixa, lança um dado. Se sair face 6 tem um desconto de 30% sobre o total de sua conta. Se sair face 5 o desconto é de 20%. Se sair face 4 o desconto é de 10% e se ocorrerem faces 1, 2 ou 3, o desconto é de 5%. Seja X = desconto concedido.

   (a) Encontre a função de distribuição de probabilidade de X.

   (b) Calcule o desconto médio concedido.

   (c) Calcule a probabilidade de que, num grupo de 5 clientes, pelo menos um consiga um desconto maior que 10%.

   (d) Calcule a probabilidade de que o quarto cliente seja o primeiro a receber 30% de desconto.

6. As probabilidades de que haja 1, 2, 3, 4 ou 5 pessoas nos carros que passam por um pedágio são, respectivamente, 0,05; 0,20; 0,40; 0,25 e 0,10. Seja X = número de passageiros por veículo.

   (a) Explicite a função de distribuição de probabilidade de X.

   (b) Calcule o número médio de passageiros por veículo.

   (c) Calcule a probabilidade de que, num grupo de 5 carros, pelo menos um tenha mais que 3 pessoas.

   (d) Calcule a probabilidade de que o quarto carro seja o primeiro a ter 5 passageiros.

7. Numa estrada há 2 acidentes para cada 100 km. Qual a probabilidade de que

   (a) ocorram pelo menos 3 acidentes em 250 km?

   (b) ocorram 5 acidentes em 300 km?

8. Na manufatura de certo artigo, é sabido que 1 entre 10 artigos é defeituoso. Uma amostra de tamanho 4 é retirada com reposição, de um lote da produção. Qual a probabilidade de que a amostra contenha

   (a) nenhum defeituoso?

   (b) pelo menos 2 defeituosos?

   (c) exatamente 1 defeituoso?

9. Um fabricante de peças de automóveis garante que uma caixa de suas peças conterá, no máximo, 2 defeituosas. Se a caixa contém 18 peças e a experiência mostra que esse processo de fabricação produz 5% de peças defeituosas, qual a probabilidade de que uma caixa satisfaça a garantia?

10. Certo curso de treinamento aumenta a produtividade de uma certa população de funcionários em 80% dos casos. Se 10 funcionários quaisquer participam deste curso, encontre a probabilidade de:

    (a) exatamente 7 funcionários aumentarem a produtividade;

    (b) pelo menos 3 uncionários não aumentarem a produtividade;

    (c) não mais que 8 funcionários aumentarem a produtividade.

11. Determinado tipo de parafuso é vendido em caixas com 1000 peças. É uma característica da fabricação produzir 10% de defeituosos. Normalmente, cada caixa é vendida por 13,50 u.m.. Um compardor faz a seguinte proposta para o produtor: de cada caixa, ele escolhe uma amostra de 20 peças; se ele encontrar 0 defeituoso, ele paga 20,00 u.m. pela caixa; 1 ou 2 defeituosos, ele paga 10,00 u.m.; 3 ou mais defeituosos, ele paga 8,00 u.m.. Qual é a alternativa mais vantajosa para o fabricante?

12. Numa central telefônica, o número de chamadas chega segundo uma distribuição de Poisson, com a média de 8 chamadas por minuto. Determinar qual a probabilidade de que em um minuto se tenha:

    (a) 10 ou mais chamadas;

    (b) menos de 5 chamadas.

13. As chegadas de petroleiros a uma refinaria em cada dia ocorrem segundo uma distribuição de Poisson, com parâmetro $\lambda = 2$. As atuais instalações podem atender, no máximo, a 3 petroleiros por dia. Se mais de 3 petroleiros chegarem num dia, o excesso é enviado a outro porto.

    (a) Em um dia, qual a probabilidade de se enviar petroleiros para outro porto?

    (b) De quanto deverão ser aumentadas as instalações para permitir atender a todos os navios que chegarem em pelo menos 95% dos dias?

    (c) Qual o número médio de petroleiros que chegam em um dia?

14. Um industrial fabrica peças, das quais 20% são defeituosas. Dois compradores, A e B, classificam as partidas adquiridas em categorias I e II, pagando 1,20 u.m. e 0,80 u.m. respectivamente, do seguinte modo:

    - Comprador A: retira uma amostra de 5 peças; se encontrar mais que uma defeituosa, classifica como II;
    - Comprador B: retira uma amostra de 10 peças; se encontrar mais que 2 defeituosas, classifica como II.

    Em média, qual comprador oferece maior lucro para o fabricante?

Capítulo 3

Solução dos exercícios propostos

3.1 Capítulo 1

Seções 1.2 e 1.3

1. Como há bolas suficientes de ambas as cores, os valores possíveis da v.a. X são $0, 1, 2, 3$. O espaço amostral é formado por todos os subconjuntos de 3 bolas e sua cardinalidade é $\binom{8}{3} = 56$. Usando a definição clássica de probabilidade, temos que:

$$\Pr(X = 0) = \Pr(\text{3 vermelhas}) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{1}{56}$$

$$\Pr(X = 1) = \Pr(\text{2 vermelhas, 1 preta}) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{15}{56}$$

$$\Pr(X = 2) = \Pr(\text{1 vermelhas, 2 pretas}) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{30}{56}$$

$$\Pr(X = 3) = \Pr(\text{3 pretas}) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{10}{56}$$

Assim, a fdp de X é:

x	0	1	2	3
$p_X(x)$	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

2. Em cada extração as probabilidades se mantêm constante: $\Pr(\text{Vermelha}) = \frac{3}{8}$ e $\Pr(\text{preta}) = \frac{5}{8}$. Como antes, os valores de X são $0, 1, 2, 3$ e as extrações constituem eventos independentes.

$$\Pr(X = 0) = \Pr(\text{3 vermelhas}) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{27}{512}$$

$$\Pr(X = 1) = \Pr(\text{2 vermelhas, 1 preta}) = \binom{3}{1} \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{135}{512}$$

O número combinatório aparece por que a vermelha poderia ter sida a primeira, a segunda ou a terceira (veja o exemplo 1.3).

$$\Pr(X=2) = \Pr(\text{1 vermelha, 2 pretas}) = \binom{3}{2} \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{225}{512}$$

$$\Pr(X=3) = \Pr(\text{3 pretas}) = \binom{3}{3} \times \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{125}{512}$$

e a fdp de X é:

x	0	1	2	3
$p_X(x)$	$\frac{27}{512}$	$\frac{135}{512}$	$\frac{225}{512}$	$\frac{125}{512}$

3. A primeira observação diz respeito aos valores possíveis de X. Podemos ter sorte e obter cara no primeiro lançamento; nesse caso, $X = 1$. Nossa "sorte" pode começar a diminuir de modo que obtemos cara no segundo lançamento; nesse caso, $X = 2$. Continuando, podemos ser bastante infelizes e ter que ficar jogando a moeda "infinitas" vezes até obter a primeira cara. Esse é um exemplo de v.a. discreta onde o espaço amostral é enumerável mas infinito: os valores possíveis de X são $1, 2, 3, \ldots$. Cada resultado desses significa que os primeiros lançamentos foram coroa (C) e o último cara (K). Como os lançamentos podem ser considerados independentes, resulta que:

$$\Pr(X=1) = \Pr(K) = \frac{1}{2}$$

$$\Pr(X=2) = \Pr(CK) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Pr(X=3) = \Pr(CCK) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\Pr(X=4) = \Pr(CCCK) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

En geral,

$$\Pr(X=k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

A única diferença com relação ao visto anteriormente é que $\Pr(K) = p$ e $\Pr(C) = 1 - p$. Então,

$$\Pr(X=k) = (1-p)^{k-1}\, p \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

4. Em cada lançamento pode sair cara (K) ou coroa (C), cada um com probabilidade $\frac{1}{2}$. Em 4 lançamentos podemos ter $0, 1, 2, 3, 4$ caras e os lançamentos são independentes. Logo,

$$\Pr(X=0) = \Pr(\text{4 coroas}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \binom{4}{0} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$\Pr(X=1) = \Pr(\text{3 coroas, 1 cara}) = \binom{4}{1} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \binom{4}{1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{2} = \frac{4}{16}$$

O número combinatório aparece por que a cara poderia ter ocorrido em qualquer um dos 4 lançamentos.

$$\Pr(X=2) = \Pr(\text{2 coroas, 2 caras}) = \binom{4}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \binom{4}{1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16}$$

$$\Pr(X=3) = \Pr(\text{1 coroa, 3 caras}) = \binom{4}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \binom{4}{1} \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{16}$$

$$\Pr(X=4) = \Pr(\text{4 caras}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \binom{4}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \binom{4}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

e a fdp de X é :

x	0	1	2	3	4
$p_X(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

ou em forma reduzida:

$$\Pr(X=k) = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{4-k} = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

5. A única alteração agora é que $\Pr(K) = p$ e $\Pr(C) = 1 - p$ e, assim, a fdp de X é:

$$\Pr(X=k) = \binom{4}{k} p^k (1-p)^{4-k} \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

6. Como temos n lançamentos, os valores possíveis de X vão de 0 até n. Na f´rmula anterior, basta substituir 4 por n, ou seja, a fdp de X é:

$$\Pr(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

   (a) Note a equivalência dos seguintes eventos:

$$X^2 \geq 9 \Leftrightarrow |\, X \,| \geq 3 \Leftrightarrow X \leq -3 \text{ ou } X \geq 3$$

   Logo,

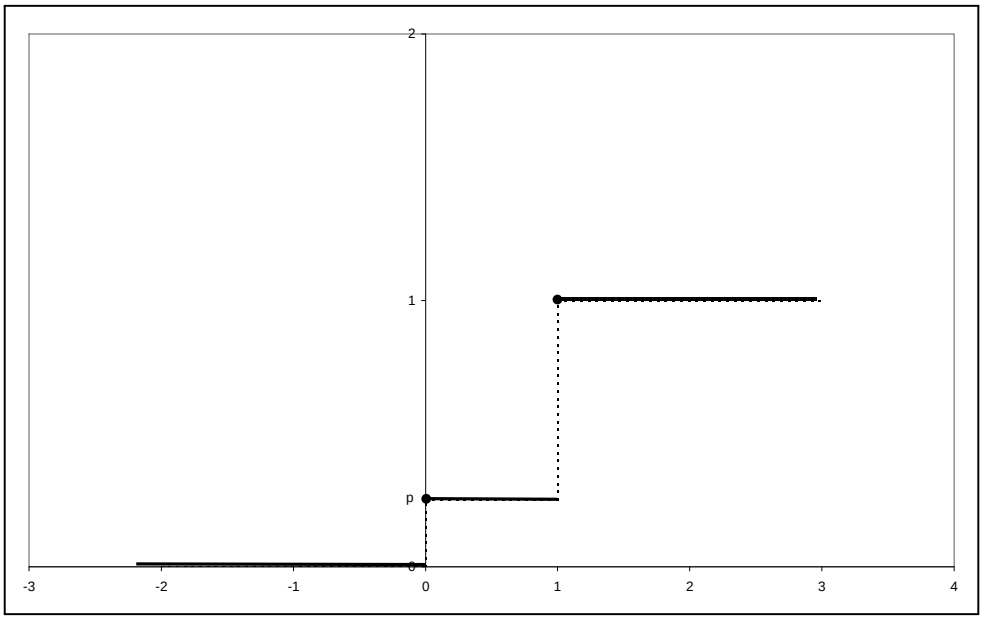
$$\Pr\left(X^2 \geq 9\right) = \Pr(X=4) + \Pr(X=6) + \Pr(X=7) = \frac{5+4+15}{42} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}$$

   (b) Como X só assume valores inteiros, resulta que:

$$\Pr\left(|\, X \,| \leq 2\right) = 1 - \Pr\left(|\, X \,| \geq 3\right) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

Seção 1.4

Figura 3.1: FDA da v.a. V do exercício 7



7.
$$F_V(v) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ p & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

8. Os pontos de descontinuidade da fda são os pontos onde temos probabilidade maior que zero. Logo, os valores da v.a. X são $1, 2, 3$. As probabilidades dadas correspondem ao tamanho do "salto" da fda em cada ponto. Conforme visto na equação (1.9), esses são exatamente os valores da fdp, ou seja, a fdp da v.a. X é

x	1	2	3
$p_X(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

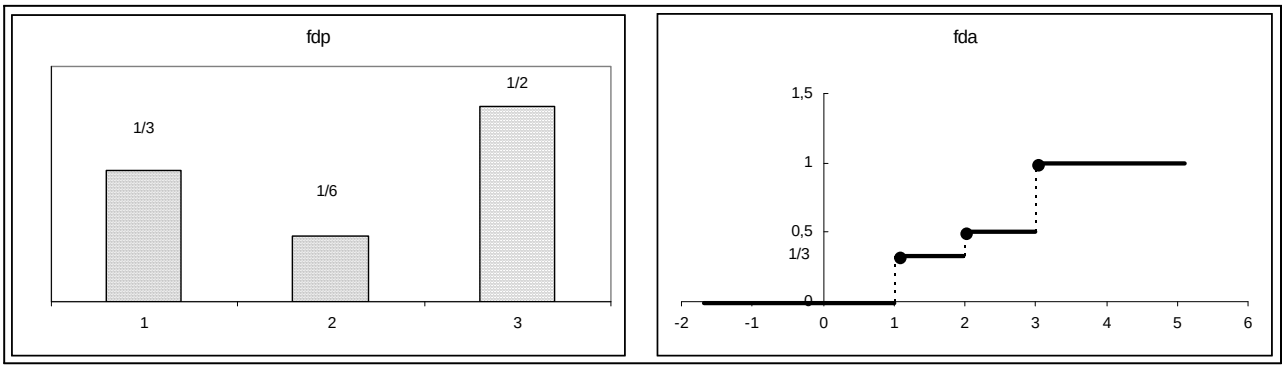
e a fda é
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{3} & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ \frac{3}{6} & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$
cujos gráficos estão na figura 3.2.

Seção 1.5

9. Vamos definir $Y = 3X$ e $Z = X^2$. Temos a seguinte fdp para X :

x	0	1	2	3
$p_X(x)$	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

Figura 3.2: Solução do exercício 9



Logo, as fdp´s para Y e Z são:

y	0	3	6	9
$p_Y(y)$	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

z	0	1	4	9
$p_Z(x)$	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

10.

t	2	3	4	5	6 ou 7
$\mathbf{g}$	$\mathbf{4,0}$	$\mathbf{3,5}$	$\mathbf{3,0}$	$\mathbf{2,5}$	$\mathbf{2,0}$
$\mathbf{p}_G(\mathbf{g})$	$\mathbf{0,1}$	$\mathbf{0,1}$	$\mathbf{0,3}$	$\mathbf{0,2}$	$\mathbf{0,3}$

Seção 1.6

11. $E(V) = 0 \times p + 1 \times (1-p) = 1-p$
$E(V^2) = 0^2 \times p + 1^2 \times (1-p) = 1-p \Rightarrow \text{Var}(V) = (1-p) - (1-p)^2 = (1-p)[1-(1-p)] = p(1-p) \Rightarrow DP(V) = \sqrt{p(1-p)}$

12. $E(G) = 4 \times 0,1 + 3,5 \times 0,1 + 3 \times 0,3 + 2,5 \times 0,2 + 2 \times 0,3 = 2,75$ u.m.
$E(G^2) = 4^2 \times 0,1 + 3,5^2 \times 0,1 + 3^2 \times 0,3 + 2,5^2 \times 0,2 + 2^2 \times 0,3 = 7,975$
$\text{Var}(G) = 7,975 - 2,75^2 = 0,4125 \Rightarrow DP(G) = 0,6423$ u.m.

13. $E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$$\begin{aligned} g(a) &= E(X-a)^2 = (0-a)^2 \times \frac{1}{2} + (1-a)^2 \times \frac{1}{4} + (2-a)^2 \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{a^2}{2} + \frac{1}{4} - \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} + 1 - a + \frac{a^2}{4} = a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a &= 0 \Rightarrow g(0) = \frac{5}{4} = \frac{20}{16} \\
a &= \frac{1}{4} \Rightarrow g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{15}{16} \\
a &= \frac{1}{2} \Rightarrow g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} = \frac{12}{16} \\
a &= \frac{3}{4} \Rightarrow g\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{11}{16} \\
a &= 1 \Rightarrow g(1) = \frac{3}{4} = \frac{12}{16}
\end{aligned}$$

$g(a)$ é mínimo quando $a = \frac{3}{4}$. Note que a equação de $g(a)$ é uma equação de segundo grau, ou melhor, de uma parábola.

14. O espaço amostral, bem como as variáveis aleatórias e suas fdp´s estão dadas nas tabelas a seguir:

w	$\Pr(w)$	X	Y
CCC	$\frac{1}{8}$	3	1
CCK	$\frac{1}{8}$	2	2
CKC	$\frac{1}{8}$	2	3
KCC	$\frac{1}{8}$	2	2
CKK	$\frac{1}{8}$	1	2
KCK	$\frac{1}{8}$	1	3
KKC	$\frac{1}{8}$	1	2
KKK	$\frac{1}{8}$	0	1

x	0	1	2	3
$p_X(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

y	1	2	3
$p_Y(y)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$

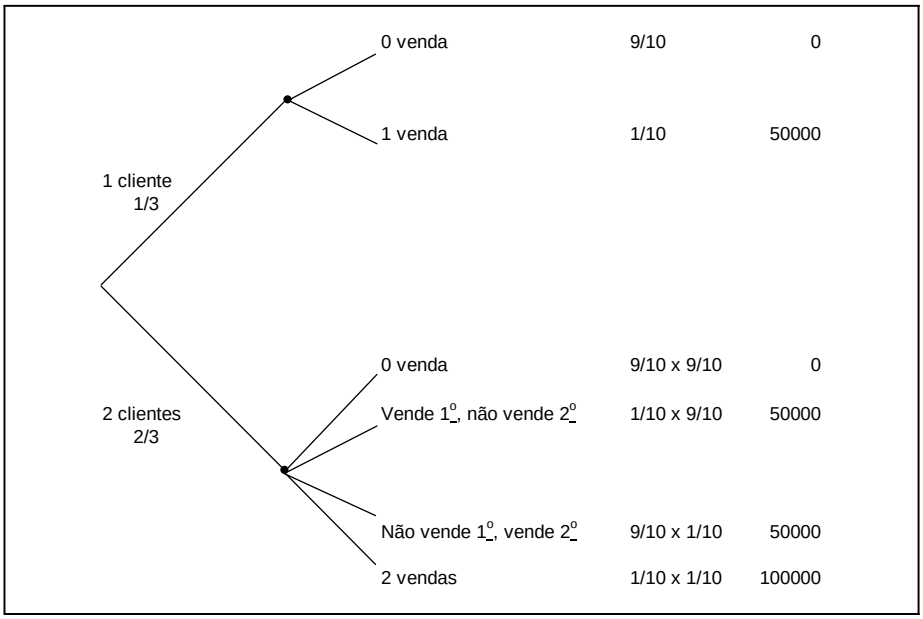
$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \\
\text{Var}\,(X) &= \frac{3}{8} + \frac{12}{8} + \frac{9}{8} - \frac{9}{4} = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \frac{2}{8} + \frac{8}{8} + \frac{6}{8} = \frac{16}{8} = 2 \\
\text{Var}\,(X) &= \frac{2}{8} + \frac{16}{8} + \frac{18}{8} - 4 = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

15. Na figura **??** temos o esquema do espaço amsotral desse experimento, com as probabilidades e variáveis envolvidas no problema.A partir daí obtemos a seguinte fdp para p valor Y das vendas diárias:

y	0	50000	100000
$p_Y(y)$	$\frac{252}{300}$	$\frac{46}{300}$	$\frac{2}{300}$

Figura 3.3: Solução do exercício 16



$$E(Y) = \frac{50000 \times 46 + 200000}{300} = 8333,33 \text{ u.m.}$$

16. Da interpretação da esperança como centro de gravidade e notando que a distribuição no exercício 4 é simétrica, resulta que $E(X) = 2$.

    Para o problema 5 temos que (substituindo os valores de k na fórmula obtida e usando o binômio de Newton):

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times (1-p)^4 + 1 \times 4p\,(1-p)^3 + 2 \times 6p^2\,(1-p)^2 + 3 \times 4p^3\,(1-p) + 4 \times p^4 = \\ &= 4p\left(1 - 3p + 3p^2 - p^3\right) + 12p^2 - 24p^3 + 12p^4 + 12p^3 - 12p^4 + 4p^4 = \\ &= 4p - 12p^2 + 12p^3 - 4p^4 + 12p^2 - 12p^3 + 4p^4 \Rightarrow \boxed{E(X) = 4p} \end{aligned}$$

    Note que $n = 4$!

Exercícios complementares

17. X : número de pessoas em cada carro

    Y : número de pessoas em 4000 carros em 10 horas de contagem

X :	x	1	2	3	4	5
	p	0,05	0,20	0,40	0,25	0,10

    $Y = 4000 \times 10 \times X$

    $E(X) = 0,05 + 0,40 + 1,20 + 1,0 + 0,5 = 3,15$ pessoas por carro

    $E(Y) = 4000 \times 10 \times 3,15 = 126.000$ pessoas

18. $g(a) = E\left(X-a\right)^2 = E\left[X^2 - 2aE(X) + a^2\right]$. Mas a e $E(X)$ são constantes; logo, $g(a) = E\left(X\right)^2 - 2aE(X) + a^2$. Derivando a função (note que temos uma função de a!) obtemos que:

$$g'(a) = -2E(X) + 2a$$

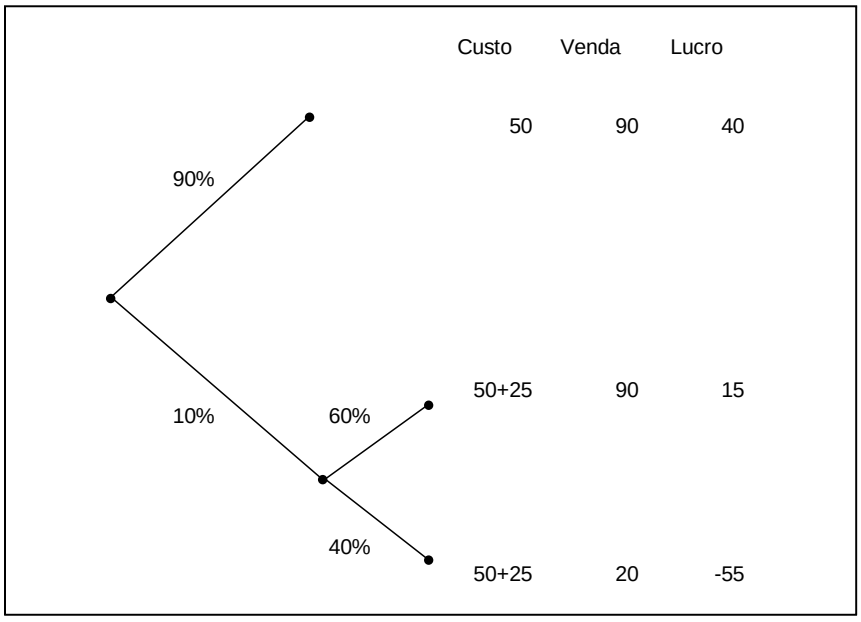
Igualando a zero:

$$g'(a) = 0 \Leftrightarrow a = E(X)$$

Calculando a derivada segunda nesse ponto, resulta: $g''(a) = 2 > 0 \Rightarrow$ ponto de mínimo! Logo, o mínimo da função $g(a)$ ocorre quando $a = E(X)$ e nesse ponto temos $g\left[E(X)\right] = E\left[X - E(X)\right]^2 = \text{Var}(X)$.

19. Na figura 3.4 temos o esquema do espaço amsotral desse experimento.

Figura 3.4: Solução do exercício 20



(a)

l	-55	15	40
$p_L(l)$	0,04	0,06	0,90

(b)

$$F_L(l) = \begin{cases} 0 & \text{se } l < -55 \\ 0,04 & \text{se } -55 \leq l < 15 \\ 0,10 & \text{se } 15 \leq l < 40 \\ 1,00 & \text{se } l \geq 40 \end{cases}$$

(c) $E(L) = -55 \times 0,04 + 15 \times 0,06 + 40 \times 0,90 = 34,7$

(d) $\text{Var}\left(L\right) = \left(-55\right)^2 \times 0,04 + 15^2 \times 0,06 + 40^2 \times 0,90 - \left(34,7\right)^2 = 1574,5 - 1204,09 = 370,41$

20. Na tabela abaixo temos o espaço amsotral desse exeprimento com as respectivas probabilidades:

1ª jogada	2ª jogada	prob.	lucro
3		$\frac{1}{6} = \frac{36}{216}$	15
4, 5, 6		$\frac{1}{2} = \frac{108}{216}$	-5
1	6 6	$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$	45
	$6\,\overline{6}$ ou $\overline{6}\,6$	$2 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{10}{216}$	0
	$\overline{6\,6}$	$\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{216}$	-5
2	6 6	$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$	45
	$6\,\overline{6}$ ou $\overline{6}\,6$	$2 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{10}{216}$	0
	$\overline{6\,6}$	$\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{216}$	-5

(a)

x	-5	0	15	45
$p_X(x)$	$\frac{158}{216}$	$\frac{20}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{2}{216}$

(b) $E(X) = \frac{-158\times5+15\times36+45\times2}{216} = -\frac{160}{216} = -0,74$

(a) $E(X) = 0,20+,060+0,90+0,40 = 2,1$ caminhões por dia

(b)

x	0	1	2	3	4
l	$300-15$	$300-140$	$2\times(300-140)$	$3\times(300-140)$	$4\times(300-140)$
$p_L(l)$	0,10	0,20	0,30	0,30	0,10

$$\begin{aligned} E(L) &= 160\times0,20+320\times0,30+480\times0,30+640\times0,10 = R\$\,336,00 \\ \mathrm{Var}(L) &= 160^2\times0,20+320^2\times0,30+480^2\times0,30+640^2\times0,10-(336)^2 = \\ &= 145920-112896 = 33024 \Rightarrow \\ DP(L) &= R\$\,181,73 \end{aligned}$$

21. Temos que Pr(prêmio 100) $= \frac{400}{10000}$; Pr(prêmio 200) $= \frac{50}{10000}$; Pr(prêmio 400) $= \frac{10}{10000}$. Logo, o gasto esperado da Loteria com os prêmios é:

$$E(P) = 100\times\frac{400}{10000}+200\times\frac{50}{10000}+400\times\frac{10}{10000} = 4+1+0,4 = R\$5,4$$

e esse valor é o valor que a loteria gasta, em média, por bilhete. Logo, para cobrir as despesas, o preço justo do bilhete seria R$ 5,40. Note que, nesse caso, a loteria não teria lucro!

22. Abaixo temos o esquema do espaço amostral desse jogo:

1ª moeda	2ª moeda	lucro
$K(0,3)$	$K\ (0,2)$	100
	$C\ (0,8)$	0
$C\ (0,7)$		-100

A fdp de X é:

x	-100	0	100
$p_X(x)$	0,7	$0,3\times0,8 = 0,24$	$0,3\times0,2 = 0,06$

e $E(X) = -70+6 = R\$-64,00$.

3.2 Capítulo 2

1. .

$$\begin{aligned} E(X) &= np = 12 \\ \text{Var}\,(X) &= np(1-p) = 4 \end{aligned}$$

Subsituindo a primeira equação na segunda obtém-se:

$$12 \times (1-p) = 4 \Rightarrow 1-p = \frac{1}{3} \Rightarrow p = \frac{2}{3}$$

Logo

$$n \times \frac{2}{3} = 12 \Rightarrow n = 18$$

2. A observação importante na solução deste exercício é a seguinte: podemos pensar o processo de produção gerando uma população tão grande que extrações com ou sem reposição não afetam em demasia as probabilidades. Ou seja, podemos pensar que as extrações são experimentos de Bernoulli (defeituosa ou não defeituosa) independentes.

   (a) X = número de peças defeituosas em 20 extrações. Com a observação acima, resulta que $X \sim bin(20; 0,1)$. Logo

$$\Pr(X = 5) = \binom{20}{5} (0,1)^5 (0,9)^{15} = 0,0319214$$

   (b) X = número de peças produzidas até primeira defeituosa. Com a observação acima resulta que $X \sim geom(0,1)$. Logo,

$$\Pr(X = 10) = (0,9)^9 (0,1) = 0,0387420$$

3. Aqui temos experimentos de Bernoulli (acerta ou erra o alvo) independentes (tiros são independentes). $\Pr(\text{acerto}) = 0,20$.

   (a) X = número de tiros até sexto acerto na mosca. Temos que $X \sim bin.neg\,(6; 0,2)$. Logo

$$\Pr(X = 10) = \binom{9}{5} (0,2)^6 (0,8)^4 = 0,003303$$

   (b) X = número de acertos em 10 tiros. Então, $X \sim bin\,(10; 0,2)$ e, portanto

$$\Pr(X = 6) = \binom{10}{6} (0,2)^6 (0,8)^4 = 0,005505$$

4. Temos uma população de 2000 peixes, dos quais 100 são especiais. Seja X = número de peixes especiais pescados.

(a) Como os peixes são recolocados no lago, $X \sim bin\left(60; \frac{100}{2000}\right)$ e, assim,

$$\Pr(X = 5) = \binom{60}{5}\left(\frac{100}{2000}\right)^5\left(\frac{1900}{2000}\right)^{55} = 0,101616$$

(b) Como os peixes não são recolocados, $X \sim hiperg\,(2000; 100; 60)$ e, portanto

$$\Pr(X = 5) = \frac{\binom{100}{5}\binom{1900}{55}}{\binom{2000}{60}} = 0,101943$$

Note que aqui já não ˜á diferença substancial entre "sem" e "com" reposição.

5. Como o dado é honesto, cada face tem probabilidade $\frac{1}{6}$

(a) $X =$ desconto concedido

x (%)	5	10	20	30
$p_X(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

(b) $E(X) = 5 \times \frac{1}{2} + 10 \times \frac{1}{6} + 20 \times \frac{1}{6} + 30 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{2} + \frac{60}{6} = 12,5\%$

(c) A probabilidade de se ter um desconto maior que 10% (20% ou 30%) é de $\frac{2}{6}$. Seja $X =$ número de clientes, num grupo de 5, que recebem desconto maior que 10%. Então, $X \sim bin\left(5; \frac{2}{6}\right)$. Logo,

$$\Pr(X \geq 1) = 1 - \Pr(X = 0) = 1 - \binom{5}{0}\left(\frac{2}{6}\right)^0\left(\frac{4}{6}\right)^5 = 0,868313$$

(d) Seja $Y =$ número de clientes que passam pelo caixa até primeiro desconto de 30% (probabilidade $\frac{1}{6}$). Então $X \sim geom\left(\frac{1}{6}\right)$ e, portanto,

$$\Pr(Y = 4) = \left(\frac{5}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right) = 0,096450617$$

6. $X:$ número de pessoas em cada carro

(a)

$X:$

x	1	2	3	4	5
p	0,05	0,20	0,40	0,25	0,10

(b) $E(X) = 0,05 + 0,40 + 1,20 + 1,0 + 0,5 = 3,15$

(c) A probabilidade de, em um carro, haver mais de 3 pessoas é $0,35 = 0,25+0,10$. Seja $Y =$ número de carros, num grupo de 5, com mais de 3 pessoas. Então, $Y \sim bin\,(5; 0,35)$. Logo

$$\Pr(X \geq 1) = 1 - \Pr(X = 0) = 1 - \binom{5}{0}(0,35)^0(0,65)^5 = 0,883971$$

(d) Seja $Z =$ número de carros até primeiro com 5 passageiros. Então, $Z \sim geom\,(0,10)$ e, assim

$$\Pr\left(Z=4\right)=\left(0,90\right)^{3}\left(0,10\right)=0,00729$$

7. Supondo que os acidentes ocorram segundo uma distribuição de Poisson, temos que o número de acidentes em cada 100 km é $X \sim Poi(2)$:

(a) $Y =$ número de acidentes em 250 km; então, $Y \sim Poi(5)$.

$$\begin{aligned}\Pr(Y &\geq 3)=1-\Pr(Y=0)-\Pr(Y=1)-\Pr(Y=2)\\ &= 1-\exp(-5)\left(\frac{5^0}{0!}+\frac{5^1}{1!}+\frac{5^2}{2!}\right)=0,875348\end{aligned}$$

(b) $Z =$ número de acidentes em 30 km; então, $Y \sim Poi(6)$.

$$\Pr(Z=5)=\exp(-6)\times\frac{6^5}{5!}=0,160623$$

8. Como as extrações são feitas com reposição, as extrações podem ser consideradas experimentos de Bernoulli independentes. Se definimos $X =$ número de itens defeituosas na amostra de 4, temos que $X \sim bin\,(4;0,10)$

(a) $\Pr\left(X=0\right)=\binom{4}{0}\left(0,10\right)^{0}\left(0,90\right)^{4}=0,6561$

(b)

$$\begin{aligned}\Pr\left(X\geq 2\right) &= 1-\Pr\left(X<2\right)=1-\Pr\left(X=1\right)-\Pr\left(X=0\right)=\\ &= 1-\binom{4}{1}\left(0,10\right)^{1}\left(0,90\right)^{3}-\binom{4}{0}\left(0,10\right)^{0}\left(0,90\right)^{4}=0,0037\end{aligned}$$

(c) $\Pr\left(X=1\right)=\binom{4}{1}\left(0,10\right)^{1}\left(0,90\right)^{3}=0,2916$

9. Podemos pensar a amostra de 18 peças que entram em uma caixa como uma amostra de uma população suficientemente grande, de tal modo que os sorteios das peças que entram numa caixa podem ser considerados experimentos independentes de Bernoulli. Assim, se $X =$ número de peças defeituosas em uma caixa, resulta que $X \sim bin\,(18;0,05)$.

A caixa satisfaz a garantia se $X \leq 2$. Logo, a probabilidade de uma caixa satisfazer a a garantia é

$$\begin{aligned}\Pr\left(X\leq 2\right) &= \Pr\left(X=0\right)+\Pr\left(X=1\right)+\Pr\left(X=2\right)=\\ &= \binom{18}{0}\left(0,05\right)^{0}\left(0,95\right)^{18}+\binom{18}{1}\left(0,05\right)^{1}\left(0,95\right)^{17}+\binom{18}{2}\left(0,05\right)^{2}\left(0,95\right)=\\ &= 0,941871\end{aligned}$$

10. Novamente podemos pensar os funcionários selecionados para o curso como experimentos de Bernoulli (aumenta ou não a produtividade) independentes. Seja $X =$ número de funcionários, dentre os 10, que aumentam produtividade.

(a) $\Pr(X=7) = \binom{10}{7}(0,80)^7(0,20)^3 = 0,201327.$

(b) Pelo menos 3 não aumentarem a produtividade é equivalente a no máximo 7 dos 10 aumentarem a produtividade. Logo, a probabilidade pedida é

$$\begin{aligned}\Pr(X \leq 7) &= 1 - \Pr(X > 7) = 1 - \Pr(X=8) - \Pr(X=9) - \Pr(X=10) = \\ &= 1 - \binom{10}{8}(0,80)^8(0,20)^2 - \binom{10}{9}(0,80)^9(0,20)^1 - \binom{10}{10}(0,80)^{10}(0,20)^0 = \\ &= 0,322200\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\Pr(X \leq 8) &= \Pr(X \leq 7) + \Pr(X=8) = 0,322200 + \binom{10}{8}(0,80)^8(0,20)^2 = \\ &= 0,624190362\end{aligned}$$

11. Numa população de 1000, retirar uma amostra de 20 pode ser vista como repetições de experimentos independentes de Bernoulli.

Seja X = número de defeituosas na amostra de 20. Então, $X \sim bin(20; 0,10)$

Seja V = valor de compra proposto pelo cliente. Então, V pode assumir os valores 20, 10 ou 8 u.m. e, pela regra dada,

$$\Pr(V=20) = \Pr(X=0) = \binom{20}{0}(0,10)^0(0,90)^{20} = 0,1216$$

$$\begin{aligned}\Pr(V=10) &= \Pr(X=1) + \Pr(X=2) = \\ &= \binom{20}{1}(0,10)^1(0,90)^{19} + \binom{20}{2}(0,10)^2(0,90)^{18} = 0,5553\end{aligned}$$

$$\Pr(V=8) = \Pr(X \geq 3) = 1 - \Pr(X=0) - \Pr(X=1) - \Pr(X=2) = 0,3231$$

v	8	10	20
$p_V(v)$	0,3231	0,5553	0,1216

$$E(V) = 8 \times 0,3231 + 10 \times 0,5553 + 20 \times 0,1216 = 10,5698$$

A proposta do cliente é mais desvantajosa para o fabricante.

12. X = número de chamadas em um minuto. Então, $X \sim Poi(8)$

(a) $\Pr(X \geq 10) = 1 - \Pr(X \leq 9) = 0,283376$

(b) $\Pr(X < 5) = \Pr(X \leq 4) = 0,0996324$

13. X = número de petroleiros por dia; $X \sim Poi(2)$. Capacidade atual: 3 petroleiros.

(a)

$$\begin{aligned}\Pr(X &> 3) = 1 - \Pr(X \leq 3) = 1 - \Pr(X = 0) - \Pr(X = 1) - \Pr(X = 2) - \Pr(X = 3) = \\ &= 1 - \exp(-2)\left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}\right) = 0,14287654\end{aligned}$$

(b) Seja k a nova capacidade. Atender a essa capacidade significa que $X \leq k$. Como essa probabilidade tem que ser pelo menos 95%, temos que ter:

$$\Pr(X \leq k) \geq 0,95$$

Na tabela a seguir apresentamos a fdp de uma $POI(2)$.

k	$\Pr(X = k)$[1]	$\Pr(X \leq k)$
0	0,135335283	0,135335283
1	0,270670566	0,406005850
2	0,270670566	0,676676416
3	0,180447044	0,857123460
4	0,090223522	0,947346983
5	0,036089409	0,983436392
6	0,012029803	0,995466194
7	0,003437087	0,998903281
8	0,000859272	0,999762553
9	0,000190949	0,999953502
$\geq$10	0,000046498	1,000000000

A nova capacidade deverá ser de 5 petroleiros.

14. Sejam os seguintes eventos: A = comprador A classifica partida como tipo II e B = omprador B classifica partida como tipo II. Sejam X_A número de peças defeituosas na amostra do comprador A e X_B o número de peças defeituosas na amostra do comprador B.

$$\begin{aligned}\Pr(A) &= \Pr(X_A > 1) = 1 - \Pr(X_A \leq 1) = 1 - \binom{5}{0}(0,2)^0(0,8)^5 - \binom{5}{1}(0,2)^1(0,8)^4 = \\ &= 0,2627\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(B) &= \Pr(X_B > 2) = 1 - \Pr(X_A \leq 2) = \\ &= 1 - \binom{10}{0}(0,2)^0(0,8)^{10} - \binom{10}{1}(0,2)^1(0,8)^9 - \binom{10}{2}(0,2)^2(0,8)^8 = \\ &= 0,3222\end{aligned}$$

Sejam P_A e P_B os preços pagos pelos compradores A e B respectivamente. Então, as distribuições de probabilidade dessas variáveis são:

P_A	0,8	1,2
Pr	0,2627	0,7373

$E(P_A) = 1,095$

[1] Valores calculados com a função POISSON do EXCEL.

P_B	0,8	1,2
Pr	0,3222	0,6778

$E(P_B) = 1,071$

A proposta do comprador A é mais vantajosa.