ALGEBRA LINEAR – PROVA 1 – 15/04/2009

Exercício 1. Considere os espaços vetoriais reais $V = \mathbb{R}^3$ com base canônica $\alpha = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $W = \mathbb{R}[x]_2 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$.

a) Escreva a única transformação linear $T : V \to W$ tal que $T(e_1) = 2 - 3x$, $T(e_2) = 5x^2$ e $T(e_3) = -2 + 3x + 10x^2$. É T um isomorphismo? Porque?

b) Considere o conjunto $\beta = \{1, x, 1 + x^2\}$ de W. Verifique que β é uma base de W e encontre a matriz de T nas bases α e β.

c) Encontre as equações de Núcleo(T) e Im(T) com respeito as bases α e β. Encontre uma base de Núcleo(T) e Im(T). Calcule dim(Núcleo(T)) e dim(Im(T)).

Solução: (a) Sejam (a_1, a_2, a_3) coordenadas com respeito a base α. A única transformação procurada é dada por

$$T(\sum_{i=1}^{3} a_i e_i) = \sum_{i=1}^{3} a_i T(e_i) = a_1(2 - 3x) + a_2(5x^2) + a_3(-2 + 3x + 10x^2) =$$

$$= (2a_1 - 2a_3) + (-3a_1 + 3a_3)x + (5a_2 + 10a_3)x^2.$$

Como $T(e_3) = -T(e_1) + 2T(e_2)$, lgo T não é injetiva, e não pode ser um isomorfismo.

(b) Se $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ são tais que

$$b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot x + b_3 \cdot (1 + x^2) = 0,$$

logo pela identidade de polinômios temos $b_1 + b_3 = 0$, $b_2 = 0$, $b_3 = 0$, que implica $b_1 = b_2 = b_3 = 0$. Assim, $\{1, x, 1 + x^2\}$ é LI. Além disso, todo polinómio $b_1 + b_2 x + b_3 x^2$ de $\mathbb{R}[x]_2$ é tal que

$$b_1 + b_2 x + b_3 x^2 = (b_1 - b_3) \cdot 1 + b_2 \cdot x + b_3 \cdot (x^2 + 1),$$

que implica que $S(1, x, q + x^2) = \mathbb{R}[x]_2$. Portanto, $\{1, x, 1 + x^2\}$ é uma base de $\mathbb{R}[x]_2$. Como $T(e_1) = 2 \cdot 1 - 3 \cdot x$, $T(e_1) = -5 \cdot 1 + 5 \cdot (1 + x^2)$, $T(e_3) = -12 \cdot 1 + 3 \cdot x + 10 \cdot (x^2 + 1)$, logo a matriz de T com respeito as bases b_1 e b_2 é

$$[T]_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -12 \\ -3 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

(c) As equações (cartesiânas) de Núcleo (T) com respeito as coordenadas (a_1, a_2, a_3) da base α são:

$$\begin{cases} a_1 - a_3 = 0 \\ a_2 + 2a_3 = 0 \end{cases}$$

Se $v = e_1 - 2e_2 + e_3$, uma base de Núcleo(T) é por exemplo $\{v\}$, e $\dim$ Núcleo(T) $= 1$.

Observe que

$$T(\sum_{i=1}^{3} a_i e_i) = (2a_1 - 2a_3) + (-3a_1 + 3a_3)x + (5a_2 + 10a_3)x^2 =$$

$$= (2a_1 - 5a_2 - 12a_3) \cdot 1 + (-3a_1 + 3a_3) \cdot x + (5a_2 + 10a_3) \cdot (x^2 + 1).$$

Logo as equações (paramétricas) de $\mathrm{Im}(T)$ com respeito as coordenadas (b_1, b_2, b_3) da base β são:

$$\begin{cases} b_1 = 2a_1 - 5a_2 - 12a_3 \\ b_2 = -3a_1 + 3a_3 \\ b_3 = 5a_2 + 10a_3 \end{cases}$$

Sabemos que $\dim \mathrm{Im}(T) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Núcleo}(T) = 2$. Logo, uma base de $\mathrm{Im}(T)$ é dada por exemplo por $\{T(e_1), T(e_2)\} = \{2 - 3x, 5x^2\}$, pois estes vetores são independentes.

Exercício 2. Seja V o espaço vetorial $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$. Seja V^{sim} e V^{ant} os subespaços das matrizes simetricas e antisimetricas.

a) Escreve uma base $\beta = \beta^{sim} \cup \beta^{ant}$ de V, onde β^{sim} é uma base de V^{sim} e β^{ant} é uma base de V^{ant}.

b) Considere o subespaco $W =< I >$ de V, onde $I \in V$ é a matriz identidade. Encontre as equações de W com respéito a base β.

c) Seja β^* a base dual de β. Para $v^* \in \beta^*$, escreva esplicitamente $v^*(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})$.

Solução: (a) Uma base de V^{sim} é

$$\beta^{sim} = \left\{ v_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, v_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, v_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

e uma base de V^{ant} é

$$\beta^{ant} = \left\{ v_4 := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

É claro que $\beta := \beta^{sim} \cup \beta^{ant}$ é uma base de V.

(b) Sejam (x_1, x_2, x_3, x_4) coordenadas de V com respéito a base β. Temos

$$W =< I >= \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\} = \{av_2 + av_3\}.$$

Logo as equações de W nas coordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4) são

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

(c) Considere a base dual $\beta^* = \{v_1^*, v_2^*, v_3^*, v_4^*\}$ de β. Logo para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$v_i^* \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = v_i^* \left(\frac{b+c}{2} v_1 + av_2 + dv_3 + \frac{-b+c}{2} v_4 \right) = \begin{cases} (b+c)/2 & \text{if } i = 1 \\ a & \text{if } i = 2 \\ d & \text{if } i = 3 \\ (-b+c)/2 & \text{if } i = 4 \end{cases}$$

Exercício 3. a) Usando indução, prove que, dados escalares $a_1, \dots, a_n \in K$, logo

$$\det \begin{pmatrix} a_1 - 1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 - 1 & a_2 & \cdots & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3 - 1 & \cdots & a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n - 1 \end{pmatrix} = (-1)^{n-1} \cdot (-1 + \sum_{i=1}^{n} a_i)$$

b) Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de um espaço vetorial V sobre K. Tome o vetor $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ onde $a_1, \dots, a_n \in K$. Prove que $\{v_1 + v, \dots, v_n + v\}$ é uma base para V se e somente se $a_1 + \cdots + a_n \neq -1$.

Solução: (a) Para $n = 1$ temos $a_1 - 1 = (-1 + a_1)$. Seja $n \geq 2$. Substituendo a priméira coluna com a diferença entre a priméira e a segunda coluna, e usando as propriedades do determinantee, obtemos que o determinante é igual ao determinante:

$$\det \begin{pmatrix} -1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ 1 & a_2 - 1 & a_2 & \cdots & a_2 \\ 0 & a_3 & a_3 - 1 & \cdots & a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_n & a_n & \cdots & a_n - 1 \end{pmatrix}.$$

Agora, substiutuindo a priméra segunda linha com a soma da priméira e segunda linha, o determinante é igual ao determinante

$$\det \begin{pmatrix} -1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ 0 & a_1 + a_2 - 1 & a_1 + a_2 & \cdots & a_1 + a_2 \\ 0 & a_3 & a_3 - 1 & \cdots & a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_n & a_n & \cdots & a_n - 1 \end{pmatrix}.$$

Desenvolvendo o determinante segundo a priméira linha e usando indução, obtemos

$$-\det \begin{pmatrix} a_1 + a_2 - 1 & a_1 + a_2 & \cdots & a_1 + a_2 \\ a_3 & a_3 - 1 & \cdots & a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n - 1 \end{pmatrix} = -(-1)^{n-2}(-1 + \sum_{i=1}^{n} a_i) =$$

$$= (-1)^{n-1}(-1 + \sum_{i=1}^{n} a_i).$$

(b) Como $\dim V = n$, temos que $\{v + v_1, \dots, v + v_n\}$ é uma base de V se e somente se $\{v + v_1, \dots, v + v_n\}$ é LI. Mas usando o ponto (a), temos

$$\{v + v_1, \dots, v + v_n\} \text{ é LI } \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a_1 + 1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 + 1 & a_2 & \cdots & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3 + 1 & \cdots & a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n + 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} -a_1 - 1 & -a_1 & -a_1 & \cdots & -a_1 \\ -a_2 & -a_2 - 1 & -a_2 & \cdots & -a_2 \\ -a_3 & -a_3 & -a_3 - 1 & \cdots & -a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_n & -a_n & -a_n & \cdots & -a_n - 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow -1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$$

Exercício 4. Seja $V = M_{n,n}(K)$. Para cada $B \in V$, define $f_B : V \to K$ via $f_B(A) = \text{traço}(B^t A)$. Prove que $V^* = \{f_B : B \in V\}$.

Solução: Define $\varphi\colon V \to V^*$ via $\varphi(B) = f_B$. É facil ver que φ é linear. Como $\dim V = \dim V^*$, se provarmos que φ é injetiva, logo ela é um isomorfismo e portanto $V^* = \{f_B, B \in V\}$, como queremos provar.

De fato φ é injetiva: suponha que $f_B = 0$. Seja $e_{i,j} = (a_{h,k})$ a matriz de V tal que que $a_{i,j} = 1$ e $a_{h,k} = 0$ para $(h,k) \neq (i,j)$. Logo, sendo $f_B = 0$, obtemos $0 = f_B(e_{i,j}) = \text{traço}(B^t \cdot e_{i,j}) = b_{i,j}$, onde $b_{i,j}$ é o elemento (i,j) da matriz B. Isto implica que $B = 0$, ou seja φ é injetiva.

Exercício 5. Prove que se uma matriz $A \in M_{n,m}(K)$ é tal que $\text{posto}(A) \leq 1$, logo existem matrizes $B \in M_{n,1}(K)$ e $C \in M_{1,m}$ tais que $A = B \cdot C$. Se $n = m$, deduzir que $A^2 = \text{Traço}(A) \cdot A$ e que, para todo escalar $t \notin \{0, \text{Traço}(A)\}$, a matriz $A - t \cdot I$ é invertivel, onde I é a matriz identidade.

Solução: Se $\text{posto}(A) = 0$, logo $A = 0$ e claramente $A = B \cdot C$, onde $B = 0 \in M_{n,1}(K)$ e $C = 0 \in M_{1,m}$. Se $\text{posto}(A) = 1$, logo sabemos que $posto-coluna(A) = 1$. Assim, se $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{K}^n$ são os vetores colunas de A, temos que $v_i = k_i \cdot v_m$, para todo $i \in \{1, \ldots, m-1\}$, onde $k_i \in K$. Define $B := v_m \in M_{n,1}$ e $C := (k_1, \ldots, k_{m-1}, 1) \in M_{1,m}$. Logo

$$B \cdot C = v_m \cdot (k_1, \ldots, k_{m-1}, 1) = (k_1 v_m, \ldots, k_{m-1} v_{m-2} v_m, v_m) = A.$$

Se $n = m$ e $v_n = (a_1, \ldots, a_n)$ logo temos $\text{traço} A = k_1 a_1 + \cdots + k_{n-1} a_{n-1} + a_n$. Assim

$$A^2 = A \cdot A = (BC) \cdot (BC) = B \cdot (CB) \cdot C = B \cdot (k_1 a_1 + \cdots + k_{n-1} a_{n-1} + a_n) \cdot C = \\ = \text{traço}(A) \cdot (BC) = \text{traço}(A) \cdot A.$$

Seja $T := \text{traço}(A)$ e $t \notin \{0, T\}$. Para provarmos que $A - tI$ é invertivel, vamos mostrar que a sua inversa é $t^{-1}(T-t)^{-1}(A + (t-T)I)$. De fato

$$\begin{aligned}(A - tI) \cdot (t^{-1}(T-t)^{-1}(A + (t-T)I)) &= t^{-1}(T-t)^{-1}((A - tI)(A + (t-T)I) = \\ &= t^{-1}(T-t)^{-1}(A^2 + (t-T)A - tA - t(t-T)I) = \\ &= t^{-1}(T-t)^{-1}(TA + (t-T)A - tA + t(T-t)I) = \\ &= t^{-1}(T-t)^{-1} = t(T-t)I = I.\end{aligned}$$

Similmente temos que

$$t^{-1}(T-t)^{-1}(A + (t-T)I)) \cdot (A - tI) = I,$$

logo $(t^{-1}(T-t)^{-1}(A + (t-T)I)) = (A - tI)^{-1}$.