ALGEBRA LINEAR – PROVA 1 – 18/04/2012

Exercício 1. Considere o espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{C} \right\} \subset M_{2,2}(\mathbb{C}).$$

(a) Construa um isomorfismo de espaços vetoriais $\varphi\colon V \to \mathbb{C}^3$.

(b) Seja $E_i = \varphi^{-1}(e_i)$, para $i = 1, 2, 3$, onde $\{e_1, e_2, e_3\}$ é a base canonica de $\mathbb{C}^3$. É verdade que existe uma única transformação linear $T\colon V \to V$ tal que

$$T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = E_1, \quad T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = E_2, \quad T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}?$$

Justifique a sua resposta, citando os resultados necessários.

(c) Caso exista uma T como pedido em (b), encontre a matriz de T com respeito a base $\{E_1, E_2, E_3\}$ e uma base do núcleo e imagem de T.

Solução: (a) É facil verificar isomorfismo de espaços vetoriais $\varphi\colon V \to \mathbb{C}^3$ é dado por exemplo por

$$\varphi \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = (a, b, c).$$

(b) Temos:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere as matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que $A_1 \neq 0 \in V$. É claro que não existe nenhum $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $A_2 = \lambda A_1$, logo $\dim S(A_1, A_2) = 2$. Além disso, $A_3 \notin S(A_1, A_2)$, pois se $A_3 = \lambda A_1 + \mu A_2$, com $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, logo $1 = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0$ e $2 = \lambda \cdot 2 + \mu \cdot 1$, logo $\lambda = \mu = 0$, uma contradição. Assim, obtemos que $\dim S(A_1, A_2, A_3) = 3$, então $\{A_1, A_2, A_3\}$ formam uma base de V. Por um teorema mostrado na sala de aula, dados vetores quaisquer A'_1, A'_2, A'_3 de V (em particular $A'_1 = E_1$, $A'_2 = E_2$ $A'_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$), existe uma única transformação linear $T\colon V \to V$ tal que $T(A_i) = A'_i$, para $i = 1, 2, 3$.

(c) Devemos escrever E_1, E_2, E_3 como combinação linear dos vetores $\{A_1, A_2, A_3\}$. Resolvendo os sistemas associados, temos

$$E_1 = 2A_1 - 2A_2 - A_3, \quad E_2 = -A_1 + A_2 + A_3, \quad E_3 = -A_1 + A_3$$

logo $T(E_1) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $T(E_2) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $T(E_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Assim, a matriz de T na base $\{E_1, E_2, E_3\}$ é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se (x_1, x_2, x_3) são as coordenadas de V com respeito a base $\{E_1, E_2, E_3\}$, logo as equações cartesianas do núcleo são

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

Obtemos $x_1 = 0$ e $x_3 = -2x_2$, logo $N(T) = \{\lambda E_2 - 2\lambda E_3, \lambda \in \mathbb{C}\}$. Uma base de $N(T)$ é portanto $\{E_2 - 2E_3\}$. Como $\dim Im(T) = \dim V - \dim N(T) = 3 - 1 = 2$, uma base de $Im(T)$ é formada por dois vetores. Como $E_1 = T(A_1) \in Im(T)$ e $E_2 = \varphi(A_2) \in Im(T)$, logo uma base de $Im(T)$ é $\{E_1, E_2\}$.

Exercício 2. Seja V um espaço vetorial. Uma *projeção de V em V* é uma transformação linear $T\colon V \to V$ tal que $T^2 = T$. Prove que se $T\colon V \to V$ é uma projeção, logo $V = N(T) \oplus Im(T)$.

Solução:

Suponha que U e W são espaços vetoriais tais que $U \cap W = \{0\}$. Vamos ver que $dim(U + W) = \dim U + \dim W$. Se $\{u_1, \dots, u_p\}$ é uma base de U e $\{w_1, \dots, w_q\}$ é uma base de W, logo afirmamos que $\alpha := \{u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_q\}$ é uma base de $U + W$. Obviamente, $S(\alpha) = U + W$. Além disso, se

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p + \mu_1 w_1 + \mu_q w_q = 0$$

com $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K}$, logo

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = -\mu_1 w_1 + \mu_q w_q.$$

Mas como $U \cap W = \{0\}$, segue que

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = -\mu_1 w_1 + \mu_q w_q = 0.$$

Usando que $\{u_1, \dots, u_p\}$ e $\{w_1, \dots, w_q\}$ são independentes, segue que

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = \mu_1 = \cdots = \mu_q = 0$$

isto é α é LI e então α é uma base de $U + W$.

Agora, sejam N o núcleo de T e I a imagem de T. Se provarmos que $N \cap I = \{0\}$, logo $N + I = N \oplus I$ e $\dim(N \oplus I) = \dim(N + I) = \dim N + \dim I = \dim V$, onde a última igualdade segue pelo teorema do núcleo e imagem, e portanto $N \oplus I = V$.

Vamos ver que $N \cap I = \{0\}$: seja $v \in N \cap I$. Logo $Tv = 0$ e $v = Tw$, para algum $w \in T$. Como $T^2 = T$, então

$$0 = Tv = T(Tw) = T^2 w = Tw = v$$

isto é $v = 0$. Assim $N \cap I = \{0\}$.

Exercício 3. Seja $\mathbb{K}$ um corpo de caraterística diferente de 2. Uma matriz $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ é dita *antisimetrica* se $A = -A^T$, onde A^T é a transposta da matriz A. Prove que se A é antisimetrica e n é impar, logo $\det(A) = 0$. O resultado continua valendo se n é par?

Solução: Temos:

$$\det(A) = \det(A^T) = \det(-A). \tag{0.1}$$

Agora se $v_1, \dots, v_n$ são as colunas da matriz A, logo usando o fato que o determinante é uma forma multilinear, temos:

$$\det(-A) = \det(-v_1, \dots, -v_n) = (-1)^n \det(v_1, \dots, v_n) = (-1)^n \det(A). \tag{0.2}$$

Como n é impar, combinando (0.1) e (0.2), obtemos $\det(A) = -\det(A)$, que implica $\det(A) = 0$.

Se n é par, o resultado não vale, pois por exemplo, para $n = 2$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, temos

$$\det \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} = -a^2$$

que é zero se e somente se $a = 0$.

Exercício 4. Sejam A, B matrizes $n \times n$ com coeficientes em $\mathbb{R}$. Prove que

$$posto(A + B) \leq posto(A) + posto(B).$$

Solução: Se $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ são os vetores colunas de A e $\{w_1, \dots, w_n\} \subset \mathbb{R}^n$ são os vetores colunas de B, logo $\{v_1+w_1, \dots, v_n+w_n\} \subset \mathbb{R}^n$ são os vetores colunas de $A + B$. Segue que $S(v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n) \subseteq S(v_1, \dots, v_n) + S(w_1, \dots, w_n)$.

Se $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $W \subseteq \mathbb{R}^m$ são subespaços vetoriais, afirmamos que $\dim(U + W) \leq \dim U + \dim W$. Se provarmos isso, logo

$$\begin{aligned} posto(A+B) &= \dim S(v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n) \leq \dim(S(v_1, \dots, v_n) + S(w_1, \dots, w_n)) \\ &\leq \dim S(v_1, \dots, v_n) + \dim S(w_1, \dots, w_n) = posto(A) + posto(B). \end{aligned}$$

Vamos provar a afirmação. Considere o espaço vetorial

$$U \times W := \{(u, w) : u \in U, w \in W\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}.$$

É claro que uma base de $U \times W$ é data por $\{(u_1, 0) \dots, (u_p, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_q)\}$, onde $\{u_i\}_{i \in \{1,\dots,p\}}$ é uma base de U e $\{w_i\}_{i \in \{1,\dots,q\}}$ é uma base de W. Assim, $\dim U \times W = \dim U + \dim W$. Considere $U + W \subseteq \mathbb{R}^n$ e define a transformação linear:

$$T : U \times W \to U + W$$

via $T(u, w) = u + w$. Claramente T é sobrejetiva, logo pelo teorema do núcleo e imagem temos

$$\begin{aligned} \dim U + \dim W &= \dim(U \times W) = \dim N(T) + \dim Im(T) \\ &= \dim N(T) + \dim(U + W) \leq \dim(U + W). \end{aligned}$$